УДК 517.9: 519.3

В. Е. Капустян, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОПТИМАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

An asymptotics of bounded controls is constructed and substantiated for a singularly perturbed optimal elliptic problem

Будується та обгрунтовується асимптотика обмежених керувань в сингулярно збуреній еліптичній задачі.

В книге [1] исследуются слабые решения широкого класса сингулярно возмущенных распределенных систем и задач оптимального управления для них. Доказаны теоремы о предельном переходе к вырожденным решениям. Однако вопросы структуры асимптотических решений до любого порядка точности, их особенностей в окрестностях некоторых многообразий остались открытыми. В работах [2, 3] при специфических ограничениях на распределенное управление построена его формальная асимптотика в задаче синтеза оптимального управления быстрой теплопроводностью с малым временем релаксации. В работах [4, 5] построены асимптотики решения вариационных неравенств для линейных и нелинейных операторов с малым параметром при старшей производной. Эти результаты послужили основой для данной работы.

1. Постановка задачи. Пусть в области $\Omega \subset R^n$ с компактным замыканием $\overline{\Omega}$ и гладкой (класса C^∞) $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$ состояние управляемой системы $y(u)$ определяется как решение задачи Дирихле [6]

$$-\varepsilon^2 \Delta y(u) + y(u) = f + u, \tag{1}$$

$$y(u) \in H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

где $f \in L_2(\Omega)$, $u \in U \subset L_2(\Omega)$ замкнуто и выпукло, $0 < \varepsilon << 1$, Δ – оператор Лапласа. Требуется найти

$$\inf_{v\in U} \mathcal{J}(v) = \inf_{v\in U} \left\{ \int_\Omega [[y(v) - z]^2 + \nu v^2(x)]\, dx \right\}, \quad \nu = \text{const} > 0, \tag{3}$$

где $z(x) \in L_2(\Omega)$ — фиксированный элемент. Тогда оптимальное управление определяется из соотношений [6, с. 59]

$$\begin{gathered} -\varepsilon^2\Delta y(u) + y(u) = f + u,\ x\in\Omega; \quad y(u) = 0,\ x\in\partial\Omega; \\ -\varepsilon^2\Delta p(u) + p(u) = y(u) - z,\ x\in\Omega; \quad p(u) = 0,\ x\in\partial\Omega; \\ \int_\Omega [p(u) + \nu u][v - u]\, dx \ge 0 \quad \forall v \in V. \end{gathered} \tag{4}$$

***Замечание* 1.** Известно [7, с. 176; 8, с. 178], что при фиксированном управлении в (1), (2) $y(u) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Тогда тому же пересечению принадлежит и $p(u)$.

Из замечания 1 и (4) получаем эквивалентное неравенство

$$\begin{gathered} \varepsilon^4(\Delta y(u), \Delta(y(v) - y(u))) + 2\varepsilon^2(\nabla y(u), \nabla(y(v) - y(u))) + \varepsilon^2(f, \Delta(y(v) - \\ - y(u))) + ((1+\nu)\nu^{-1} y(u) - f - \nu^{-1} z,\ y(v) - y(u)) \ge 0 \quad \forall v \in V, \end{gathered} \tag{5}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Действительно, справедлива импликация (4) $\Rightarrow$ (5):

$$0 \le (p(u) + \nu u,\ v - u) = \big(p(u) + \nu(-\varepsilon^2\Delta y(u) + y(u) - f),\ -\varepsilon^2\Delta(y(v) - y(u)) + (y(v) - y(u))\big) = (p(u),\ -\varepsilon^2\Delta(y(v) - y(u)) + (y(v) - y(u)) + \nu(-\varepsilon^2\Delta y(u) + y(u) - f,\ -\varepsilon^2\Delta(y(v) - y(u)) + (y(v) - y(u))) = (y(u) - z,\ y(v) - y(u)) + \nu\varepsilon^4(\Delta y(u),\ \Delta(y(v) - y(u))) + 2\nu\varepsilon^2(\nabla y(u),\ \nabla(y(v) - y(u))) + \nu(y(u) - f,\ y(v) - y(u)) + \varepsilon^2\nu(f,\ \Delta(y(v) - y(u))) = \nu\varepsilon^4(\Delta y(u),\ \Delta(y(v) - y(u))) + 2\nu\varepsilon^2(\nabla y(u),\ \nabla(y(v) - y(u))) + \varepsilon^2\nu(f,\ \Delta(y(v) - y(u))) + (y(u)(1 + \nu) - \nu f - z,\ y(v) - y(u)).$$

Обратно, с учетом того, что

$$-\varepsilon^2\,\Delta y(u) + y(u) = f + u, \quad -\varepsilon^2\,\Delta p(u) + p(u) = y(u) - z,$$

получим импликацию (5) $\Rightarrow$ (4). Пусть

$$U = \{v \mid v \ge 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{6}$$

Из (4), (6) и [6, с. 60] следует задача

$$-\varepsilon^2\,\Delta y(u) + y(u) - f \ge 0 \quad \text{п. в. в } \Omega; \tag{7}$$

$$p(u) + \nu(-\varepsilon^2\,\Delta y(u) + y(u) - f) \ge 0 \quad \text{п. в. в } \Omega; \tag{8}$$

$$(-\varepsilon^2\,\Delta y(u) + y(u) - f)\big(p(u) + \nu(-\varepsilon^2\,\Delta y(u) + y(u) - f)\big) = 0 \quad \text{п. в. в } \Omega; \tag{9}$$

$$-\varepsilon^2\,\Delta p(u) + p(u) = y(u) - z \quad \text{п. в. в } \Omega; \tag{10}$$

$$y\big|_{\partial\Omega} = p\,\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{11}$$

Тогда $u = -\varepsilon^2\,\Delta y(u) + y(u) - f$. Если

$$-\varepsilon^2\,\Delta z + z \ne f \quad \text{п. в. в } \Omega, \tag{12}$$

то имеются только две возможности:

i) $u = 0,\ p > 0,\ x \in \Omega_0$;

ii) $u > 0,\ p + \nu u = 0,\ x \in \Omega_1$; $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1,\ \Omega_0 \cap \Omega_1 = \varnothing$.

Из i), ii) следует $u = -\nu^{-1}\inf(0, p)$ п. в. в Ω, причем $u \in H_0^1(\Omega)$ (регулярность оптимального управления).

***Замечание* 2.** Пространства $H_0^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ (если Ω непрерывна по Липшицу) являются пространствами Дирихле [8, с. 106], которые замкнуты относительно операций $\inf(0, p)$, $\sup(0, p)$, $|p|$ $\forall\, p \in H_0^1(\Omega)$ $(H^1(\Omega))$.

2. Асимптотика управления вне особого подмногообразия. Вдали от границы $\partial\Omega$ в Ω_0 согласно i) $y(u)$ представляется в виде регулярного ряда

$$\overline{y}(u) = \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i}\overline{y}_{2i}(u), \tag{13}$$

где

$$\overline{y}_0(u) = f(x), \quad \overline{y}_{2i} = \Delta\overline{y}_{2i-2}, \quad i > 0. \tag{14}$$

Также и $p(u)$ ищется в виде регулярного ряда

$$\overline{p}(u) = \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i}\overline{p}_{2i}(u), \tag{15}$$

где

$$\overline{p}_0 = \overline{y}_0 - z, \quad \overline{p}_{2i} = \overline{y}_{2i} + \Delta\overline{p}_{2i-2}. \tag{16}$$

Так как в Ω_0 должно выполняться неравенство $p > 0$, то из (14), (16) получаем $f(x) > z(x)$, считая обе функции принадлежащими классу $C^\infty(\Omega)$.

Если реализовалось условие ii), то $\overline{y}(u)$ и $\overline{p}(u)$ определяются рядами (13), (15), в которых коэффициенты связаны системой

$$\begin{aligned} &\overline{p}_0 + \nu(\overline{y}_0 - f) = 0, \quad &&\overline{p}_{2i} + \nu(-\Delta\overline{y}_{2i-2} + \overline{y}_{2i}) = 0, \\ &\overline{p}_0 = \overline{y}_0 - z; &&\overline{p}_{2i} = \overline{y}_{2i} + \Delta\overline{p}_{2i-2}, \quad i > 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Пусть $\Omega_+ = \{x \mid f(x) > z(x)\}$, $\Omega_- = \{x \mid f(x) < z(x)\}$. Более того, $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$, $\Omega_+ \cap \Omega_- = \varnothing$ и Ω_0 совпадает с Ω_+, как и Ω_1 с Ω_-, с точностью до некоторой окрестности Г. Пусть общая граница γ множеств Ω_+ и Ω_- является $(n-1)$-мерным замкнутым подмногообразием класса C^∞ без края, расположенным строго внутри Ω и охватывающим Ω_+. Она определяется соотношением $\gamma = \{x \in \Omega \mid f(x) = z(x)\}$.

Формально ряды (13), (15) с коэффициентами вида (14), (16) и (17) удовлетворяют соотношениям (7)–(10), но условия (11) для них не выполняются. Для того чтобы построить пограничный слой (только для Ω_-), введем в окрестности Ξ границы координаты $(\overline{\nu}, s)$ [4, с. 755], где $\overline{\nu}$ — расстояние до $\partial\Omega$ вдоль внешней нормали, s — локальные координаты на поверхности $\partial\Omega$. Обозначая через $t = -\varepsilon^{-1}\overline{\nu}$ новую переменную, запишем оператор $-\varepsilon^2\Delta + I$ в координатах (t, s) и разложим его в ряд по степеням малого параметра

$$-\varepsilon^2\Delta + I \sim -\partial^2/\partial t^2 + I + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j L_j\Big(s, t, \partial/\partial s, \partial/\partial t\Big), \tag{18}$$

где L_j — дифференциальные операторы не выше второго порядка, их коэффициенты гладко зависят от координат s на $\partial\Omega$ и полиномиально от t. Решения типа погранслоев ищем в виде рядов

$$\tilde{y}(\overline{\nu}, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \tilde{y}_j(-\varepsilon^{-1}\overline{\nu}, s), \quad \tilde{p}(t, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \tilde{p}_j(-\varepsilon^{-1}\overline{\nu}, s). \tag{19}$$

В силу ii) и (18) коэффициенты рядов (19) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\tilde{p}_k}{\partial t^2} - \tilde{p}_k(t,s) + \tilde{y}_k(t,s) = \sum_{j=1}^{\infty} L_j\Big(s, t, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\Big)\tilde{p}_{k-j}(t,s), \quad t \in (0, \infty), \\ &\frac{\partial^2\tilde{y}_k}{\partial t^2} - \tilde{y}_k(t,s) - \nu^{-1}\tilde{p}_k(t,s) = \sum_{j=1}^{\infty} L_j\Big(s, t, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\Big)\tilde{y}_{k-j}(t,s), \quad t \in (0, \infty), \end{aligned} \tag{19*}$$

здесь и ниже функции с отрицательными индексами равны нулю.

Согласно (11) функции $\tilde{p}_k(t, s)$, $\tilde{y}_k(t, s)$ при $t = 0$ удовлетворяют таким начальным условиям:

$$\tilde{p}_{2k}(0,s) = -\overline{p}_{2k}(s), \ \ \tilde{y}_{2k}(0,s) = -\overline{y}_{2k}(s), \quad \tilde{p}_{2k+1}(0,s) = \tilde{y}_{2k+1}(0,s) = 0, \quad k \ge 0, \tag{20}$$

причем $\overline{p}_{2k}$, $\overline{y}_{2k}$ определяются системой (17).

При $k = 0$ из (19)* получаем однородную систему уравнений

$$\begin{aligned} &\partial^2\tilde{p}_0/\partial t^2 - \tilde{p}_0(t,s) + \tilde{y}_0(t,s) = 0, \\ &\partial^2\tilde{y}_0/\partial t^2 - \tilde{y}_0(t,s) + \nu^{-1}\tilde{p}_0(t,s) = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Характеристическое уравнение системы (21) имеет пару комплексно-сопряженных корней с отрицательной вещественной частью вида

$$r_{1,2} = \sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\left(-\cos\frac{\varphi}{2} \pm i\sin\frac{\varphi}{2}\right);\ \varphi\colon \cos\varphi = (1+\nu^{-1})^{-1/2},\ \sin\varphi = (1+\nu)^{-1/2}. \quad (22)$$

Тогда решение системы (21), (20) с учетом (22) запишется таким образом:

$$\tilde{y}_0(t,s) = \nu^{-1/2}\exp\left(-\sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}t\right)\left(c_1\cos\left(\sin\frac{\varphi}{2}t\right) - c_2\sin\left(\sin\frac{\varphi}{2}t\right)\right),$$
$$\tilde{p}_0(t,s) = \exp\left(-\sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}t\right)\left(c_1\sin\left(\sin\frac{\varphi}{2}t\right) + c_2\cos\left(\sin\frac{\varphi}{2}t\right)\right), \quad (23)$$

где $c_1 = -\sqrt{\nu}\,\overline{y}_0(s)$, $c_2 = -\overline{p}_0(s)$. По (19)*, (20) строятся оставшиеся члены рядов (19), которые экспоненциально стремятся к нулю при $t \to \infty$ [9, с. 33]. Найденные решения задачи (7)–(11), вообще говоря, не принадлежат $H^2(\Omega) \cap \cap H_0^1(\Omega)$ и, кроме того, в окрестности Γ $(\gamma \subset \Gamma)$ могут не выполняться неравенства (7), (8). Поэтому возникает дополнительный внутренний погранслой.

3. Главный член внутреннего погранслоя. В окрестности Γ многообразия γ введем координаты (τ, σ), где $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ — локальные координаты на γ, τ — расстояние до γ, взятое со знаком $\pm$ в $\Omega_\pm$ [4, с. 765]. В силу (7)–(9) область Γ есть область перехода от неравенства (7) к неравенству (8). Указанную поверхность будем искать в виде

$$\{x \in \Gamma\colon\ \tau = \varepsilon H(\varepsilon, \sigma)\}, \quad (24)$$

где

$$H(\varepsilon,\sigma) = \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j H_j(\sigma),\quad H_j(\sigma) \in C^\infty(\gamma). \quad (25)$$

В Γ сделаем замену переменных $x \to (\eta, \sigma)$, где $\eta = \varepsilon^{-1}\tau - H(\varepsilon, \sigma)$. При этом оператор $-\varepsilon^2\Delta_x + I$ расщепляется в ряд

$$-\varepsilon^2\Delta_x + I \sim -\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + I + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \mathcal{N}_j\left(s, \sigma, \frac{\partial}{\partial\eta}, \frac{\partial}{\partial\sigma}\right), \quad (26)$$

где операторные коэффициенты в (26) зависят от неизвестных к настоящему моменту коэффициентов разложения (25) функции H [4, с. 758]. Оператор $\mathfrak{N}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, выражается через функции $H_0, \ldots, H_{j-1}$.

Старшие члены внутреннего пограничного слоя (метод сращиваемых асимптотических разложений) ищем в виде

$$\hat{y}(\eta,\sigma) = f(0,\sigma) + \varepsilon\hat{y}_1(\eta,\sigma),\quad \hat{p}(\eta,\sigma) = \varepsilon\hat{p}_1(\eta,\sigma). \quad (27)$$

Подставляя (27) в (7) – (10) и учитывая (25), (26), получаем системы

$$-\frac{\partial^2\hat{y}_1}{\partial\eta^2} + \hat{y}_1(\eta,\sigma) = \frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}(\eta + H_0(\sigma)),$$
$$\frac{\partial^2\hat{p}_1}{\partial\eta^2} + \hat{p}_1(\eta,\sigma) = \hat{y}_1(\eta,\sigma) - \frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}(\eta + H_0(\sigma)),\ \text{при}\ \eta > 0; \quad (28)$$

$$-\frac{\partial^2\hat{y}_1}{\partial\eta^2} + \hat{y}_1(\eta,\sigma) + \nu^{-1}\hat{p}_1(\eta,\sigma) = \frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}(\eta + H_0(\sigma)),$$
$$\frac{\partial^2\hat{p}_1}{\partial\eta^2} + \hat{p}_1(\eta,\sigma) = \hat{y}_1(\eta,\sigma) - \frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}(\eta + H_0(\sigma)),\ \text{при}\ \eta < 0. \quad (29)$$

При $\eta > 0$ система (28) имеет решение

$$\hat{y}_1(\eta,\sigma) = \frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}(\eta + H_0(\sigma)) + c_1(\sigma)\exp(-\eta),$$
$$\hat{p}_1(\eta,\sigma) = \left(\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau} - \frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}\right)(\eta + H_0(\sigma)) + (c_1(\sigma)\,0{,}5\,\eta + c_2(\sigma))\exp(-\eta); \tag{30}$$

где $c_1(\sigma)$, $c_2(\sigma)$ — произвольные функции.

Аналогично строится решение системы (29), которое имеет вид

$$\hat{y}_1(\eta,\sigma) = (1+\nu)^{-1}\left(\nu\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau} - \frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}\right)(\eta + H_0(\sigma)) + \nu^{-1/2}\exp\Big(\sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\times$$
$$\times\cos\frac{\varphi}{2}\eta\Big)\left(\hat{c}_1(\sigma)\cos\left(\sin\frac{\varphi}{2}\eta\right) - \hat{c}_2(\sigma)\sin\left(\sin\frac{\varphi}{2}\eta\right)\right),$$
$$\hat{p}_1(\eta,\sigma) = \nu(1+\nu)^{-1}\left(\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau} - \frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}\right)(\eta + H_0(\sigma)) + \exp\Big(\sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\times \tag{31}$$
$$\times\cos\frac{\varphi}{2}t\Big)\left(\hat{c}_1(\sigma)\sin\left(\sin\frac{\varphi}{2}\eta\right) + \hat{c}_2(\sigma)\cos\left(\sin\frac{\varphi}{2}\eta\right)\right),$$

где угол φ определен при построении частных решений типа погранслоя (23).

Решения (30), (31) должны быть элементами $C^1(R^1)$, т. е.

$$\hat{y}_1(+0,\sigma) = \hat{y}_1(-0,\sigma),\quad \hat{y}_1'(+0,\sigma) = \hat{y}_1'(-0,\sigma);$$
$$\hat{p}_1(+0,\sigma) = \hat{p}_1(-0,\sigma),\quad \hat{p}_1'(+0,\sigma) = \hat{p}_1'(-0,\sigma). \tag{32}$$

Условие (32) приводит к такой системе линейных алгебраических уравнений, связывающих неизвестные коэффициенты в (30), (31):

$$c_1 + \nu^{-1/2}\hat{c}_1 = -\frac{a(\sigma)}{1+\nu}H_0(\sigma),\quad a(\sigma) = \frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau} - \frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau} > 0,$$
$$-c_1 - \nu^{-1/2}(1+\nu^{-1})^{1/2}\cos\frac{\varphi}{2}\,\hat{c}_1 + \nu^{-1/2}\sin\frac{\varphi}{2}\hat{c}_2 = -\frac{a(\sigma)}{1+\nu},$$
$$c_2 - \hat{c}_2 = -\frac{a(\sigma)}{1+\nu}H_0(\sigma), \tag{33}$$
$$0{,}5\,c_1 - \hat{c}_2 - \sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}\hat{c}_2 - \sin\frac{\varphi}{2}\hat{c}_1 = -\frac{a(\sigma)}{1+\nu}.$$

Из (33) имеем

$$c_1 = \nu^{-1/2}\,\hat{c}_1 - \frac{a(\sigma)}{1+\nu}H_0(\sigma),\quad c_2 = \hat{c}_2 - \frac{a(\sigma)}{1+\nu}H_0(\sigma),$$

где $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ удовлетворяют системе уравнений

$$-\nu^{-1/2}\Big(1 + \sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\,\hat{c}_1 + \nu^{-1/2}\sin\frac{\varphi}{2}\hat{c}_2 = -\frac{a(\sigma)}{1+\nu}(1 + H_0(\sigma)),$$
$$\left(0{,}5\,\nu^{-1/2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)\hat{c}_1 - \left(1 + \sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\hat{c}_2 = -\frac{a(\sigma)}{1+\nu}(2 + H_0(\sigma)).$$

Ее определитель имеет вид

$$\Delta(\sigma) = \nu^{-1/2}\left(\left(1 + \sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \sin\frac{\varphi}{2}\left(0{,}5\,\nu^{-1/2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)\right).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\Delta(\sigma) > 0$. Тогда

$$\hat{c}_1 = \Delta^{-1}(\sigma)\begin{vmatrix} -\dfrac{a(\sigma)(1+H_0(\sigma))}{1+\nu} & \nu^{-1/2}\sin\dfrac{\varphi}{2} \\ -\dfrac{a(\sigma)(2+H_0(\sigma))}{2(1+\nu)} & -\left(1+\sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)\end{vmatrix},$$

$$\hat{c}_2 = \Delta^{-1}(\sigma)\begin{vmatrix} -\nu^{-1/2}\left(1+\sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\dfrac{\varphi}{2}\right) & -\dfrac{a(\sigma)(1+H_0(\sigma))}{1+\nu} \\ 2\nu^{-1/2}-\sin\dfrac{\varphi}{2} & -\dfrac{a(\sigma)(2+H_0(\sigma))}{2(1+\nu)}\end{vmatrix}.$$

Так как на поверхности (24) осуществляется переход от i) к ii), то условия (32) следует дополнить условием

$$\hat{p}_1(+0,\sigma) = \hat{p}_1(-0,\sigma) = 0. \tag{34}$$

Отсюда находим

$$H_0(\sigma) = -2\left[1{,}5 + \sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2} - \nu^{1/2}\sin\frac{\varphi}{2}\right]\left[2\nu^{3/2}\Delta(\sigma) + \right.$$

$$\left. + 1 + \sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2} + 2\nu^{1/2}\left(0{,}5\,\nu^{-1/2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]^{-1},$$

которое конечно $\forall\, \nu \in (0,\infty)$, так как

$$\frac{1}{2\sqrt{\nu}} - \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} > 0.$$

***Замечание* 3.** i) Пусть $\tau - \varepsilon H_0(\sigma) = O(\varepsilon)$. При $\tau - \varepsilon H_0(\sigma) > 0$ из (7) – (10), (30), (31) имеем

$$(-\varepsilon^2\Delta_x + I)\,\hat{y}(\eta, \sigma - f(x) = f(0,\sigma) + \tau\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau} - f(x) = O(\varepsilon^2),$$

т. е. в $\Omega_+\cap\Gamma$ первый множитель в (9) является малым, а равенство (10) выполняется с той же точностью, так как

$$(-\varepsilon^2\Delta_x + I)(\varepsilon\hat{p}_1(\tau\varepsilon^{-1} - H_0(\sigma),\sigma)) - f(0,\sigma) - \varepsilon\hat{y}_1(\tau\varepsilon^{-1} - H_0(\sigma),\sigma) + z(x) =$$

$$= a(\sigma)\tau - f(0,\sigma) - \tau\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau} + z(x) = \frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}\tau -$$

$$-f(0,\sigma) + z(0,\sigma) + \frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}\tau + O(\varepsilon^2),$$

Кроме того, из (30) имеем

$$p(\eta,\sigma) = a(\sigma)\tau + 0{,}5\,c_1(\sigma)(\tau - \varepsilon H_0(\sigma))\exp\left(-\frac{\tau - \varepsilon H_0}{\varepsilon}\right) +$$

$$+ \varepsilon\, c_2(\sigma)\exp\left(-\frac{\tau - \varepsilon H_0}{\varepsilon}\right) > 0,$$

так как из $H_0(\sigma) < 0$, $\hat{c}_i(\sigma) > 0$, $i = \overline{1,2}$, следует, что $c_i(\sigma) > 0$.

ii) При $\tau - \varepsilon H_0(\sigma) < 0$ из (7)–(10) и (30), (31) получаем

$$(-\varepsilon^2\Delta_x + I)\,\hat{y}(\eta,\sigma) - f(x) + \nu^{-1}\hat{p}_1(\tau\varepsilon^{-1} - H_0(\sigma),\sigma) =$$

$$= (1+\nu)^{-1}\left(\nu\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau} + \frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}\right)\tau - \frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}\tau + \frac{\tau}{1+\nu}a(\sigma) + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2),$$

а уравнение (10) удовлетворяет с той же точностью.

В окрестности $\Omega_- \cap \Gamma$ должно выполняться неравенство $u > 0$. Действительно, так как в $\Omega_- \cap \Gamma$ $p + \nu u = 0$, то надо убедиться, что $p < 0$,

$$p = \nu(1+\nu)^{-1}a(\sigma)\tau + \varepsilon\exp\left(\sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}\,\frac{\tau-\varepsilon H_0}{\varepsilon}\right)\times$$

$$\times\left(\hat{c}_1(\sigma)\sin\left(\sin\frac{\varphi}{2}\,\frac{\tau-\varepsilon H_0}{\varepsilon}\right) + \hat{c}_2(\sigma)\cos\left(\sin\frac{\varphi}{2}\,\frac{\tau-\varepsilon H_0}{\varepsilon}\right)\right) < 0,$$

откуда и следует требуемое неравенство для достаточно малых ε.

4. Полное асимптотическое разложение. Далее обратимся к методу составных асимптотических разложений [4, с. 767]. Асимптотическое решение с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$ будем искать в виде

$$y^{(n)}(\varepsilon, x) = X_1^{(n)}(\varepsilon, x)\sum\nolimits_{j=0}^{n}\varepsilon^j\bar{y}_j(x) + X_2(\varepsilon, x)\sum\nolimits_{j=0}^{n}\varepsilon^j\tilde{y}_j(-\varepsilon^{-1}\bar{\nabla}, s) +$$

$$+ X_3(x)\sum\nolimits_{j=0}^{n}\varepsilon^j\hat{y}_j^*(\varepsilon^{-1}\tau - \mathcal{B}^{(n)}(\varepsilon,\sigma),\sigma), \tag{35}$$

$$p^{(n)}(\varepsilon, x) = X_1^{(n)}(\varepsilon, x)\sum\nolimits_{j=0}^{n}\varepsilon^j\bar{p}_j(x) + X_2(\varepsilon, x)\sum\nolimits_{j=0}^{n}\varepsilon^j\tilde{p}_j(-\varepsilon^{-1}\bar{\nabla}, s) +$$

$$+ X_3(x)\sum\nolimits_{j=1}^{n}\varepsilon^j\hat{p}_j^*(\varepsilon^{-1}\tau - \mathcal{B}^{(n)}(\varepsilon,\sigma),\sigma), \tag{36}$$

где $\mathcal{B}^{(n)}$ — частичная сумма ряда (25) вида

$$\mathcal{B}^{(n)}(\varepsilon,\sigma) = \sum\nolimits_{j=0}^{n-1}\varepsilon^j H_j(\sigma); \tag{37}$$

$\bar{y}_j(x)$, $\bar{p}_j(x)$ при $j = 2k$ определяются формулами (14), (16) в Ω_+ и из системы (17) в Ω_- при $j = 2k+1$, $\bar{y}_j = \bar{p}_j = 0$; функции $\tilde{y}_j$, $\tilde{p}_j$, имеющие свойства погранслоя (см. (23)), определяются решением задач Коши (19), (20), $X_1^{(n)}(\varepsilon, x)$, $X_2(\varepsilon, x)$, $X_3(x)$ — срезающие функции, определяемые следующими равенствами: $X_1^{(n)}(\varepsilon, x) = 1$ в $\Omega\setminus\Gamma$, $X_1^{(n)}(\varepsilon, x) = 1 - \chi(\varepsilon^{-1}\tau - \mathcal{B}^{(i)})$ в Γ, $X_2(\varepsilon, x) = 0$ в $\Omega\setminus\Xi$, $X_2(\varepsilon, x) = \chi(\varepsilon^{-1}\bar{\nabla})$ в Ξ, $X_3(x) = 0$ вне Γ, $X_3(x) = \chi(\tau)$ в Γ. Решения типа внутреннего погранслоя $\hat{y}_j^*(\eta,\sigma)$, $\hat{p}_j^*(\eta,\sigma)$ должны быть согласованы с функциями $\bar{y}_j$, $\bar{p}_j$ на границе Γ и иметь свойство $\hat{y}_j^*(|\eta|,\sigma) = \hat{p}_j^*(|\eta|,\sigma) = O(\exp(-\delta|\eta|))$, $|\eta|\to\infty$, $\delta\in(0, 1)$. Выше через χ обозначена функция из $C_0^\infty(R^1)$, равная единице вблизи нуля и имеющая малый носитель, принадлежащий соответственно Ξ и Γ.

Вычисляя невязку, которая остается в уравнениях (9), (10) от первых слагаемых в (35), (36) при $n = \infty$, получаем, что для функций $\hat{y}_p^*$, $\hat{p}_p^*$ должны выполняться равенства: *а*) для $\eta > 0$

$$-\frac{\partial^2\hat{y}_j^*}{\partial\eta^2} + \hat{y}_j^* = -\sum_{k=1}^{j}\mathfrak{N}_k\left(\eta,\sigma,\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\hat{y}_j^* +$$

$$+ \chi(\eta)\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(j-k)!}\frac{\partial^{(j-k)}\bar{y}_k(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(j-k)}} - \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(\chi(\eta)\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(j-k)!}\frac{\partial^{(j-k)}\bar{y}_k(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(j-k)}}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{j}\sum_{p=0}^{j-k}\mathfrak{N}_k\Big(\eta,\sigma,\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big)\Big((p!)^{-1}\chi(\eta)\frac{\partial^{(p)}\overline{y}_{j-k-p}(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(p)}}\Big),$$

$$-\frac{\partial^2\hat{p}_j^*}{\partial\eta^2}+\hat{p}_j^*=-\sum_{k=1}^{j}\mathfrak{N}_k\Big(\eta,\sigma,\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big)\hat{p}_{j-k}^*+\hat{y}_j^*+\chi(\eta)\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(j-k)!}\times \tag{38}$$

$$\times\Big[\frac{\partial^{(j-k)}\overline{p}_k(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(j-k)}}-\frac{\partial^{(j-k)}\overline{y}_k(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(j-k)}}\Big]-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big(\chi(\eta)\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(j-k)!}\frac{\partial^{(j-k)}\overline{p}_k(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(j-k)}}\Big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{j}\sum_{p=0}^{j-k}\mathfrak{N}_k\Big(\eta,\sigma,\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big)\Big((p!)^{-1}\chi(\eta)\frac{\partial^{(p)}\overline{p}_{j-k-p}(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(p)}}\Big),\quad j\ge 0,\ \hat{p}_j^*(\eta,\sigma)=0;$$

в) для $\eta<0$ имеем

$$-\frac{\partial^2\hat{y}_j^*}{\partial\eta^2}+\hat{y}_j^*+\nu^{-1}\hat{p}_j^*=-\sum_{k=1}^{j}\mathfrak{N}_k\Big(\eta,\sigma,\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big)\hat{y}_{j-k}^*+$$

$$+\chi(\eta)\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(j-k)!}\frac{\partial^{(j-k)}\overline{y}_k(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(j-k)}}+\frac{\chi(\eta)}{\nu}\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(j-k)!}\frac{\partial^{(j-k)}\overline{p}_k(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(j-k)}}-$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big(\chi(\eta)\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(j-k)!}\frac{\partial^{(j-k)}\overline{y}_k(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(j-k)}}\Big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{j}\sum_{p=0}^{j-k}\mathfrak{N}_k\Big(\eta,\sigma,\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big)\Big((p!)^{-1}\chi(\eta)\frac{\partial^{(p)}\overline{y}_{j-k-p}(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(p)}}\Big),$$

$$-\frac{\partial^2\hat{p}_j^*}{\partial\eta^2}+\hat{p}_j^*=-\sum_{k=1}^{j}\mathfrak{N}_k\Big(\eta,\sigma,\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big)\hat{p}_{j-k}^*+\hat{y}_j^*+\chi(\eta)\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(j-k)!}\times \tag{39}$$

$$\times\Big[\frac{\partial^{(j-k)}\overline{p}_k(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(j-k)}}-\frac{\partial^{(j-k)}\overline{y}_k(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(j-k)}}\Big]-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big(\chi(\eta)\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(j-k)!}\frac{\partial^{(j-k)}\overline{p}_k(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(j-k)}}\Big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{j}\sum_{p=0}^{j-k}\mathfrak{N}_k\Big(\eta,\sigma,\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big)\Big((p!)^{-1}\chi(\eta)\frac{\partial^{(p)}\overline{p}_{j-k-p}(0,\sigma)}{\partial\varepsilon^{(p)}}\Big),\quad j\ge 0,\ \hat{p}_j^*(\eta,\sigma)=0.$$

Замечания. 4. Далее при вычислении правых частей систем (38), (39) следует учитывать асимптотическое равенство $\chi'(\eta)=0$.

5. Вычислим производные $\partial^{(j)}\overline{y}_k(0,\sigma)/\partial\varepsilon^{(j)}$, $\partial^{(j)}\overline{p}_k(0,\sigma)/\partial\varepsilon^{(j)}$, содержащиеся в правых частях систем (38), (39) для функции $\overline{y}_k(\tau,\sigma)$

$$\frac{\partial\overline{y}_k(\tau,\sigma)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{\partial\overline{y}_k(\tau,\sigma)}{\partial\tau}\,(\eta+\mathcal{B}^{(n)}(\varepsilon,\sigma)+\varepsilon\,(\mathcal{B}^{(n)}(\varepsilon,\sigma))'\,\Big|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\frac{\partial\overline{y}_k(0,\sigma)}{\partial\tau}\,(\eta+H_0(\sigma)).$$

Отсюда по индукции нетрудно получить формулу

$$\frac{\partial^{(j)}\overline{y}_k(0,\sigma)}{\partial\tau}=M_{jk}(\eta,\sigma,H_0,\ldots,H_{j-2})+\ j!\,\frac{\partial\overline{y}_k(0,\sigma)}{\partial\tau}\,H_{j-1}(\sigma). \tag{40}$$

Покажем как связаны между собой решения систем (28), (29) с решением соответствующих систем (38), (39). При $j=0$ из (38), (39) находим $\hat{y}_0(\eta,\sigma)=$ $=\chi(\eta)f(0,\sigma)$, $\eta\in R^1$. При $j=1$ из тех же систем имеем

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial^2\hat{y}_1^*}{\partial\eta^2}+\hat{y}_1^*=\Big(\chi(\eta)-\frac{\partial^2\chi(\eta)}{\partial\eta^2}\Big)(\eta+H_0(\sigma))\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau},\\
-\frac{\partial^2\hat{p}_1^*}{\partial\eta^2}+\hat{p}_1^*=\hat{y}_1^*-\Big(\chi(\eta)-\frac{\partial^2\chi(\eta)}{\partial\eta^2}\Big)(\eta+H_0(\sigma))\frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}-\\
-\frac{\partial^2\chi(\eta)}{\partial\eta^2}\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}(\eta+H_0(\sigma)),\quad \eta>0;
\end{gathered}\tag{41}
$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial^2\hat{y}_1^*}{\partial\eta^2}+\hat{y}_1^*+\nu^{-1}\hat{p}_1^*=\Big(\chi(\eta)-\frac{\partial^2\chi(\eta)}{\partial\eta^2}\Big)(\eta+H_0(\sigma))(1+\nu)^{-1}\Big(\nu\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}+\\
+\frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}\Big)+\chi(\eta)(1+\nu)\Big(\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}-\frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}\Big)(\eta+H_0(\sigma)),\\
-\frac{\partial^2\hat{p}_1^*}{\partial\eta^2}+\hat{p}_1^*=\hat{y}_1^*-\chi(\eta)\frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}(\eta+H_0(\sigma))-\\
-\frac{\partial^2\chi(\eta)}{\partial\eta^2}\nu(1+\nu)^{-1}(\eta+H_0(\sigma))a(\sigma),\quad \eta<0.
\end{gathered}\tag{42}
$$

Сравнивая (28), (29) с (41), (42), находим

$$
\begin{gathered}
\hat{y}_1^*(\eta,\sigma)=\hat{y}_1(\eta,\sigma)-(1-\chi(\eta))\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}(\eta+H_0(\sigma)),\\
\hat{p}_1^*(\eta,\sigma)=\hat{p}_1(\eta,\sigma)-(1-\chi(\eta))\Big(\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}-\frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}\Big)(\eta+H_0(\sigma)),\quad \eta>0;\\
\hat{y}_1^*(\eta,\sigma)=\hat{y}_1(\eta,\sigma)-(1-\chi(\eta))(1+\nu)^{-1}\Big(\nu\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}+\frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}\Big)(\eta+H_0(\sigma)),\\
\hat{p}_1^*(\eta,\sigma)=\hat{p}_1(\eta,\sigma)-(1-\chi(\eta))(1+\nu)^{-1}\nu\, a(\sigma)(\eta+H_0(\sigma)).
\end{gathered}
$$

При этом функции $\hat{y}_1^*(\eta,\sigma)$, $\hat{p}_1^*(\eta,\sigma)$ обладают свойствами погранфункций, а $H_0(\sigma)$ находится из условий (32), (34). Возможность построения отрезка ряда (37) вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть* $f(x)$, $z(x)\in C^\infty(\Omega)$, $a(\sigma)>0$, $-\varepsilon^2\Delta z+z\neq f$; тогда (38), (39) *— рекуррентные последовательности систем — разрешимы, их решения экспоненциально стремятся к нулю при* $|\eta|\to\infty$; *при каждом* j *решения зависят от* $H_0,\ldots,H_{j-1}$, *составляющих коэффициенты ряда* (37), *а* H_{j-1} *находится из условий* $\hat{y}_j^*(\eta,\sigma)$, $\hat{p}_j^*(\eta,\sigma)\in C^1(R^1)$ $\forall\,\sigma$, $\hat{p}_j^*(0,\sigma)=0$.

Доказательство проведем по индукции. При $j=1$ утверждение доказано. Будем считать его верным для всех индексов, меньших j. Тогда с учетом (40) из (38), (39) получим

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial^2\hat{y}_j^*}{\partial\eta^2}+\hat{y}_j^*=\Big(\chi(\eta)-\frac{\partial^2\chi(\eta)}{\partial\eta^2}\Big)\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}H_{j-1}(\sigma)+\tilde{\mathcal{N}}_j(\eta,\sigma,\chi(\eta),H_0,\ldots,H_{j-2}),\\
\frac{\partial^2\hat{p}_j^*}{\partial\eta^2}+\hat{p}_j^*-\hat{y}_j^*=-\Big(\chi(\eta)-\frac{\partial^2\chi(\eta)}{\partial\eta^2}\Big)\frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}H_{j-1}(\sigma)-
\end{gathered}\tag{43}
$$

$$-\frac{\partial^2\chi(\eta)}{\partial\eta^2}\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}H_{j-1}(\sigma)+\tilde{\mathcal{K}}_j(\eta,\sigma,\chi(\eta),H_0,\ldots,H_{j-2}),\quad \eta>0;$$

$$-\frac{\partial^2\hat{y}_j^*}{\partial\eta^2}+\hat{y}_j^*+\nu^{-1}\hat{p}_j^*=\Big(\chi(\eta)-\frac{\partial^2\chi(\eta)}{\partial\eta^2}\Big)H_{j-1}(\sigma)(1+\nu)^{-1}\Big(\nu\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}+$$

$$+\frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}\Big)+\chi(\eta)(1+\nu)^{-1}a(\sigma)H_{j-1}(\sigma)+\mathcal{N}_j(\eta,\sigma,\chi(\eta),H_0,\ldots,H_{j-2}),$$

$$-\frac{\partial^2\hat{p}_j^*}{\partial\eta^2}+\hat{p}_j^*=\hat{y}_j^*-\chi(\eta)\frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}H_{j-1}(\sigma)- \tag{44}$$

$$-\frac{\partial^2\chi(\eta)}{\partial\eta^2}\nu(1+\nu)^{-1}a(\sigma)H_{j-1}(\sigma)+\mathcal{K}_j(\eta,\sigma,\chi(\eta),H_0,\ldots,H_{j-2}),\quad \eta<0.$$

где $\tilde{\mathcal{N}}_j(\cdot)$, $\mathcal{N}_j(\cdot)$, $\tilde{\mathcal{K}}_j(\cdot)$, $\mathcal{K}_j(\cdot)$ — функции, представляющие собой линейные комбинации функций, умноженных на индикатор, либо производные от него, и полиномов, умноженных на экспоненты с отрицательным показателем.

Решения систем (43), (44) имеют вид (см. (30), (31))

$$\hat{y}_j^*(\eta,\sigma)=\chi(\eta)\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}H_{j-1}(\sigma)+\tilde{n}_j(\eta,\sigma,\chi(\eta),H_0,\ldots,H_{j-2})+c_{1j}(\sigma)\exp(-\eta),$$

$$\hat{p}_j^*(\eta,\sigma)=\chi(\eta)a(\sigma)H_{j-1}(\sigma)+\tilde{k}_j(\eta,\sigma,\chi(\eta),H_0,\ldots,H_{j-2})+$$

$$+(c_{1j}(\sigma)\,0{,}5\,\eta+c_{2j}(\sigma))\exp(-\eta),\quad \eta>0;$$

$$\hat{y}_j^*(\eta,\sigma)=\chi(\eta)(1+\nu)^{-1}\Big(\nu\frac{\partial f(0,\sigma)}{\partial\tau}+\frac{\partial z(0,\sigma)}{\partial\tau}\Big)H_{j-1}(\sigma)+$$

$$+n_j(\eta,\sigma,\chi(\eta),H_0,\ldots,H_{j-2})+\nu^{-1/2}\exp\Big(\sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\times$$

$$\times\cos\frac{\varphi}{2}\eta\Big)\Big(\hat{c}_{1j}(\sigma)\cos(\sin\frac{\varphi}{2}\eta)-\hat{c}_{2j}(\sigma)\sin(\sin\frac{\varphi}{2}\eta)\Big),$$

$$\hat{p}_j^*(\eta,\sigma)=\nu\chi(\eta)(1+\nu)^{-1}a(\sigma)H_{j-1}(\sigma)+k_j(\eta,\sigma,\chi(\eta),H_0,\ldots,H_{j-2})+$$

$$+\exp\Big(\sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}\eta\Big)\Big(\hat{c}_{1j}(\sigma)\sin(\sin\frac{\varphi}{2}\eta)+\hat{c}_{2j}(\sigma)\cos(\sin\frac{\varphi}{2}\eta)\Big),\quad \eta<0.$$

Так как $\hat{y}_j^*(\eta,\sigma), \hat{p}_j^*(\eta,\sigma)\in C^1(R^1)$ $\forall\,\sigma$, то получаем систему

$$c_{1j}-\nu^{-1/2}\hat{c}_{1j}=-a(\sigma)H_{j-1}(\sigma)/(1+\nu)+N_j(0,\sigma,\chi(0),H_0,\ldots,H_{j-2}),$$

$$-c_{1j}-\nu^{-1/2}\sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}\hat{c}_{1j}+\nu^{-1/2}\sin\frac{\varphi}{2}\hat{c}_{2j}=N_j'(0,\sigma,\chi(0),H_0,\ldots,H_{j-2}),$$

$$c_{2j}-\hat{c}_{2j}=-\frac{a(\sigma)}{1+\nu}H_{j-1}(\sigma)+K_j(0,\sigma,\chi(0),H_0,\ldots,H_{j-2}), \tag{45}$$

$$0{,}5\,c_{1j}-\hat{c}_{2j}-\sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}\hat{c}_{2j}+\sin\frac{\varphi}{2}\hat{c}_{1j}=K_j'(0,\sigma,\chi(0),H_0,\ldots,H_{j-2}),$$

где

$$N_j(\eta,\sigma,\chi(\eta),H_0,\ldots,H_{j-2})=n_j(\eta,\sigma,\chi(\eta),H_0,\ldots,H_{j-2})-$$

$$-\tilde{n}_j(\eta,\sigma,\chi(\eta),H_0,\ldots,H_{j-2}),$$

$$K_j(\eta, \sigma, \chi(\eta), H_0, \ldots, H_{j-2}) = k_j(\eta, \sigma, \chi(\eta), H_0, \ldots, H_{j-2}) -$$
$$- \tilde{k}_j(\eta, \sigma, \chi(\eta), H_0, \ldots, H_{j-2}).$$

Из (45) имеем

$$c_{1j} = \nu^{-1/2}\hat{c}_{1j} - \frac{a(\sigma)}{1+\nu}H_{j-1} + N_j(0,\cdot),\ c_{2j} = \hat{c}_{2j} - \frac{a(\sigma)}{1+\nu}H_{j-1} + K_j(0,\cdot),$$

а коэффициенты $\hat{c}_{1j}$, $\hat{c}_{2j}$ находим из системы $\left(17\right)$

$$-\nu^{-1/2}\left(1 + \sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\hat{c}_{1j} + \nu^{-1/2}\sin\frac{\varphi}{2}\hat{c}_{2j} = -\frac{a(\sigma)}{1+\nu}H_{j-1} + N'_j(0,\cdot) + N_j(0,\cdot),$$

$$\left(0{,}5\,\nu^{-1/2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)\hat{c}_{1j} - \left(1 + \sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\hat{c}_{2j} =$$
$$= -\frac{a(\sigma)}{1+\nu}H_{j-1} + K'_j(0,\cdot) + K_j(0,\cdot) - \frac{1}{2}N_j(0,\cdot),$$

которая разрешима. Тогда из $\hat{p}_j^*(\eta, \sigma) = 0$ имеем

$$H_{j-1}(\sigma) = 2\sqrt{\nu}\,(1+\nu)a^{-1}(\sigma)\Big[2\nu^{3/2}\Delta(\sigma) + 1 + \sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2} +$$
$$+ 2\sqrt{\nu}\left(0{,}5\,\nu^{-1/2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)\Big]^{-1}\Big[-(\tilde{k}_j(0,\cdot) + K_j(0,\cdot))\Delta(\sigma) +$$
$$+ \nu^{-1/2}\left(1 + \sqrt[4]{1+\nu^{-1}}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left(K'_j(0,\cdot) + K_j(0,\cdot) - \frac{1}{2}N_j(0,\cdot)\right) +$$
$$+ \left(0{,}5\,\nu^{-1/2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)(N'_j(0,\cdot) + N_j(0,\cdot))\Big].$$

Отсюда следует, что $H_{j-1}(\sigma) \in C^\infty(\Gamma)\ \forall\ \nu \in (0, \infty)$. Лемма доказана.

5. Обоснование асимптотических разложений. Определим асимптотическое представление оптимального управления

$$u^{(n)}(x) = -\varepsilon^2\,\Delta y^{(n)}(x) + y^{(n)}(x) - f(x). \tag{46}$$

По построению $u^{(n)}(x) \in V$. Тогда из (5) при $v = u^{(n)}(x)$ получим неравенство

$$\varepsilon^4(\Delta y(u), \Delta(y^{(n)}(u) - y(u))) + 2\varepsilon^2(\nabla y, \nabla(y^{(n)}(u) - y(u))) +$$
$$+ \varepsilon^2(f, \Delta(y^{(n)}(x) - y(u))) + ((1+\nu)\nu^{-1}y(u) - \nu^{-1}z(x) - f(x),\ y^{(n)}(x) - y(u)) \geq 0.$$

Функция $y^{(n)}(x)$ удовлетворяет в $\overline{\Omega}$ соотношениям (7)–(11). Поэтому справедливо неравенство

$$\varepsilon^4(\Delta y^{(n)}(x), \Delta(y(v) - y^{(n)}(x))) + 2\varepsilon^2(\nabla y^{(n)}(x), \nabla(y(v) - y^{(n)}(x))) + \varepsilon^2(f +$$
$$+ f^{(n)},\ \Delta(y(v) - y^{(n)}(x))) + ((1+\nu)\nu^{-1}\,y^{(n)}(x) - \nu^{-1}\,z(x) -$$
$$- f(x) + f^{(n)}(x, \varepsilon) + \nu^{-1}\,z^{(n)}(x, \varepsilon),\ y(v) - y^{(n)}(x)) \geq 0, \tag{47}$$

где $f^{(n)}(x, \varepsilon), z^{(n)}(x, \varepsilon)$ — невязка асимптотических решений, которые имеют вид: в области $\Omega^+_{n,\varepsilon} = (\Omega_+ \setminus \Gamma) \cup \{x \in \Gamma\colon\ \tau > \mathcal{B}^{(n)}(\varepsilon, \sigma)\}$

$$-\varepsilon^2\,\Delta y^{(n)}(x) + y^{(n)}(x) - f = f^{(n)}(x, \varepsilon),$$

$$-\varepsilon^2\,\Delta p^{(n)}(x) + p^{(n)}(x) = y^{(n)}(x) - z(x) + z^{(n)}(x, \varepsilon);\quad p^{(n)}(x) > 0;$$

в области $\Omega^-_{n,\varepsilon} = \Omega \setminus \overline{\Omega}^+_{n,\varepsilon}$

$$p^{(n)}(x) + \nu\,(-\varepsilon^2\,\Delta y^{(n)}(x) + y^{(n)}(x) - f - f^{(n)}(x,\varepsilon)) = 0,$$

$$-\varepsilon^2\,\Delta p^{(n)}(x) + p^{(n)}(x) = y^{(n)}(x) - z + z^{(n)}(x,\varepsilon), \quad u^{(n)}(x) > 0;$$

причем $\|f^{(n)}(x,\varepsilon)\| \le c\varepsilon^{n+1}$, $\|z^{(n)}(x,\varepsilon)\| \le c\varepsilon^{n+1}$. Полагая в (47) $y = y(u)$ и складывая его с предыдущим неравенством, получаем соотношение

$$\varepsilon^4\,\|\Delta(y(u) - y^{(n)}(x))\|^2 + 2\varepsilon^2\,\|\nabla(y(u) - y^{(n)}(x))\|^2 + \frac{1+\nu}{\nu}\|y(u) -$$

$$- y^{(n)}(x)\|^2 \le \|\nu^{-1} z^{(n)} + f^{(n)}\|\,\|y(u) - y^{(n)}\| + \varepsilon^2\,\|f^{(n)}\|\,\|\Delta(y(u) - y^{(n)})\|. \tag{48}$$

Из (48), (4), (46) стандартно получаем неравенства

$$\varepsilon^2\,\|\Delta(y(u) - y^{(n)})\| + \varepsilon\,\|\nabla(y(u) - y^{(n)})\| + \|y(u) - y^{(n)}\| \le c\varepsilon^{n+1}, \tag{49}$$

$$\varepsilon\,\|\nabla(p(u) - p^{(n)})\| + \|p(u) - p^{(n)}\| \le c\varepsilon^{n+1}, \tag{50}$$

$$\|u(x) - u^{(n)}\| \le c\varepsilon^{n+1}, \tag{51}$$

где c не зависит от ε.

Из [1, с. 527], (4), (51) заключаем, что

$$\mathcal{J}(u^{(n)}) - \mathcal{J}(u) = O(\varepsilon^{2(n+1)}). \tag{52}$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения леммы* 1. *Тогда асимптотические представления задачи* (4) (*или* (1)–(3)) *заданы формулами* (35)–(37), (46) *и справедливы оценки* (49)–(52).

1. *Lions J. L.* Perturbations Singulières dans les Problèmes aux limites et en Contrôle Optimal // Lect. Notes Math. – 1973. – **323**. – 645 p.
2. *Егоров А. И., Михайлова Т. Ф.* Синтез оптимального управления тепловым процессом с ограниченным управлением. 1 // Автоматика. – 1990. – № 3. – С. 57–61.
3. *Егоров А. И., Михайлова Т. Ф.* Синтез оптимального управления тепловым процессом с ограниченным управлением. 2 // Там же. – 1991. – № 4. – С. 31–39.
4. *Назаров С. А.* Асимптотическое решение вариационных неравенств для линейного оператора с малым параметром при старших производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1990. – **54**, № 4. – С. 754–773.
5. *Назаров С. А.* Асимптотическое решение вариационного неравенства, моделирующего трение // Там же. – С. 990–1020.
6. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
7. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 463 с.
8. *Байокки К.. Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
9. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. – М.: Наука, 1989. – 334 с.

Получено 24.07.91