УДК 519.41/47

П. П. Барышовец

Конечные неразрешимые группы с дополняемыми неметациклическими подгруппами

Исследованию групп с теми или иными системами дополняемых подгрупп посвящены многие работы (см., например, [1]). В частности, в [2] изучались группы с дополняемыми нециклическими подгруппами. В работе [3] описаны конечные нильпотентные группы с дополняемыми неметациклическими подгруппами. В настоящей статье рассматриваются конечные неразрешимые группы с таким свойством. При этом метациклической называется всякая группа, являющаяся расширением циклической (в частности, единичной) группы с помощью циклической. Докажем следующую теорему.

Теорема. *В конечной неразрешимой группе G тогда и только тогда дополняемы все неметациклические подгруппы, когда $G = A \times B$, где B — метациклическая вполне факторизуемая $2'$-группа, $3^2 \dagger |B|$, $5^2 \dagger |B|$ и выполняется одно из следующих утверждений*:

1) $A \simeq PSL(2, 5)$, $PSL(2, 11)$ *или* $SL(2, 5)$;
2) $A \simeq SL(2, 11)$, *а* $B = C \times D$, $|C| = 1$ *или* 5 *и* $11^2 \dagger |D|$, $5 \dagger |D|$;
3) $A \simeq PGL(2, 11)$, $11^2 \dagger |B|$.

Пусть G — произвольная неметациклическая группа, обладающая свойством: любая неметациклическая подгруппа из G дополняема в G. Тогда все неметациклические подгруппы и неметациклические фактор-группы G обладают тем же свойством. Кроме того, фактор-группа группы G по ее неметациклическому нормальному делителю вполне факторизуема. Отметим, что слово «группа» ниже означает «конечная группа».

Лемма 1. *Простая группа G с дополняемыми неметациклическими подгруппами изоморфна $PSL(2, 5)$ или $PSL(2, 11)$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что если G_2 — силовская 2-подгруппа группы G — неабелева и неметациклическая, то она максимального класса [4] и содержит абелеву подгруппу индекса 2 [5]. С другой стороны, неабелевы неметациклические 2-группы с дополняемыми неметациклическими подгруппами либо содержат абелеву подгруппу индекса 2, либо их коммутант цикличен [3]. Далее, если G_2 — абелева группа, то ввиду недополняемости силовских 2-подгрупп в группах $PSL(2, q)$ с $q > 3$ [6] и теоремы Уолтера [7] группа G изоморфна $PSL(2, q)$ для подходящего нечетного q.

Отсюда и из результатов работ [8, 9] следует, что G изоморфна одной из групп: $PSL(2, p^n)$, $p > 2$; $PSL(3, q)$; $PSU(3, q^2)$, q — нечетно; A_7 или M_{11}.

а). $G \simeq PSL(2, p^n)$, $p > 2$. Тогда G содержит подгруппу H, изоморфную A_4. Из ее дополняемости в группе G и из описания Ито [6] всех факторизаций группы $PSL(2, p^n)$ следует, что $G \simeq PSL(2, 5)$ или $PSL(2, 11)$.

б). $G \simeq PSL(3, q)$. Если $q = p^n$, то силовская p-подгруппа G_p группы G в G недополняема [10]. Следовательно, G_p — метациклическая группа. Отсюда и из теорем 7.1 гл. II, 16.5 и 16.6 гл. III работы [5] следует, что $q = 2$. Но тогда $G \simeq PSL(3, 2) \simeq PSL(2, 7)$. Так как в $PSL(2, 7)$ недополняема подгруппа, изоморфная A_4, то рассматриваемый случай невозможен.

в). $G \simeq PSU(3, q^2)$, q — нечетное число. Группа G содержит подгруппу $A = B \leftthreetimes C$, где $|B| = q^3$, $|C| = (q^2 - 1)/d$, $d = (3, q + 1)$ и $|B'| = |Z(B)| = q$, причем $A' = B$ и C — циклическая группа (см. [5, с. 242—245]). Так как в силу теоремы 8.6 гл. IV [5] B — неметациклическая группа, то $C \simeq A \times B$ — вполне факторизуемая группа. Это противоречит ее цикличности и соотношению $4 \left| \frac{q^2-1}{d} \right. = |C|$. Следовательно, этот случай невозможен.

г). $G \simeq A_7$. Группа G содержит подгруппу изоморфную $A_6 \simeq PSL(2, 9)$, а в последней есть недополняемые неметациклические подгруппы. Пришли к противоречию.

д). $G \simeq M_{11}$. Группа G содержит подгруппу $H = K \leftthreetimes L$, где K — элементарная абелева группа порядка 9, а L — группа кватернионов порядка 8. Все восемь элементов порядка 3 из K сопряжены относительно группы L [11, с. 94]. Значит, KL' — неметациклическая группа. Так как она недополняема в G, то рассматриваемый случай также невозможен. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть G — простая минимальная неразрешимая группа. Если в G дополняемы все неметациклические подгруппы, то $G \simeq A_5$.*

Лемма 2. *Если G — полупростая группа с дополняемыми неметациклическими подгруппами, то G изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2, 5)$, $PSL(2, 11)$ или $PGL(2, 11)$.*

Доказательство. Пусть G — непростая группа и K — ее минимальный нормальный делитель. Тогда ввиду дополняемости в G неметациклических подгрупп K — простая группа, а G/K — вполне факторизуемая. Так как ввиду полупростоты G $C_G(K) = 1$, то в силу леммы 1 G изоморфна $PGL(2, 5)$ или $PGL(2, 11)$.

Предположим, что $G \simeq PGL(2, 5)$. Если T — дополнение в G к подгруппе $B \simeq A_4$ из $K \simeq PSL(2, 5)$, то $|T| = 10$. Следовательно, T содержится в нормализаторе $N = N_G(T_5)$ силовской 5-подгруппы T_5 из T в группе G. Но N — полупрямое произведение T_5 на циклическую группу порядка 4 [5]. Значит, $T \subset K$ и потому $T \cap B \neq 1$. Из полученного противоречия следует, что рассматриваемый случай невозможен.

Нетрудно убедиться, что в группе $PGL(2, 11)$ все неметациклические подгруппы дополняемы. В частности, подгруппу $B \simeq A_4$ дополняет нормализатор силовской 11-подгруппы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — неразрешимая группа с дополняемыми неметациклическими подгруппами. Если $1 \neq R = R(G)$ — 2-группа, то $G \simeq SL(2, 5)$ или $SL(2, 11)$.*

Доказательство. Ввиду леммы 2 G/R изоморфна одной из групп: $PSL(2, 5)$, $PSL(2, 11)$, $PGL(2, 11)$.

1). $G/R \simeq PSL(2, 5)$. Так как $PSL(2, 5)$ не содержит подгрупп порядка 15 и 20, то G_2 — метациклическая, а RG_3 — нильпотентная группа. Поэтому в прообразе подгруппы порядка 12 фактор-группы G/R в группе G элемент порядка 3 действует нерегулярно. Следовательно, в силу леммы В. Д. Мазурова [4] G_2 — группа кватернионов порядка 8 и $|R| = 2$. Применяя лемму Шура [12], получаем $G \simeq SL(2, 5)$.

2). $G/R \simeq PSL(2, 11)$. Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что $G \simeq SL(2, 11)$.

3). $G/R = \bar{G} \simeq PGL(2, 11)$. Тогда если A — прообраз в G подгруппы $\bar{A} \simeq PSL(2, 11)$ из $\bar{G}$, то по предыдущему $A \simeq SL(2, 11)$ Следовательно, $G = A \leftthreetimes \langle x \rangle$, где $x^2 = 1$ и $G/Z(A) \simeq PGL(2, 11)$. Нетрудно убедиться, что нормализатор $N = N_G(G_5)$ силовской 5-подгруппы G_5 в группе G является неметациклической группой порядка 40. Так как G не содержит подгрупп порядка $13 \cdot 3$, то N недополняем в G. Следовательно, этот случай невозможен. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — неразрешимая группа с дополняемыми неметациклическими подгруппами. Если $G/R(G)$ изоморфна $PSL(2, 5)$, то $G = A \times B$, где $A \simeq PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$, а B — метациклическая вполне факторизуемая $2'$-группа, причем $5^2 \dagger |B|$, $3^2 \dagger |B|$.*

Доказательство. Пусть G — контрпример минимального порядка к лемме. Тогда ввиду леммы 3 $R = R(G)$ — не 2-группа. Далее, R — метациклическая группа и, значит, сверхразрешима. Поэтому подгруппа

R дисперсивна по Оре. Пусть p — наибольшее простое число, делящее $|R|$, и P — силовская p-подгруппа из R. Тогда $P \lhd G$. Рассмотрим следующие случаи.

а). $p > 5$. По теореме Цассенхауза [5, с. 126] $G = P \rtimes H$. В силу выбора группы G имеет место разложение $H = A \times C$, где $A \simeq PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$, а C — метациклическая вполне факторизуемая $2'$-группа, причем $5^2 \dagger |C|$, $3^2 \dagger |C|$. Тогда $G = P \rtimes (A \times C)$. Если $C \neq 1$, то $PA \neq G$ и потому $PA = P \times A$ и $G = A \times PC$, что противоречит выбору G. Пусть $C = 1$, т. е. $G = P \rtimes A$. Так как подгруппа $\Phi(P) \cdot A$ неметациклическая и, значит, дополняема в G, то $\Phi(P) = 1$. Ввиду недополняемости в группе A ее силовской 2-подгруппы T группа PT метациклична. Отсюда, из теоремы Машке [5] и из неметацикличности нормализатора $N_A(T)$ следует $[P, T] = 1$. Но тогда $[P, A] = 1$. Пришли к противоречию.

б). $p = 5$. Тогда $G/P = \bar{G} = \bar{A} \times \bar{B}$, где $\bar{A} \simeq PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$ и $|\bar{B}| = 3$ или 1. Пусть сначала $|\bar{B}| = 3$. Тогда если A — прообраз подгруппы $\bar{A}$ в G, то в силу выбора группы G подгруппа A равна $A_1 \times B_1$, где $|B_1| = 5$, а $A_1 \simeq PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$. Отсюда и из теоремы Гашютца [5] следует $G = B_1 \times G_1$. В силу выбора группы G $G_1 = D \times V$, где $D \simeq PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$, а $|V| = 3$. Противоречие.

Пусть теперь $|B| = 1$. Если P — абелева группа, то $[P, G_3] = 1$, так как $PSL(2, 5)$ и $SL(2, 5)$ не содержат подгрупп индекса 3. Поэтому $C_G(P) = G$. Пусть K — прообраз в G неабелевой подгруппы порядка 10 из G/R. Так как K/R ненильпотентна, то и K — тоже ненильпотентная группа с абелевыми силовскими подгруппами. Следовательно, $K' \cap Z(K) = 1$ и K' дополняем в K (см. [5], § 14 гл. VI). Так как, очевидно, $P \cap K' = 1$ и PK' — силовская 5-подгруппа из G, то по теореме Гашютца $G = P \times G_1$, где $G_1 \simeq PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$. Пришли к противоречию.

Пусть P — неабелева группа. Тогда, рассматривая фактор-группу G/P', в силу выбора группы G получаем $|P/P'| = 5$. Противоречие.

в). $p = 3$. Пусть сначала P — абелева группа. Тогда ввиду метацикличности P ее централизатор $C_G(P)$ содержит силовскую 5-подгруппу G_5 группы G. Отсюда следует, что $C_G(P) = G$. Пусть L — прообраз в G неабелевой подгруппы порядка 6 из G/R. Повторяя для L рассуждения из пункта б) для подгруппы K, приходим к противоречию. Случай неабелевой группы P рассматривается аналогично пункту б). Лемма доказана.

Л е м м а 5. *Пусть G — неразрешимая группа с дополняемыми неметациклическими подгруппами. Если $G/R(G) \simeq PSL(2, 11)$, то G относится к одному из следующих двух типов групп:*

1) *$G = A \times B$, где $A \simeq PSL(2, 11)$, B — метациклическая вполне факторизуемая $2'$-группа, причем $3^2 \dagger |B|$, $5^2 \dagger |B|$;*

2) *$G = A \times B \times C$, где $A \simeq SL(2, 11)$, B—метациклическая вполне факторизуемая $\{2, 5\}'$-группа, $|C| = 1$ или 5, причем $11^2 \dagger |B|$, $3^2 \dagger |B|$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.

Л е м м а 6. *Пусть G — неразрешимая группа с дополняемыми неметациклическими подгруппами. Если $G/R(G) \simeq PGL(2, 11)$, то $G = A \times B$, где $A \simeq PGL(2, 11)$, B — метациклическая вполне факторизуемая $2'$-группа, причем $3^2 \dagger |B|$, $5^2 \dagger |B|$, $11^2 \dagger |B|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — контрпример минимального порядка к лемме. Пусть, далее, $\bar{K}$ — нормальная в $\bar{G} = G/R(G)$ подгруппа, изоморфная $PSL(2, 11)$. Тогда ее прообраз K в G ввиду лемм 3 и 5 имеет разложение $K = L \times B$, где $L \simeq PSL(2, 11)$ и B — $2'$-группа. Так как группа K неметациклична, то $G = (L \times B) \rtimes \langle a \rangle$, где $a^2 = 1$. Нетрудно убедиться, что подгруппы L и B можно считать нормальными в G.

Покажем, что $[B, a] = 1$. В самом деле, $L\langle a \rangle$ содержит подгруппу порядка 110 с циклической подгруппой F порядка 10 Так как нормализатор $N_L(T)$ подгруппы T порядка 5 из F в L неабелев порядка 10, то силовская 2-подгруппа из $N = N_{\langle L,a \rangle}(T)$ нециклическая порядка 4. При этом $N \not\subset LB$. Если $[B, N] \neq 1$, то подгруппа BN неметациклична и потому дополняема в G. Так как $|BN \cap L| = 10$, то дополнение Q имеет порядок 66, причем $Q \cap B = 1$. Но $G/B \simeq PGL(2, 11)$ не содержит подгрупп порядка 11·3. Из полученного противоречия следует, что $[B, N] = 1$, и потому B является прямым множителем группы G. Тогда если $G = A \times B$, то $A \simeq PGL(2, 11)$, а B — вполне факторизуемая метациклическая $2'$-группа. Так как подгруппы порядков 3, 11 и 5 из A недополняемы в A, то 3^2, 11^2 и 5^2 не делят порядок B. Лемма доказана.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих трех утверждений.

Лемма 7. *Пусть $G = A \times B$, где B — вполне факторизуемая группа. Если H — такая подгруппа из G, что произведение BH дополняемо в G, то она дополняема в G.*

Лемма 8. *Пусть G — неметациклическая группа с метациклической силовской p-подгруппой. Если $G = H \times \langle a \rangle$, где $|a| = p^{\alpha}$, то H — неметациклическая группа.*

Лемма 9. *Пусть $G = H \times \langle a \rangle$, где $|a| = p$, и в группе H дополняемы все неметациклические подгруппы. Если силовская p-подгруппа группы H циклическая, то в группе G дополняемы все неметациклические подгруппы.*

Доказательство теоремы. Необходимость следует из лемм 2, 4—6.

Достаточность. Прежде всего заметим, что в группе типа 2 можно считать ввиду леммы 9, что $|C| = 1$.

Пусть G — группа одного из типов 1—3 доказываемой теоремы, H — ее неметациклическая подгруппа. Ввиду леммы 7 доказательство дополняемости H в группе G сводится к доказательству дополняемости в G подгруппы HB. Так как $T = HB = B \times A_1$, где $A_1 \subset A$, то последнее очевидно, если A_1 дополняема в A, в частности, если она неметациклична.

Предположим, что A_1— метациклическая подгруппа из A и рассмотрим подгруппу $T = A_1 \times B$ из G. Покажем, что T либо метациклическая, либо дополняема в G. Пусть $K \lhd A_1$, $L \lhd B$ и группы K, L, A_1/K и B/L — циклические. Тогда $T/KL = A_1L/KL \cdot BK/KL$, причем $A_1L/KL \simeq A_1/K(A_1 \cap \cap L) \simeq A_1/K$, $BK/KL \simeq B/L$ [13, с. 49].

Рассмотрим возможные случаи.

1. $A \simeq PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$. Так как B — $2'$-группа, то можно считать, что $(|L|, 30) = 1$. Но тогда KL — циклическая группа. Далее, A_1/K — 2-группа, а B/L — $2'$-группа. Значит, T/KL — циклическая, а T — метациклическая группа.

2. $A \simeq PSL(2, 11)$. Если $|A_1| \vdots 11$, то $A_1 \subset N_A(A_{11})$, порядок которого 11·5. Если $|A_1| = 11$, то подгруппа $Q \simeq PSL(2, 5)$, а если $|A_1| = 11 \cdot 5$, то подгруппа $Q_1 \simeq A_4$ из A дополняет A_1 в A (а значит, H в G).

Пусть $11 \nmid |A_1|$. Аналогично случаю 1 убеждаемся, что T — метациклическая группа.

3. $A \simeq SL(2, 11)$. Тогда можно считать, что $(|L|, 330) = 1$ и потому KL — циклическая группа. Если $11 \mid |A_1|$, то $|A_1/K| \mid 10$. Так как B — $\{2, 5\}'$-группа, то T — метациклическая группа. Если $11 \nmid |A_1|$, то рассуждения аналогичны случаю 1.

4. $A \simeq PGL(2, 11)$. Если $11 \mid |A_1|$, то $A_1 \subset N = N_A(A_{11})$, порядок которого 110. Если $A_1 = N$, то поскольку $N \not\subset R \subset A$, $R \simeq PSL(2, 11)$, то подгруппа, изоморфная A_4 из R, дополняет A_1 в A. Если же $|A_1| = 11 \cdot 5$, то эта подгруппа дополняется в A нормализатором в A силовской 2-подгруппы R_2 из R. Отметим наконец, что если $|A_1| = 11$, то ввиду леммы 7 T — метациклическая группа.

Пусть $11 \nmid |A_1|$. Аналогично случаю 1 убеждаемся, что T — метациклическая группа. Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
2. *Зуб О. Н.* Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы // Группы с ограничениями для подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1971.— С. 134—158.
3. *Барышовец П. П.* О конечных группах с дополняемыми неметациклическими подгруппами // Укр. мат. журн.— 1979.— 31, № 1.— С. 6—12.
4. *Мазуров В. Д.* О конечных группах с метациклическими силовскими подгруппами // Сиб. мат. журн.— 1967.— 8, № 5.— С. 966—982.
5. *Huppert B.* Endliche Gruppen I.— Berlin etc. : Springer, 1967.— 793 S.

6. *Ito N.* On the factorisations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$ // Acta scie. math.— 1953.— **15**.— P. 79—84.
7. *Walter J. H.* The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups // Ann. Math.— 1969.— **89**, N 3.— P. 405—514.
8. *Goldschmidt D. M.* 2-Fusion in finite groups // Ibid. — 1974.— **99**, N 1.— P. 70—117.
9. *Алеев Р. Ж.* Конечные группы с циклическими коммутантами силовских 2-подгрупп // Мат. сб.— 1975.— **97**, № 3.— С. 323—340.
10. *Blaum M.* Factorizations of the simple groups $PSL(3, q)$ and $PSU(3, q^2)$ // Arch. Math.— 1983.— **40**, N 1.— P. 8—13.
11. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.
12. *Schur J.* Untersuchungen uber du Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen // J. reine und angen. Math.— 1907.— **132**.— S.85—137.
13. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.

Киев. ин-т инженеров гражд. авиации Получено 28.06.85

УДК 517.1

А. М. Гомилко

Закон асимптотических выражений в теории функциональных уравнений в K_σ-пространствах

Пусть X — K_σ-пространство с классом положительных элементов X_+ (пользуемся терминологией и определениями из [1]). Для любого $x \in X_+$ обозначим через X_x подпространство тех $y \in X$, для которых $|y| \leqslant \alpha x$ при некоторой постоянной $\alpha > 0$, зависящей от y. Пусть A — положительный (o)-линейный оператор в X. Предположим, что для некоторых элементов $z \in X_+$, $w \in X_+$

$$z - Az = w. \tag{1}$$

Тогда согласно результатам Л. В. Канторовича (см. [1], гл. XII), для любого $v \in X_w$ в X_z существует единственное решение уравнения

$$x - Ax = v. \tag{2}$$

Это решение может быть получено по методу последовательных приближений (относительно (o)-сходимости в X) при начальном элементе $x_0 = 0$:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} A^k v. \tag{3}$$

Всюду далее такие решения будем называть главными. При этом если $|v| \leqslant \alpha w$, то $|x| \leqslant \alpha z$, если $v \in X_+$, то $x \in X_+$.

Приведенные утверждения Л. В. Канторовича обобщают на функциональные уравнения в K_σ-пространствах результаты Б. М. Кояловича [2], относящиеся к разрешимости и методу последовательных приближений для бесконечных регулярных алгебраических систем линейных уравнений. В работе [2] при определенных условиях установлено существование предела у ограниченной последовательности неизвестных x_j алгебраической системы при $j \to \infty$. Этот результат Б. М. Кояловича, названный им законом асимптотических выражений, не нашел своего отражения в рамках теории функциональных уравнений в K_σ-пространствах. В настоящей работе на основании методики [2] устанавливается закон асимптотических выражений в абстрактной формулировке (теорема 1). Попутно исправлены неточности в формулировках и доказательствах из [2], отмеченные в [3]. Результаты [2] нашли важное применение и дальнейшее развитие в [4] при изучении граничных задач теории упругости.

1. Пусть $X_k \subset X_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, — некоторая последовательность главных компонент пространства X. Обозначим через P_k оператор проектирования X на X_k, а через Q_k — оператор проектирования X на дизъюнкт-