УДК 530. 145 + 519. 21

И.И. Гихман, д-р физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

КВАНТОВАЯ ЧАСТИЦА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СИЛ ТИПА "БЕЛОГО" ШУМА*

Both the Shrödinger equation for the wave function of a particle with the external field interaction potential having a "white" noise type component and the Kolmogorov equations for the wave function distribution are obtained.

Одержані рівняння Шредінгера для хвильової функції частинки, потенціал взаємодії якої з зовнішнім полем має складову типу "білого" шуму, а також рівняння Колмогорова для розподілу хвильової функції.

В настоящей работе рассматривается вопрос о нахождении распределений квантовой частицы, находящейся под воздействием сил типа "белого" шума. Основное отличие предлагаемого подхода от "фейнмановского" [1] состоит в ином выборе координатного пространства для нерелятивистской квантовой частицы. Этот выбор продиктован несколько другой статистической интерпретацией волновой функции.

Допустим, что воздействие "внешних" факторов на квантовую частицу таково, что они могут быть представлены в виде векторной силы $F(t, \omega) = (F_1(t, \omega), \dots , F_n(t, \omega))$, зависящей от случая ω. Тогда потенциал, создаваемый этой силой, равен $V(t, x, \omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i(t, \omega)$. Свойства уравнения Шредингера со случайным потенциалом изучались многими авторами. В работе [1], где внешние силы не имели характер "белого" шума, на физическом уровне показана возможность отыскания среднего значения волновой функции с предварительным усреднением потенциала взаимодействия. Строгим являлось бы доказательство, в котором была бы показана возможность изменения порядка двойного усреднения. Первое из них — усреднение по пространству траектории квантовой частицы, а второе — усреднение по реализациям случайного потенциала. В данной работе приведено решение этой задачи в более общем случае.

Рассмотрим сначала случай свободной частицы. На этом простейшем примере продемонстрируем выбор координатного пространства. Уравнение Шредингера для свободной частицы в n-мерном пространстве R^n имеет вид

$$\frac{\partial\psi(t, x)}{\partial t} = \frac{ih}{2m}\frac{\partial^2\psi(t, x)}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Легко видеть [2], что решение этого уравнения представимо в виде $\psi(t, x) = M\psi_0(x \pm (\frac{ih}{2m})^{1/2}[w(s) - w(t)])$, где $w(t)$ — стандартный действительный винеровский процесс со значениями в R^n, $\psi_0(x) = \psi(s, x)$ — начальное условие в момент времени $s \geq 0$, M — знак математического ожидания. Обозначим

$$\xi(s; t, x) = x \pm \left(\frac{ih}{m}\right)^{1/2}[w(s) - w(t)]. \tag{2}$$

Для удобства случайный процесс $\xi(s; t, x)$ будем понимать как случайный процесс с обращенным временем $s \in [0, t]$. Тогда при фиксированном $s \geq 0$ $\xi(s; s, x) = x$. Из (2) видно, что хотя в момент времени $t \geq s$ траектория $\xi(s; t, x)$ проходит через точку $x = (x_1, \dots , x_n)$ действительного координатного пространства R^n, но уже в последующие моменты времени $s < t$ ее эволюция принадлежит комплексному многообразию $\Gamma_x = \times_{k=1}^{n}\Gamma_{x_k}$. Здесь Γ_{x_k} — прямая в комплексной

*Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

плоскости $z_k = x_k + iy_k$, проходящей через точку $(x_k, 0)$ под углом $\pi/4$ к оси OX_k.

По аналогии с классической физикой квантовый случайный процесс $\xi(s;\, t, x)$ представляет собою характеристику уравнения (1), вдоль которой меняется "макропараметр" ψ, определяющий все динамические параметры квантовой системы. При этом носителем распределений $\xi(\,\cdot\,)$ является комплексное многообразие Γ_x. Учитывая это замечание, будем называть случайный процесс $\xi(\cdot)$ квантовой траекторией или квантовой эволюцией частицы. Легко видеть, что случайный процесс $\xi(s;\, t, x)$ является марковским в комплексном многообразии Γ_x, а соответствующую ему меру легко построить с помощью теоремы Колмогорова на пространстве функций со значениями в Γ_x [2]. В дальнейшем будем предполагать, что силы, действующие на квантовую частицу, имеют вид $F(t, \omega) = f(t) + g(t)\dot{\beta}(t)$, где $f(t)$, $g(t)$ — заданные неслучайные векторные функции, а $\beta(t)$ — одномерный винеровский процесс, не зависящий от винеровского процесса $w(t)$. Рассмотрим функционал

$$\Psi(t, z) = M\left\{\Psi_0(\xi(0;\, t, z))\exp\frac{i}{h}\left[\int_0^t f(s)\xi(s;\, t, z)ds + \int_0^t g(s)\xi(s;\, t, z)d\overleftarrow{\beta}(s)\right] \mid \mathcal{F}^{\beta}_{(0,t]}\right\}. \tag{3}$$

Здесь $z = x + iy$, где $x, y \in R^n$; $\Psi_0(\,\cdot\,)$ — неслучайная измеримая комплексная функция, удовлетворяющая условию $\int |\Psi_0(x + i0)|^2 dx = 1$. Интеграл по мере $d\overleftarrow{\beta}$ в равенстве (3) понимается как обратный стохастический интеграл Ито, $\mathcal{F}^{\beta}_{[0,t]} = \mathcal{F}^{\beta}_t$ — минимальная σ-алгебра, порожденная приращениями $\beta(s)$ на $[0, t]$, $M\{\eta \mid \mathcal{F}\}$ — условное математическое ожидание случайной величины η относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$.

Приведем некоторые пояснения относительно возможности представления волновой функции в виде (3). Учитывая возможность использования квантового процесса $\xi(\cdot)$ для вероятностного представления, замечаем, что случайность, обусловленная потенциалом, может сохраниться в уравнении Шредингера тогда и только тогда, когда потенциал и процесс $\xi(\,\cdot\,)$ взаимнонезависимы. В этом случае решение уравнения Шредингера можно представить в виде условного математического ожидания относительно σ-алгебры, порожденной случайным потенциалом.

Перейдем к получению уравнения Шредингера для волновой функции (3), к проверке для нее условия нормировки и к выводу обратного уравнения Колмогорова для распределений функционала (3).

Утверждение 1. *Допустим, что неслучайные векторные функции $f(t)$, $g(t)$ непрерывны по t, а $\Psi_0(z)$ — аналитична по переменной z. Тогда функция $\Psi(t, z)$ с вероятностью 1 непрерывна по t и аналитична по переменной z.*

Действительно, с помощью стандартных методов стохастических дифференциальных уравнений [3] легко проверяется, что $\partial\Psi(t, z)/\partial\bar{z} \equiv 0$ с вероятностью 1, что и доказывает аналитичность функции $\Psi(\,\cdot\,)$. Затем, учитывая непрерывность по t σ-алгебры $\mathcal{F}^{\beta}_t$ и выражения, стоящего под знаком условного математического ожидания, убеждаемся в непрерывности по t с вероятностью 1 функционала (3).

С помощью дифференцирования по начальным данным [3] легко видеть, что для любого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\Psi(t, z) = M\left\{\frac{\partial}{\partial z_k}\Psi_0(\xi(0;\, t, z))\exp\frac{i}{h}\int_0^t F(s, \omega)\xi(s;\, t, z)ds + \right.$$

$$+\ \Psi_0(\xi(0;t,z))\Big[\ \exp\frac{i}{h}\int_0^t F(s,\omega)\xi(s;t,z)ds\ \Big]\frac{i}{h}\int_0^t F_k(s,\omega)ds\ \Big\},$$

где $\int_0^t F_k(s,\omega)ds=\int_0^t f_k(s)ds+\int_0^t g_k(s)d\bar{\beta}(s)$. Аналогично вычисляются старшие производные функционала $\Psi(\,\cdot\,)$, которые ввиду их громоздкости здесь не приводятся.

Теорема 1. *Допустим, что неслучайные функции* $f(t)$, $g(t)$, $\Psi_0(z)$ *непрерывны по* $t\ge 0$ *и аналитичны по аргументу* z. *Тогда функция* $\psi(t,x)=\Psi(t,x+i0)$ *является "классическим" решением задачи Коши*

$$\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t}=\frac{ih}{2m}\nabla^2\psi(t,x)+\Big[\ \frac{i}{h}(f(t),x)-\frac{1}{2h^2}(g(t),x)^2\ \Big]\psi(t,x)-\frac{i}{h}(g(t),x)\psi(t,x)\dot{\beta}(t),$$
$$\psi(0,x)\ =\ \Psi_0(x+i0). \tag{4}$$

Под "классическим" решением задачи Коши (4) понимаем дважды непрерывно дифференцируемую в смысле среднего квадратического по x случайную функцию $\psi(t,x,\omega)$, согласованную с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t^{\beta}$, для которой с вероятностью 1 при всех t справедливо равенство

$$\psi(t,x)-\psi(0,x)\ =\ \int_0^t\ \{\,ih(2m)^{-1}\nabla^2\psi(s,x)+[\,ih^{-1}(f(s),x)-$$
$$-\ (2h^2)^{-1}(g(t),x)^2]\psi(s,x)\}ds-ih^{-1}\int_0^t(g(s),x)\psi(s,x)d\beta(s). \tag{5}$$

В равенстве (5) стохастический интеграл Ито имеет обычное течение времени.

Доказательство. Для действительного случая соответствующая техника применялась в работах [4, 5]. Учитывая, что для вывода уравнения (5) эти методы в принципе не изменяются, наметим кратко основные моменты доказательства. Пусть $s=t_0<t_1<\ldots<t_N=t$ — произвольное разбиение отрезка $[s,t]$ и $\lambda=\max(t_k-t_{k-1})$. Используя взаимную независимость процессов $\xi(\,\cdot\,)$ и $\beta(\,\cdot\,)$, непрерывность по t σ-алгебры $\mathcal{F}_t^{\beta}$ и марковское свойство процесса $\xi(s;t,z)$, в фазовом пространстве Γ_z имеем

$$\Psi(t_{k+1},z)-\Psi(t_k,z)\ =\ M\{[\Psi(t_k,\xi(t_k;t_{k+1},z))-$$
$$-\ \Psi(t_k,z)\exp\frac{i}{h}[(f(t_k),z)\Delta t_k-(g(t_k),z)\Delta\beta(t_k)]+$$
$$+\ \Psi(t_k,z)\exp\frac{i}{h}[(f(t_k),z)\Delta t_k-(g(t_k),z)\Delta\beta(t_k)]\,/\,\mathcal{F}^{\beta}_{t_{k+1}}\}-\Psi(t_k,z)+o(\lambda).$$

Используя свойство условной независимости σ-алгебр $\mathcal{F}^{\beta}_{[t_k,t_{k+1})}$ и $\mathcal{F}^{\xi}_{[t_k,t_{k+1})}\vee$ $\vee\ \mathcal{F}^{\beta}_{[0,t_k)}$, аналогично [4, с. 45] получаем

$$\Psi(t_{k+1},z)-\Psi(t_k,z)\ =\ M\{[\xi(t_k;t_{k+1},z)-z]\frac{\partial\Psi(t_k,z)}{\partial z}+$$
$$+\ \frac{1}{2}[\xi(t_k;t_{k+1},z)-z]^*\,\frac{\partial^2\Psi(t_k,z)}{\partial z^2}[\xi(t_k;t_{k+1},z)-z]+$$
$$+\ [ih^{-1}(f(t_k),z)-(2h^2)^{-1}(g(t_k),z)]\Psi(t_k,z)\Delta t_k-$$
$$-\ ih^{-1}(g(t_k),z)\Psi(t_k,z)\Delta\beta(t_k)+o(\lambda)\mid\mathcal{F}^{\beta}_{t_k}\}.$$

Суммируя по всем $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ и переходя к пределу по вероятности при $\lambda \to 0$, имеем

$$\Psi(t, z) - \Psi(s, z) = \int_s^t \left[\frac{ih}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(r, z)}{\partial z^2} + \frac{i}{h}(f(r), z)\Psi(r, z) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2h^2}(g(r), z)^2 \Psi(r, z) \right] dr + \frac{i}{h} \int_s^t (g(r), z)\Psi(r, z) d\beta(r). \tag{6}$$

Полагая здесь $z = x + i0$, $s = 0$ и учитывая, что для аналитической функции $\partial^2\psi / \partial z^2 = \partial^2\psi / \partial x^2$, получаем (5). Строгое доказательство теоремы 1 отличается от приведенного точным выводом оценки для величины $o(\lambda)$. Для этого можно использовать методы, которые применялись в [4]. Докажем единственность решения задачи Коши (6) с одной и той же начальной функцией $\Psi_0(z)$. Нетрудно видеть, что их разность удовлетворяет тому же уравнению с начальной функцией, тождественно равной 0. Повторяя вывод уравнения (6) в обратном порядке, видим, что разность решений $\Psi_1(t, z) - \Psi_2(t, z)$ представима в виде (3), где $\Psi_0(z) \equiv 0$. Отсюда непосредственно вытекает единственность решения. Приведенное доказательство, опирающееся на вероятностные соображения, не использует положительную определенность главной части уравнения.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 $\int |\Psi(t, x)|^2 dx = \int |\Psi_0(x)|^2 dx$ *для любого* $t \geq 0$.

Доказательство. Для удобства перепишем (6) в дифференциальном виде

$$\partial_s \Psi(s, z) = \left[\frac{ih}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(s, z)}{\partial z^2} + \frac{i}{h}(f(t), z)\Psi(s, z) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2h^2}(g(s), z)\Psi(s, z) \right] ds - \frac{i}{h}(g(s), z)\Psi(s, z) d\beta(s),$$

где ∂_t — дифференциал по аргументу t. Отсюда для комплексно сопряженной функции $\overline{\Psi(s, z)}$ имеем

$$\partial_s \overline{\Psi(s, z)} = \left[- \frac{ih}{2m} \overline{\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(s, z)} - \frac{i}{h}(f(s), \bar{z}) \overline{\Psi(s, z)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2h^2}(g(s), \bar{z}) \overline{\Psi(s, z)} \right] ds + \frac{i}{h}(g(s), \bar{z}) \overline{\Psi(s, z)} d\beta(s).$$

Рассматривая в этих равенствах z как параметр, воспользуемся стохастической формулой интегрирования по частям. Тогда

$$\partial_s |\Psi(s, z)|^2 = \overline{\partial_s \Psi(s, z)}\, \Psi(s, z) + \overline{\Psi(s, z)}\, \partial_s \Psi(s, z) +$$

$$+ \partial_s \langle \overline{\Psi(s, z)}, \Psi(s, z) \rangle = \left[\frac{ih}{2m} \overline{\Psi(s, z)} \frac{\partial^2 \Psi(s, z)}{dz^2} + \right.$$

$$\left. + (f(s), z) | \Psi(s, z)|^2 - \frac{(g(s), z)^2}{2h^2} | \Psi(s, z)|^2 \right] ds - \frac{i}{h}(g(s), z) | \Psi(s, z)|^2 d\beta(s) +$$

$$+ \left[- \frac{ih}{2m} \overline{\frac{\partial^2 \Psi(s, z)}{dz^2}} \Psi(s, z) - \frac{i}{h}(f(s), \bar{z}) | \Psi(s, z)|^2 - \frac{1}{2h^2}(g(s), \bar{z}) | \Psi(s, z)|^2 \right] ds +$$

$$+\ \frac{i}{h}(g(s),\bar{z})|\Psi(s,z)|^2 d\beta(s)+\frac{1}{h^2}|(g(s),z)|^2|\Psi(s,z)|^2 ds.$$

В "исходный" момент времени t точка находится на действительной части пространства Z^n. Полагая здесь $z = x + i0$, $\Psi(t,x) = \Psi(t, x + i0)$, сокращая подобные члены и интегрируя по переменной $x \in R^n$ внутри шара S_R радиуса R, получаем

$$\int_{S_R}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t,x)|^2 dx = \frac{ih}{2m}\int_{S_R}\operatorname{div}\left[\overline{\psi}(t,x)\nabla\psi(t,x)-\nabla\overline{\psi}(t,x)\psi(t,x)\right]dx =$$

$$= \frac{ih}{2m}\int_{\partial S_R}\left[\overline{\psi}(t,x)\nabla\psi(t,x)-\nabla\overline{\psi}(t,x)\psi(t,x)\right]_n dS_R,$$

где dS_R — элемент поверхности шара ∂S_R, $[k]_n$ — проекция вектора k на внешнюю нормаль к ∂S_R.

В силу предыдущих предположений заметим, что подынтегральное выражение ограничено и непрерывно по переменным t, x. Выражение в правой части имеет стандартный вид, который получается при проверке сохранения нормировки в случае детерминированного потенциала [6]. Будем полагать выполненными условия, обеспечивающие сходимость к 0 поверхностного интеграла при $R \to \infty$. Таким образом, переходя к пределу при $R \to \infty$, завершаем доказательство теоремы.

Отметим различие уравнения (4) и уравнения Шредингера (в котором потенциал непосредственно заменен функцией типа "белого" шума), заключающееся в том, что уравнение (4) содержит дополнительное слагаемое $\frac{1}{2h^2}(g(t),x)^2\psi(t,x)$. Это слагаемое играет существенную роль при проверке условия нормировки и не является малым с физической точки зрения, так как имеет порядок h^{-2}. В предыдущих построениях использовался переход на действительную часть Z^n, выражающийся в подстановке $z = x + i0$. Этому соответствует предположение, что в начальный момент времени $t = 0$ известна волновая функция $\psi_0(x)$, хотя, по-видимому, это связано с волновой интерпретацией частиц в квантовой механике, при которой начальная фаза волны могла быть положена равной нулю.

В работе [1] показан вывод уравнения Шредингера, исходя из фейнмановского представления волновой функции. Чтобы говорить об эквивалентности подходов, достаточно показать возможность обратного перехода. Для этого надо перейти от волнового уравнения Шредингера к представлению волновой функции в виде функционала от траекторий случайного процесса. Эта идея осуществляется в данной работе, а более подробно эти вопросы для действительных случайных процессов обсуждаются в [2].

Вернемся к задаче (4) и рассмотрим вопрос о нахождении распределений у ее решения. Для этого изучим зависимость решения от начальных данных. Обозначим через $\Psi(t,z;s,\Psi_0)$ волновую функцию $\Psi(t,z)$ при $t \ge s$, для которой $\Psi(s,z) = \Psi_0(z)$. Пусть $\varphi(z)$ и $a(z)$ — неслучайные аналитические функции и $\lambda > 0$. Тогда

$$\frac{1}{\lambda}\{\Psi(t,z;s,\varphi+\lambda a)-\Psi(t,z;s,\varphi)\} =$$

$$= M\left\{a(\xi(s;t,z))\exp\frac{i}{h}\left[\int_s^t f(r)\xi(r;t,z)dr+\int_s^t g(r)\xi(r;t,z)d\bar{\beta}(r)\right] \mid \mathcal{F}^{\beta}_{[s,t]}\right\}. \quad (7)$$

Так как правая часть этого равенства не зависит от λ, то существует предел левой части при $\lambda \to 0$, который обозначим через $\nabla_\varphi \Psi(t, z; s, \varphi)a$. При фиксированных s, t, z имеем

$$|\nabla_\varphi \Psi(t, z; s, \varphi)a|^2 \leq M\,|a(\xi(s; t, z))|^2.$$

Определим гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2$-комплекснозначных функций $a(\cdot)$, определенных на Γ_z, с нормой $\|a\|^2_{\mathfrak{L}_2} = M\,|a(\xi(s; t, z))|^2$. Тогда функционал $\nabla_\varphi \Psi(t, z; s, \varphi)$, зависящий от случая, ограничен при каждом ω:

$$\|\nabla_\varphi \Psi(t, z; s, \varphi)\| = \sup_{\|a\|_{\mathfrak{L}_2} = 1} |\nabla_\varphi \Psi(t, z; s, \varphi)a| \leq 1.$$

Из равенства (7) видно, что $\nabla_\varphi \Psi(\cdot)a$ не зависит от φ и поэтому непрерывен по этой переменной в норме $\mathfrak{L}_2$. Из ограниченности и непрерывности функционала $\nabla_\varphi \Psi(\cdot)$ вытекает [7], что слабая производная, определенная с помощью правой части (7), совпадает с сильной производной Фреше, за которой сохраним прежнее обозначение. Этот вывод справедлив с вероятностью 1 при фиксированных s, t, z. С помощью неравенства Колмогорова, используя гладкость волновой функции, легко показать, что функция $\Psi(t, z; s, \varphi + \lambda a)$, $\lambda > 0$, непрерывна по своим аргументам, поэтому у нее существует непрерывная с вероятностью 1 модификация с общим для всех $\lambda > 0$ множеством сепарабельности. Отсюда вытекает существование модификации у функционала $\nabla_\varphi \Psi(t, z; s, \varphi)$, являющейся сильной производной Фреше с вероятностью 1, для всех t, s, z, φ одновременно. Учитывая это, можно непосредственно дифференцировать по аргументу φ уравнение (6), где $\Psi(s, z) = \varphi(z)$. При этом в силу непрерывности и ограниченности с вероятностью 1 смешанных частных производных по z и φ можно изменить порядок дифференцирования $\nabla_\varphi [\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi]a = \frac{\partial^2}{\partial z^2}[\nabla_\varphi \Psi(\cdot)a]$. Затем в силу непрерывности и ограниченности функционала $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla_\varphi \Psi$ на аналитических функциях $a(\cdot)$ из $\mathfrak{L}_2$ выполняется

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla_\varphi \Psi(t, z; s, \varphi)a = [\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla_\varphi \Psi(t, z; s, \varphi)]a.$$

Таким образом, из (6) имеем

$$\nabla_\varphi \Psi(t, z; s, \varphi) = \mathrm{I} + \int_s^t \left\{ \frac{ih}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla_\varphi + \frac{i}{h}(f(r), z) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2h^2}(g(r), z)^2 \right\} \Psi(r, z; s, \varphi)dr - \frac{i}{h}\int_s^t (g(r), z)\Psi(r, z; s, \varphi)d\beta(r).$$

Отсюда, в частности, положив $z = x + i0$, получаем уравнение для решения уравнения Шредингера $\psi(t, x) = \Psi(t, x + i0)$. Рекуррентным образом определяется билинейный функционал $\nabla^2_\varphi \Psi$:

$$\nabla^2_\varphi \Psi(t, z; s, \varphi)(a, b) = \nabla_\varphi [\nabla_\varphi \Psi(t, z; s, \varphi)a]b$$

в пространстве $\mathfrak{L}_2$. Непосредственная проверка показывает, что $\nabla^2_\varphi \Psi(t, z; s, \varphi) = 0$. Пусть $F(z)$ — неслучайная функция. Полагаем $\Phi(s, \varphi) = MF(\Psi(t, z; s, \varphi))$.

Утверждение 2. *Пусть* $F(z)$, $\varphi(z)$, $z \in Z^n$, *— аналитические функции, а* $f(t)$, $g(t)$ *— непрерывные по* t *функции и*

$$M\{|F'(\Psi(T, z; s, \varphi))| + |F''(\Psi(T, z; s, \varphi))|\} < \infty.$$

Тогда функционал $\Phi(s, \varphi)$ *дважды, в сильном смысле, дифференцируем по* φ.

Доказательство. Учитывая сильную дифференцируемость функционала Ψ по φ, для любых аналитических функций a и b непосредственно получаем

$$\nabla_\varphi \Phi(s, \varphi)a = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}[\Phi(s, \varphi + \lambda a) - \Phi(s, \varphi)] =$$

$$= MF'(\Psi(T, z; s, \varphi))\nabla_\varphi \Psi(T, z; s, \varphi)a,$$

$$\nabla^2_\varphi \Phi(s, \varphi)(a, b) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}[\nabla_\varphi \Phi(s, \varphi + \lambda b) - \nabla_\varphi \Phi(s, \varphi)]a =$$

$$= M[\nabla_\varphi \Psi(T, z; s, \varphi)b]^* F''(\Psi(T, z; s, \varphi))\nabla_\varphi \Psi(T, z; s, \varphi)a.$$

При выводе последней формулы учитывалось, что $\nabla^2_\varphi \Psi(T, z; s, \varphi) = 0$. Аналогично предыдущему, используя аналитичность функции $F(\,\cdot\,)$, видим, что правые части ограничены и непрерывны по φ для любого s. Поэтому они определяют ограниченные и непрерывные линейный и билинейный функционалы соответственно, а этого достаточно для существования сильных производных Фреше, которые совпадают со слабыми.

Следующий результат представляет собой обобщение обратного уравнения Колмогорова на случай, когда случайное поле является решением задачи (6). Точное или приближенное решение уравнения Колмогорова позволяет находить точные или приближенные распределения решения стохастического уравнения Шредингера (4). Для удобства обозначений положим $V_t(z) = (f(t), z)$, $U_t(z) = (g(t), z)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения утверждения* 2. *Тогда функционал* $\Phi(s, \varphi)$ *является решением задачи Коши*

$$\partial\Phi(s, \varphi)/\partial s + \nabla_\varphi \Phi(s, \varphi)\left[\frac{ih}{2m}\frac{\partial^2 \varphi(\cdot)}{\partial z^2} + \frac{i}{h}V_s(\,\cdot\,)\varphi(\,\cdot\,) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2h^2}U_s^2(\,\cdot\,)\varphi(\,\cdot\,)\right] - \frac{i}{2h^2}\nabla^2_\varphi \Phi(s, \varphi)(U_s(\,\cdot\,)\varphi(\,\cdot\,), U_s(\,\cdot\,)\varphi(\,\cdot\,)) = 0, \quad s < T, \qquad (8)$$

с "начальным" условием $\Phi(T, \varphi) = F(\varphi)$.

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что уравнение (6) имеет единственное решение. Аналогично [4] легко получить, что для любого $s \in [0, t)$

$$M\{F(\Psi(t, z; 0, \Psi_0)) \mid \mathcal{F}^\beta_{[0,s)}\} = MF(\Psi(t, z; s, \varphi(s, \cdot)))\mid_{\varphi(s,\cdot) = \Psi(s,\cdot;\, 0\, \Psi_0)}. \qquad (9)$$

Равенство (9) является аналогом марковского свойства для случайных полей, эволюция которых описывается уравнением (6). Используя формулу Тейлора и равенство (9), имеем

$$\Phi(s - \Delta s, \varphi) - \Phi(s, \varphi) = M[\Phi(s, \Psi(s, \cdot\,; s - \Delta s, \varphi)) - \Phi(s, \varphi)] =$$

$$= \nabla_\varphi \Phi(s, \varphi)M[\Psi(s, \cdot\,; s - \Delta s, \varphi) - \varphi] + \frac{1}{2}\nabla^2_\varphi \Phi(s, \varphi)M(\Psi(s, \cdot\,; s - \Delta s, \varphi) -$$

$$- \varphi, \Psi(s, \cdot\,; s - \Delta s, \varphi) - \varphi) + \int_0^1 (1 - \theta)M[\nabla^2_\varphi \Phi(s, \theta\varphi + (1 - \theta)\Psi(s, \cdot\,; s - \Delta s, \varphi)) -$$

$$- \nabla^2_\varphi \Phi(s, \varphi)](\Psi(s, \cdot\,; s - \Delta s, \varphi) - \varphi, \Psi(s, \cdot\,; s - \Delta s, \varphi) - \varphi)d\theta.$$

Предположим, что функция $F(z)$, входящая в определение функционала

$\Phi(\cdot)$, удовлетворяет дополнительному условию

$$M\,|F'''(\Psi(T, z; s, \varphi))| < \infty. \tag{10}$$

В этом случае, следуя предыдущему, нетрудно убедиться в существовании ограниченного 3-линейного функционала $\nabla_\varphi^3\Phi(s, \varphi)$. Тогда с помощью неравенства Гельдера легко показать, что остаточный член представляет собою величину $o(\Delta s)$. Поэтому, разделив обе части предыдущего равенства на Δs и переходя к пределу при $\Delta s \to 0$, получаем уравнение (8). Затем, учитывая непрерывность функционала $\Phi(s, \varphi)$ по переменной, видим, что $\lim\limits_{s\uparrow T}\Phi(s, \varphi) = = F(\varphi)$. Чтобы завершить доказательство, покажем как избавиться от дополнительного условия (10). Пусть $F_n(z)$ — последовательность функций, удовлетворяющая условиям теоремы и дополнительно условию (10), сходящаяся поточечно к функции $F(z)$, для которой выполнены только условия теоремы и $\Phi_n(s, \varphi)$, $\Phi(s, \varphi)$ — функционалы, построенные с помощью функций F_n и F соответственно. Если при этом при каждом $k = 0, 1, 2$

$$\lim_{n\to\infty} M\,|F_n^{(k)}(\Psi(T, z; s, \varphi)) - F^{(k)}(\Psi(T, z; s, \varphi))| = 0, \tag{11}$$

то нетрудно видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\nabla_\varphi^k\Phi_n(s, \varphi) - \nabla_\varphi^k\Phi(s, \varphi)| = 0$ и возможен непосредственный предельный переход при $n \to \infty$ в уравнении (8),которому удовлетворяют функционалы $\Phi_n(s, \varphi)$. Справедливость равенства (11) вытекает из полноты гильбертова пространства $\mathfrak{L}_2$, введенного выше при рассмотрении вопроса существования производных волновой функции Ψ по φ.

Замечание. Полагая в уравнении (8) $z = x + i0$, получаем задачу Коши для нахождения распределения волновой функции $\psi(t, x; s, \varphi)$.

В данной работе мы не касались проблемы квантовых измерений. Все же отметим, что уравнение (4) в точности совпадает с уравнением Шредингера в работе [8] для квантового измерения координат частицы прибором.

1. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. – М.: Мир, 1968. – 382 с.
2. *Гихман Ил. И.* Вероятностное представление квантовых эволюций // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №10. – С. 1314 – 1319.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.– М.: Наука, 1977.– 567 с.
4. *Гихман Ил. И.* Стохастические уравнения и связанные с ними полулинейные стохастические параболические системы. – Донецк, 1989. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. математики и механики; 89. 11).
5. *Розовский Б. Л.* Эволюционные стохастические системы. – М.: Наука, 1983. – 208 с.
6. *Шифф Л.* Квантовая механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 453 с.
7. *Колмогоров А. М., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 495 с.
8. *Belavkin V. P.* Phys. Lett. – 1989. – **140**. – P. 355 – 358.

Получено 22. 10. 92