УДК 517.518.23

И. В. Скрыпник, акад. АН Украины
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

ГЕЛЬДЕРОВОСТЬ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА $B_{q,s}$

A class of functions $B_{q,s}$ is defined which contains generalized solutions to some higher order quasilinear parabolic equations. We prove that $B_{q,s}$ is imbedded in the space of Hölder functions.

Визначається клас функцій $B_{q,s}$, до якого належать узагальнені розв'язки деяких квазілінійних параболічних рівнянь вищого порядку. Доводиться вкладення $B_{q,s}$ у простір гельдерових функцій.

Изучение регулярности обобщенных решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в монографии О. А. Ладыженской, В. А. Солонникова, Н. Н. Уральцевой [1] основано на принадлежности функций из класса $B_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \kappa)$ пространству гельдеровых функций. Более общий класс $B_q(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \kappa)$ рассмотрен в статье Ди Бенедетто [2] и полученное для этого класса вложение позволило установить гельдеровость решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений второго порядка.

В данной работе вводится класс функций $B_{q,s}(Q_T, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa)$, обобщающий названные классы, так, что класс из монографии [1] соответствует значениям $q = 2$, $s = 1$ и класс из статьи [2] — значению $s = 1$. Доказываемая гельдеровость функций из $B_{q,s}$ позволила автору выделить класс квазилинейных параболических уравнений высшего порядка, все обобщенные решения которых удовлетворяют условию Гельдера [3].

Далее Ω — ограниченное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $n \ge 1$, $Q_T = \{(x, t): x \in \Omega, t \in (0, T)\}$.

Будем говорить, что измеримая функция $u(x, t)$, $x, t \in Q_T$, принадлежит классу $B_{q,s}(Q_T, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa)$, если

$$u(x, t) \in V_{2,q}(Q_T) \equiv C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_q(0, T; W_q^1(\Omega)), \tag{1}$$

$$\operatorname{ess\,sup} \{|u(x, t)|: (x, t) \in Q_T\} \le M \tag{2}$$

и для произвольных точки $(x_0, t_0) \in Q_T$ и положительных чисел R, θ таких, что

$$Q(R, \theta) \equiv Q(x_0, t_0; R, \theta) = B(x_0, R) \times (t_0 - \theta, t_0) \subset \overline{Q(R, \theta)} \subset Q_T,$$

а также произвольной бесконечно дифференцируемой неубывающей на R^1 функции $\eta(t)$ справедливы неравенства

$$\sup_{t_0-\theta \le t \le t_0} \int\limits_{B(x_0, R-\sigma R)} (u(x, t) - k)_\pm^{s+1} \eta^q(t) dx + \int\limits_{t_0-\theta}^{t_0} \int\limits_{B(x_0, R-\sigma R)} (u - k)_\pm^{s-1} \times$$

$$\times \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^q \eta^q(\tau) dx\, d\tau \le \int\limits_{B(x_0, R)} (u(x, t_0 - \theta) - k)_\pm^{s+1} \eta^q(t_0 - \theta) dx +$$

$$+ \gamma\left\{\left(\frac{1}{\sigma R}\right)^q \int\limits_Q \int\limits_{(R,\theta)} (u - k)_\pm^{s+q-1} \eta^q(\tau) dx d\tau + \int\limits_Q \int\limits_{(R,\theta)} (u - k)_\pm^{s+1} \eta^{q-1}(\tau) \frac{d\eta(\tau)}{d\tau} dx d\tau + \right.$$

$$+\left[\int_{t_0-\theta}^{t_0}\left[\operatorname{mes}A^{\pm}_{k,R}(\tau)\right]^{r/\rho}d\tau\right]^{q(1+\kappa)/r}\Bigg\}, \tag{3$_\pm$}$$

$$\sup_{t_0-\theta\le t\le t_0}\int_{B(x_0,R-\sigma R)}\left[\ln\frac{H^{\pm}}{H^{\pm}\mp(u(x,t)-k)+\nu}\right]_+^{s+1}dx\le$$

$$\le\int_{B(x_0,R)}\left[\ln\frac{H^{\pm}}{H^{\pm}\mp(u(x,t_0-\theta)-k)+\nu}\right]_+^{s+1}dx+$$

$$+\gamma\Bigg\{\left(\frac{1}{\sigma R}\right)^q\iint_{Q(R,\theta)}\left[\ln\frac{H^{\pm}}{H^{\pm}\mp(u-k)+\nu}\right]_+^{s}\left[H^{\pm}\mp(u-k)+\nu\right]^{q-2}dx\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{\nu^b}\left[1+\left(\ln\frac{H^{\pm}}{\nu^b}\right)^s\right]\left\{\int_{t_0-\theta}^{t_0}\left[\operatorname{mes}A^{\pm}_{k,R}(\tau)\right]^{r/\rho}d\tau\right\}^{q(1+\kappa)/r}\Bigg\}. \tag{4$_\pm$}$$

Здесь $s, \gamma, r, \rho, \delta, b, \kappa, \sigma$ — заданные положительные числа, которые подчинены ограничениям $\kappa, \sigma \in (0, 1)$, $b \le s, r, \rho > 1$,

$$1/r + n/(\rho q) = n/q^2, \tag{5}$$

и возможные значения r, ρ ограничены условиями:

$$\rho \in (q, \infty],\quad r \in [q^2, \infty) \quad \text{при} \quad n = 1,$$

$$\rho \in [q, nq/(n-q)],\quad r \in [q, \infty) \quad \text{при} \quad n > q > 1,$$

$$\rho \in [q, \infty),\quad r \in (q^2/n, \infty] \quad \text{при} \quad 1 < n \le q.$$

Кроме того, в $(4)_\pm$ использованы следующие обозначения:

$$(u(x,t)-k)_\pm = \max\{\pm(u(x,t)-k), 0\}, \tag{6}$$

$$A^{\pm}_{k,R}(\tau) = \{x \in B(x_0,R) : \pm(u(x,\tau)-k) > 0\} \tag{7}$$

и аналогично (6) понимается $\left[\ln\dfrac{H^{\pm}}{H^{\pm}\mp(u-k)+\nu}\right]_+$. В $(3)_\pm$, $(4)_\pm$ k — произвольное вещественное число, подчиняющееся условию

$$\operatorname{ess\,sup}\{u(x,t)-k)_\pm : (x,t) \in Q(R,\theta)\} \le \delta, \tag{8$_\pm$}$$

$H^{\pm}$ и ν — такие положительные числа, что

$$\operatorname{ess\,sup}\{u(x,t)-k)_\pm : (x,t) \in Q(R,\theta)\} \le H^{\pm} \le \delta,$$
$$\nu \le \min\{H^{\pm}, 1\}. \tag{9}$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $u(x,t)$ — произвольная функция из класса $B_{q,s}(Q_T, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa)$, $q \ge 2$. Тогда для каждого цилиндра $Q_R(x_0,t_0) = B(x_0,R) \times (t_0 - R^q, t_0)$ такого, что $\overline{Q_R(x_0,t_0)} \subset Q_T$, выполнено неравенство*

$$\operatorname{ess\,osc}\{u(x,t)\ (x,t) \in Q_R(x_0,t_0)\} \le AR^{\alpha} \tag{10}$$

с положительными постоянными A, α, зависящими только от *$q, s, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa, u$, кроме того, A зависит еще от расстояния $Q_R(x_0,t_0)$ до $\Gamma_T =$*

$= \partial\Omega \times (0, T) \cup \Omega \times \{0\}$.

Пусть $u(x, t)$ — произвольная функция из класса $B_{q,s}(Q_T, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa)$. Выберем некоторую точку $(x_0, t_0) \in Q_T$. Определим при $0 < R \le 1$ цилиндры

$$Q^{(1)}(R) = B(x_0, R) \times (t_0 - R^{q-(q-2)\varepsilon}, t_0), \tag{11}$$

$$Q_\lambda^{(2)}(R) = B(x_0, R) \times (t_0 - \lambda R^q, t_0),$$

где

$$\varepsilon = n\kappa\{s + q - 1 + (q - 2)\max[q(1+\kappa)/r - 1, 0]\}^{-1}, \tag{12}$$

$$\lambda = (K_1/\omega)^{q-2}, \ K_1 > 2M/\delta, \ K_1 > 2M, \tag{13}$$

K_1 — выбираемое дальше достаточно большое число, ω — положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\omega \le 2M. \tag{14}$$

Далее предполагаем R таким, что $Q^{(1)}(R)\, Q_\lambda^{(2)}(R) \subset Q_T$.

Обозначим

$$\mu_+ = \operatorname{ess\,sup}\{u(x, t)\colon (x, t) \in Q^{(1)}(R)\},$$

$$\mu_- = \operatorname{ess\,inf}\{u(x, t)\colon (x, t) \in Q^{(1)}(R)\}, \tag{15}$$

$$Q^{(3)}(R) = B(x_0, R) \times (\bar{t} - \xi R^q, \bar{t}), \quad \xi = (2M/(\delta\omega))^{q-2}$$

при условиях $\bar{t} \le t_0$, $\bar{t} - \xi R^q \ge t_0 - \lambda R^q$.

Доказательство теоремы близко доказательству гельдеровости функций из класса $B_q(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \kappa)$ в работе Ди Бенедетто [2], поэтому отметим только основные его моменты.

В основе доказательства лежат два утверждения, которые докажем в предположениях:

$$\operatorname{ess\,osc}\{u(x, t)\colon (x, t) \in Q_\lambda^{(2)}(R)\} \le \omega, \tag{16}$$

$$\omega > KR^\varepsilon, \tag{17}$$

где ε определяется равенством (12) и K — достаточно большое положительное число.

Утверждение 1. *Существуют положительные числа* $\alpha_0 \in (0, 1)$, *зависящие лишь от* $n, q, s, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa$, *и* K_2, *зависящее от тех же параметров, и* K_1 *такие, что из неравенств* (16), (17) *при* $K = K_2$ *и справедливости для некоторого цилиндра* $Q_\xi^{(3)}(R)$ *неравенства*

$$\operatorname{mes}\{(x, t) \in Q_\xi^{(3)}(R)\colon u(x, t) < \mu_- + \delta\omega/2M\} \le \alpha_0 \operatorname{mes} Q_\xi^{(3)}(R) \tag{18}$$

следует оценка

$$\operatorname{ess\,osc}\{u(x, t)\colon (x, t) \in Q_\xi^{(2)}(R/8)\} \le \omega(1 - 1/K_2). \tag{19}$$

Утверждение 2. *Существует положительное число* K_1, *зависящее только от* $n, q, s, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa$, *такое, что из* (16), (17) *при* $K = 2K_1$ *и выполнения для каждого цилиндра* $Q_\xi^{(3)}(R) \subset Q_\lambda^{(2)}(R)$ *неравенства*

$$\operatorname{mes}\{(x, t) \in Q_\xi^{(3)}(R)\colon u(x, t) < \mu_- + \delta\omega/(2M)\} > \alpha_0 \operatorname{mes} Q_\xi^{(3)}(R) \tag{20}$$

следует оценка

$$\operatorname{ess\,osc}\{u(x,t):\ (x,t)\in Q^{(2)}_{\lambda'}(R/2)\}\le\omega(1-,1/(2K_1)),\tag{21}$$

где $\lambda'=\alpha_0\lambda/3$ *и число* α_0 *определено в утверждении* 1.

Доказательство теоремы. Покажем вначале, как из утверждений 1, 2 следует гельдеровость функции $u(x,t)$. Пусть

$$\theta=\max\{1-1/(2K_1),\ 1-1/(2K_2)\},\quad K=\max\{2K_1,K_2\},\ \xi'=\min\{\xi,\lambda'\},$$

где числа K_1, K_2 будут фиксироваться в соответствии с утверждениями 1, 2.

Напомним, что ω удовлетворяет только неравенству (14). Выберем далее

$$\omega=\operatorname{ess\,osc}\{u(x,t):\ (x,t)\in Q^{(1)}(R)\}=\mu_+-\mu_-\tag{22}$$

и рассмотрим две возможности: а) $Q^{(1)}(R)\subseteq Q^{(2)}_{\zeta}(R)$; б) $Q^{(1)}(R)\supset Q^{(2)}_{\zeta}(R)$, где $\zeta=(K_3/\omega)^{q-2}$ и K_3 определяется равенством $K_3^{1-\varepsilon(q-2)/q}=KK_1^{-\varepsilon(q-2)/q}$.

В первом случае из определения цилиндров $Q^{(1)}(R)$, $Q^{(2)}_{\zeta}(R)$ следует

$$(1/\omega)^{q-2}K_3^{q-2}\ge R^{-(q-2)\varepsilon},$$

или

$$\omega\le K_3R^{\varepsilon},\tag{23}$$

что и завершает доказательство оценки (10).

Если же выполнено включение б), то справедливы неравенства

$$\omega>K_3R^{\varepsilon},\tag{24}$$

$$\operatorname{ess\,osc}\{u(x,t):\ (x,t)\in Q^{(2)}_{\zeta}(R)\}\le\omega.\tag{25}$$

В этом случае определим последовательности

$$R_j=R(K_3/K_1)^{q-2}((K_4\theta/K_1)^{(q-2)/q}/8)^{j-1},\quad \omega_j=\omega\theta^{j-1},$$

$$\lambda_j=(K_1/\omega_j)^{q-2},\quad j=1,2,\ldots,\tag{26}$$

где $K_4=\min\{2M/\delta,\ (\alpha_0/3)^{1/(q-2)}K_1\}$.

Покажем, что выполняется одно из условий:

1) при всех $j=1,2,\ldots$ справедливо неравенство

$$\operatorname{ess\,osc}\{u(x,t):\ (x,t)\in Q^{(2)}_{\lambda_j}(R_j)\}\le\omega_j;\tag{27}$$

2) существует номер $J\ge2$ такой, что при $j<J$ выполнены неравенства (27) и

$$\omega_J\le KR_J^{\varepsilon}.\tag{28}$$

Если бы последнее утверждение было доказано, то отсюда следовало бы, что для любой точки $(x_0,t_0)\in Q_T$ при любом достаточно малом R существует $R'\in(0,R)$ такое, что

$$\operatorname{ess\,osc}\{u(x,t):\ |x-x_0|<R',\ |t-t_0|\le(R')^q\}\le C(R')^{\alpha}$$

с некоторыми, зависящими лишь от известных параметров, постоянными C, α. И отсюда следовала бы справедливость утверждения теоремы.

Таким образом, осталось доказать справедливость одного из утверждений 1, 2. При $j=1$ в силу (24) и выбора ω_1,R_1,K_3 справедливо неравенство

$$\omega_j>KR_j^{\varepsilon}.\tag{29}$$

В силу выбора λ_1, R_1, ω_1 и неравенства (25) при $j = 1$ справедлива оценка (27).

Доказывая по индукции, предположим справедливость неравенств (27), (29) при $j < J$ и рассмотрим представляющиеся возможности при $j = J$. Если выполнено неравенство (28), то приходим к заключению 2. В противном случае при $j = J$ справедлива оценка (29).

Покажем выполнение при $j = J$ неравенства (27). В силу утверждений 1, 2 и выбора θ, K, ξ из неравенств (27), (29) при $j = J - 1$ получаем

$$\operatorname{ess\,osc}\,\{u(x,t)\colon\ (x,t) \in Q^{(2)}_{\eta_{J-1}}(R_{J-1}/8)\} \le \theta\omega_{J-1}, \tag{30}$$

где $\eta_{J-1} = (K_4/\omega_{J-1})^{q-2}$. Из определения K_4, ω_j, λ_j следует $Q^{(2)}_{\lambda_J}(R_J) = Q^{(2)}_{\eta_{J-1}}(R_{J-1}/8)$, и тем самым (30) совпадает с (27) при $j = J$. Это завершает доказательство справедливости одного из двух условий 1, 2, и теорема доказана.

Осталось доказать утверждения 1, 2. Ограничимся доказательством первого из них. Приведем сначала вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Существует положительное число $\alpha_0 \in (0, 1)$, зависящее только от $q, n, s, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa$, такое, что из неравенств* (16), (17) *при $K = K_1$ и справедливости для некоторого цилиндра $Q^{(3)}_{\xi}(R)$ неравенства* (18) *следует оценка*

$$u(x,t) \ge \mu_- + \delta\omega/(4M) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in Q^{(3)}_{\xi}(R/2). \tag{31}$$

Доказательство. Определим последовательности

$$R(j) = R/2 + R/2^j, \quad \sigma(j)R(j) = (1/4)R/2^j,$$

$$\theta(j) = \xi[R(j)]^q, \quad k(j) = \mu_- + \delta\omega/(4M) + \delta\omega/(2^{j+1}M) \tag{32}$$

и запишем при $R = R(j)$, $\sigma = \sigma(j)$, $k = k(j)$, $\theta = \theta(j)$ $j = 1, 2, \ldots$ неравенство $(3)_-$. Возможность выбора таких значений следует из неравенства

$$\operatorname{ess\,osc}\,\{[u(x,t) - k(j)]_-\colon\ (x,t) \in Q^{(3)}_{\xi}(R(j))\} \le$$

$$\le \mu_- + \delta\omega/(4M) + \delta\omega/(2^{j+1}M) - \mu_- \le \delta\omega/(2M) \le \delta, \tag{33}$$

обеспечивающего выполнение условия $(8)_-$. Функцию $\eta(t)$ выбираем равной единице при $t \ge \bar t - [\bar R(j)]^q$, нулю при $t \le \bar t - [R(j)]^q$ и такой, что $0 \le d\eta(t)/dt \le 2^{q+j+2}/(\xi R^q)$. Здесь $\bar R(j) = R(j) - \sigma(j)R(j)$. Кроме того, обозначим

$$\bar\theta(j) = \xi[\bar R(j)]^q, \quad \bar Q(j) = Q^{(3)}_{\xi}(\bar R(j)),$$

$$Q(j) = Q^{(3)}_{\xi}(R(j)), \quad B(j) = B(x_0, R(j)), \quad \bar B(j) = B(x_0, \bar R(j)).$$

Из $(3)_-$ получаем

$$\sup_{\bar t - \bar\theta(j) \le t \le \bar t} \int\limits_{\bar B(j)} [u(x,t) - k(j)]_-^{s+1} dx + \iint\limits_{\bar Q(j)} [u - k(j)]_-^{s-1} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^q dx\,dt \le$$

$$\le C_1 \left\{ \frac{2^{jq}}{R^q} \iint\limits_{Q(j)} \left[[u - k(j)]_-^{s+q-1} + \left(\frac{\delta\omega}{2M}\right)^{q-2} \left[[u - k(j)]_-^{s+1} \right] dx\,dt \right. +$$

$$\left. + \left[\int\limits_{\bar t - \theta(j)}^{\bar t} \left[m_j^-(t) \right]^{r/\rho} dt \right]^{q(1+\kappa)/r} \right\}, \tag{34}$$

где $m_j^-(t) = \mathrm{mes} A^-_{k(j),R(j)}(t)$. Здесь и далее через C_i, $i = 1, 2, \ldots$, обозначены постоянные, зависящие лишь от $n, q, s, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa$.

Далее, воспользовавшись неравенством (33), получим

$$\xi \sup_{\bar{t}-\bar{\theta}(j)\le t\le \bar{t}} \int_{\bar{B}(j)} [u(x,t)-k(j)]_-^{s+q-1} dx + \iint_{\bar{Q}(j)} [u-k(j)]_-^{s-1} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^q dx\,dt \le C_1 N_j, \quad (35)$$

где

$$N_j = \frac{2^{jq+1}}{R^q}\left(\frac{\delta\omega}{2M}\right)^{s+q-1} M_j^- + \left[\int_{\bar{t}-\theta(j)}^{\bar{t}} \left[m_j^-(t)\right]^{r/\rho} dt\right]^{q(1+\kappa)/r}$$

и

$$M_j^- = \int_{\bar{t}-\theta(j)}^{\bar{t}} m_j^-(t)\,dt.$$

Определим функцию

$$v(x,t) \equiv [u(x,t)-k(j)]_-^{(s-1)/q+1} \psi_j^q(x), \quad (36)$$

где $\psi_j(x) \in C_0^\infty(\bar{B}(j))$, $\psi_j(x) \equiv 1$ при $x \in B(j+1)$, $|\partial\psi_j(x)/\partial x| \le 2^{j+1}/R$. Применяя неравенство Гельдера и теорему вложения для пространства $\overset{\circ}{W}{}_q^1(\bar{B}(j))$, получаем оценку

$$\iint_{\bar{Q}(j)} |v(x,t)|^{q(n+q)/n} dx\,dt \le \tilde{C}\left[\sup_{\bar{t}\in(\bar{t}-\bar{\theta}(j),\bar{t})} \int_{\bar{B}(j)} |v(x,t)|^q dx\right]^{q/n} \iint_{\bar{Q}(j)} \left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|^q dx\,dt$$

с некоторой, зависящей лишь от n, постоянной $\tilde{C}$. Отсюда, используя неравенство Гельдера и оценку (35), имеем

$$\iint_{Q(j+1)} [u(x,t)-k(j)]_-^{s+q-1} dx\,dt \le C_2 2^{jq}\left(\frac{M_j^-}{\xi}\right)^{q/(n+q)} N_j. \quad (37)$$

Так как

$$\iint_{Q(j+1)} [u(x,t)-k(j)]_-^{s+q-1} dx\,dt \ge [k(j)-k(j+1)]^{s+q-1} M_{j+1}^-,$$

то из выбора $k(j)$ и неравенства (37) следует

$$M_{j+1}^- \le C_3 2^{j(3q+5)}\left(\frac{M_j^-}{\xi}\right)^{q/(n+q)} \left\{\frac{M_j^-}{R^q} + \left(\frac{M}{\delta\omega}\right)^{s+q-1}\left[\int_{\bar{t}-\theta(j)}^{\bar{t}} [m_j^-(t)]^{r/\rho} dt\right]^{q(1+\kappa)/r}\right\}.$$

Отсюда и из неравенства (16) получаем оценку

$$y_{j+1} \le C_4 2^{j(3q+5)}\{y_j^{1+q/(n+q)} + y_j^{q/(n+q)} z_j^{1+\kappa}\}, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad (38)$$

для последовательностей

$$y_j = \frac{M_j^-}{\xi R^{q+n}}, \quad z_j = \frac{1}{R^n}\left[\frac{1}{\xi}\int_{\bar{t}-\theta(j)}^{\bar{t}} [m_j^-(t)]^{r/\rho} dt\right]^{q/r}. \quad (39)$$

Применяя снова к определенной равенством (36) функции $v(x,t)$ неравенство Гельдера и теорему вложения для пространства $\overset{\circ}{W}{}_q^1(\bar{B}(j))$ и используя (5), имеем

$$\int\limits_{\bar{t}-\theta(j)}^{\bar{t}}\left[\int\limits_{\overline{B}(j)} v^{\rho}(x,t)dx\right]^{r/\rho} dt \le$$

$$\le \overline{C}\left[\sup_{t\in(\bar{t}-\overline{\theta}(j),\bar{t})}\int\limits_{\overline{B}(j)} |v(x,t)|^{q}\, dx\right]^{r/q-1} \iint\limits_{\overline{Q}(j)}\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|^{q} dxdt. \qquad (40)$$

Оценим левую часть (40):

$$\int\limits_{\bar{t}-\overline{\theta}(j)}^{\bar{t}}\left[\int\limits_{\overline{B}(j)} v^{\rho}(x,t)dx\right]^{r/\rho} dt \ge$$

$$\ge 2^{-r(j+2)(s+q-1)/q}\left(\frac{\delta\omega}{2M}\right)^{r(s+q-1)/q} \int\limits_{\bar{t}-\overline{\theta}(j)}^{\bar{t}} [m_{j+1}^{-}(t)]^{r/\rho} dt. \qquad (41)$$

Используя неравенства (41), (35), получаем

$$z_{j+1} \le C_5 2^{j(2q+s+q^2/r)}\{y_j + z_j^{1+\kappa}\},\ j=1,2,\dots . \qquad (42)$$

Теперь из неравенств (38), (42) следует (см. лемму 5.7 гл. 2 из [1]) $y_j, z_j \to 0$ при $j\to\infty$, если

$$y_1 \le \alpha,\ \ z_1 \le \alpha \qquad (43)$$

с некоторым α, зависящим лишь от известных параметров. Далее проверяем, что можно удовлетворить оба неравенства (43) за счет выбора α_0 в условии (18). Тем самым доказана оценка (31), а значит, и лемма 1.

Определим $\overline{\xi}$, $\overline{\theta}$ равенствами

$$\bar{t} - \xi(R/2)^{q} = t_0 - \overline{\xi}(R/2)^{q},\ \ \overline{\theta} = \overline{\xi}(R/2)^{q}. \qquad (44)$$

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условия леммы* 1 *и*

$$H^{-} = \operatorname{ess\,sup}\left\{\left[u(x,t)-\mu_{-}-\frac{\delta\omega}{4M}\right]_{-} : (x,t)\in Q_{\overline{\xi}}^{(2)}\left(\frac{R}{2}\right)\right\} \ge \frac{\delta\omega}{8M}. \qquad (45)$$

Тогда для произвольного $\alpha_1\in(0,1)$ *существует положительное число* K', *зависящее только от* $\alpha_1, n, q, s, M, \delta, \kappa, \gamma, b, r, K_1$, *такое, что из оценки* (17) *при* $K\ge K'$ *следует выполнение неравенства*

$$\operatorname{mes}\{x\in B(x_0,R/4) : u(x,t) < \mu_{-} + \omega/K\} < \alpha_1 \operatorname{mes} B(x_0,R/4) \qquad (46)$$

для всех $t\in[t_0-\overline{\xi}(R/2)^{q},\ t_0]$.

Доказательство. Применим при $k=\mu_{-}+\delta\omega/(4M)$ неравенство $(4)_{-}$ к цилиндру $Q_{\overline{\xi}}^{(2)}(R/2)$. В силу (3) для $\nu=\beta\delta\omega/(4M)$, $\beta\le 1/4$ $u(x,t)-(\mu_{-} + \delta\omega/(4M))+\nu>0$ при $x\in B(x_0,R/2)$, $t=t_0-\overline{\xi}(R/2)^{q}$. Отсюда имеем

$$[\ln\{H^{-}[H^{-}+u(x,t_0-\overline{\xi}(R/2)^{q})-\mu_{-}-\delta\omega/(4M)+\nu]^{-1}\}]_{+} = 0. \qquad (47)$$

Из (45) следует $H^{-}\le\delta\omega/(4M)$ и тем самым при $(x,t)\in Q_{\overline{\xi}}^{(2)}(R/2)$ получаем оценки

$$[\ln\{H^{-}[H^{-}+u(x,t)-\mu_{-}-\delta\omega/(4M)+\beta\delta\omega/(4M)]^{-1}\}]_{+} \le \ln\beta^{-1}, \qquad (48)$$

$$[H^{-}+u(x,t)-\mu_{-}-\delta\omega/(4M)+\beta\delta\omega/(4M)]^{q-2} \le (\delta\omega/2M)^{q-2}. \qquad (49)$$

оследняя оценка записана для $(x, t) \in Q_{\xi}^{(2)}(R/2)$ таких, что отлична от нуля евая часть (48).

С учетом (47) – (49) из неравенства (4) при $\sigma = 1/2$ получаем

$$\sup_{\bar{t}_0 - \bar{\theta} \le t \le t_0} \int_{B(x_0, R/4)} \left[\ln \left\{ H^- \left[H^- + u(x,\ t) - \mu_- - \frac{\delta\omega}{4M} + \beta \frac{\delta\omega}{4M} \right]^{-1} \right\} \right]_+^{s+1} dx \le$$

$$\le C_6 \left\{ \frac{1}{R^q} (\ln \beta^{-1})^s \left(\frac{\delta\omega}{2M} \right)^{q-2} \operatorname{mes} Q_{\xi}^{(2)} \left(\frac{R}{8} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{4M}{\beta\delta\omega} \right)^b \left[1 + (\ln \beta^{-1})^s \right] \bar{\xi}^{q(1+\kappa)/r} R^{n(1+\kappa)} \right\}. \qquad (50)$$

Выберем в неравенстве (17) $K = 4M/(\beta\delta)$ и заметим, что в силу включения $Q_{\xi}^{(3)}(R/2) \subset Q_{\lambda}^{(2)}(R/2)$ выполнена оценка $\bar{\xi} \le (K_1/\omega)^{q-2}$. Отсюда получаем, что правая часть (50) не превышает

$$C_7 [K_1^{q-2} + K_1^{q(q-2)(1+\kappa)/r}] (\ln \beta^{-1})^s R^n.$$

Оценим снизу интеграл в левой части (50), заменяя интегрирование по $B(x_0, R/4)$ интегрированием по множеству $\{x \in B(x_0, R/4) \colon u(x, t) < \mu_- + \beta\delta\omega/(4M)\}$. В этом интеграле в силу (45) имеем

$$[\ln \{ H^- [H^- + u(x, t) - \mu_- - \delta\omega/(4M) + \beta\delta\omega/(4M)]^{-1} \}]_+ \ge \ln \beta^{-1}/4,$$

и, следовательно, левая часть (50) не меньше, чем

$$C_8 [\ln (\beta^{-1}/4)]^{s+1} \operatorname{mes} \{ x \in B(x_0, R/4) \colon u(x, t) < \mu_- + \beta\delta\omega/(4M) \}.$$

Сравнивая изложенное относительно оценки левой и правой частей неравенства (50), получаем оценку

$$\operatorname{mes} \{ x \in B(x_0, R/4) \colon u(x, t) < \mu_- + \beta\delta\omega/(4M) \} \le$$

$$\le C_9 [K_1^{q-2} + K_1^{q(q-2)(1+\kappa)/r}] (\ln \beta^{-1})^s (\ln (\beta^{-1}/4))^{-s-1} R^n. \qquad (51)$$

Отсюда видно, что множитель при R^n в правой части (51) может быть сделан сколь угодно малым при достаточно малом β, что и доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Предположим, что выполнены условия леммы* 1 *и неравенство* (45). *Тогда существует положительное число* K'', *зависящее только от* $n, q, s, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa, K_1$, *такое, что из оценки* (17) *при* $K = K''$ *следует выполнение неравенства*

$$u(x, t) \ge \mu_- + \omega/K'' \quad \text{для} \quad (x, t) \in B(x_0, R/8) \times [t_0 - \xi(R/8)^q, t_0]. \qquad (52)$$

Доказательство. Считаем, что $K'' \ge 2K_1$. Определим последовательности

$$R'(j) = R/8 + R/(8 \cdot 2^{j-1}), \quad \sigma'(j) R'(j) = R/2^{j+4},$$

$$\bar{R}'(j) = R'(j) - \sigma'(j) R'(j), \ k'(j) = \mu_- + \omega/K'' + \omega/(2^{j-1} K'')$$

и запишем при $\eta(t) \equiv 1$, $R = R'(j)$, $\sigma = \sigma'(j)$, $k = k'(j)$, $\theta = \bar{\theta}$ оценку $(3)_-$. Выполнение условия $(8)_-$ в данном случае проверяется аналогично (33). Получаем

$$\sup_{\bar{t}_0 - \bar{\theta} \le t \le t_0} \int_{\bar{B}'(j)} [u(x, t) - k'(j)]_-^{s+1} dx + \iint_{\bar{Q}'(j)} [u(x, t) - k'(j)]_-^{s-1} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|^q dx\, dt \le$$

$$\leq C_{10}\left\{\frac{2^{jq}}{R^q}\iint\limits_{Q'(j)}[u(x,t)-k'(j)]_-^{s+q-1}dx\,dt+\left[\int\limits_{t_0-\overline{\theta}}^{t_0}[\mathrm{mes}A^-_{k'(j),R'(j)}(t)]^{r/\rho}dt\right]^{q(1+\kappa)/r}\right\}, \tag{53}$$

где

$$B'(j) = B(x_0, R'(j)),\quad Q'(j) = B'(j)\times[t_0-\overline{\xi}(R/2)^q, t_0],$$

$$\overline{B}'(j) = B(x_0, \overline{R}'(j)),\quad \overline{Q}'(j) = \overline{B}'(j)\times[t_0-\overline{\theta}(R/2)^q, t_0].$$

При этом неравенство (53) не содержит слагаемое, соответствующее первому члену правой части (3)_, так как оно равно нулю в силу леммы 1.

Неравенство (53) аналогично неравенству (34), только с заменой $\bar{t}$ на t_0. И поэтому, продолжая рассуждения так же, как и при доказательстве леммы 1, убеждаемся в существовании такого положительного числа α', зависящего лишь от $n, q, s, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa$, что из неравенства

$$\mathrm{mes}\ \{(x,t)\in Q_{\xi}^{(2)}(R/4): u(x,t) < \mu_- + 2\omega/K''\} \leq \alpha'\mathrm{mes}\, Q_{\xi}^{(2)}(R/4) \tag{54}$$

следует оценка

$$u(x,t) \geq \mu_- + \omega/K'' \quad \text{при} \quad (x,t)\in Q_{\xi}^{(2)}(R/8). \tag{55}$$

Обеспечим выполнение неравенства (54), выбирая $K'' = 2\max\{K_1, K'\}$, где K' — число, определяемое леммой 2 при $\alpha_1 = \alpha'$. Так как $\overline{\xi}\geq\xi$, то из неравенства (55) следует оценка (52), что и завершает доказательство леммы 3.

Доказательство утверждения **1.** Искомое число α_0 определим в соответствии с леммой 1 и будем считать, что $K_2 \geq K_1$. При этом для определенного согласно (45) числа H^- могут быть два случая:

$$H^- > \delta\omega/(8M) \quad \text{или} \quad H^- \leq \delta\omega/(8M).$$

Если выполнено первое неравенство, то при $K_2 \geq K''$ из (52) имеем

$$\mathrm{ess\,inf}\,\{u(x,t): (x,t)\in(x_0, R/8)\times[t_0-\xi(R/8)^q, t_0]\} \geq \mu_- + \omega/K''$$

и, тем самым, получаем оценку

$$\mathrm{ess\,osc}\,\{u(x,t): (x,t)\in Q_{\xi}^{(2)}(R/8)\} \leq \mu_+ - \mu_- - \omega/K'' = \omega(1-1/K''). \tag{56}$$

Если же $H^- \leq \delta\omega/(8M)$, то из определения H^- следует $u(x,t)\geq\mu_- + {}$ $+\,\delta\omega/(8M)$ при $(x,t)\in Q_{\xi}^{(2)}(R/2)$. Так как $\xi\leq\overline{\xi}$, то аналогично (56) имеем

$$\mathrm{ess\,osc}\,\{u(x,t): (x,t)\in Q_{\xi}^{(2)}(R/2)\} \leq \omega(1-\delta/(8M)). \tag{57}$$

И требуемую оценку (19) получаем из (56), (57), выбирая $K_2 = \max\{K'', 8M/\delta\}$. Утверждение доказано.

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
2. *Benedetto E. Di.* On the local behaviour of solutions of degeneration parabolic equations with measurable coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., Ser. IV. – 1986. – **13**, № 3. – P. 487 – 535.
3. *Скрыпник И. В.* О квазилинейных параболических уравнениях высшего порядка с гельдеровыми решениями // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 3. – С. 503 – 517.

Получено 22.10.92