1. *Болтянский В. Г., Солтан П. С.* Комбинаторная геометрия и классы выпуклости // Успехи мат. наук.— 1978.— **33**, № 1.— С. 3—42.
2. *Остапенко В. В.* Линейные дифференциальные игры, в которых основные операторы допускают простое управление // Докл. АН СССР.— 1981.— **261**, № 4.— С. 808—810.
3. *Остапенко В. В.* Метод H-выпуклых множеств в дифференциальных играх // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 12.— С. 62—64.
4. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб.— 1980.— **112**, № 3.— С. 307—330.
5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974.— 455 с.
6. *Пшеничный Б. Н.* Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР.— 1969.— **184**, № 2.— С. 285—287.
7. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями // Там же.— 1981.— **256**, № 3.— С. 530—535.
8. *Никольский М. С.* Об одном прямом методе решения линейных дифференциальных игр преследования — убегания // Мат. заметки.— 1983.— **33**, № 6.— С. 885—891.
9. *Данильченко В. Е., Остапенко В. В., Яковлева А. П.* Линейная модель движения воды в каналах оросительной системы с учетом накопительных бассейнов // Теоретические и прикладные вопросы автоматизации управления мелиоративными системами.— Киев: УкрНИИ гидротехники и мелиорации, 1984.— С. 25—30.
10. *Данильченко В. Е., Остапенко В. В., Яковлева А. П.* Метод прогноза управления оросительной системой в условиях текущего планирования // Там же.— С. 31—40.

Ин-т кибернетики АН УССР, Киев — Получено 03.07.85

УДК 519.1

В. А. Павленко

О числе орграфов периодических точек непрерывного отображения отрезка в себя

В последнее время появилось много работ (см., например, [1—3]), в которых в терминах орграфов доказывается известный результат А. Н. Шарковского [4].

Напомним определение n-периодического орграфа, приведенное в [3]. Пусть $f: R \to R$ — непрерывная функция и $a \in R$ — периодическая точка периода n функции f, т. е. числа a, $f(a), \ldots, f^{n-1}(a)$ все различны и $f^n(a) = a$. Определим n-периодический орграф $G_f(a)$, задаваемый периодической точкой a функции f следующим образом. Числа a, $f(a), \ldots, f^{n-1}(a)$ упорядочим по возрастанию. Пусть $a_0 = f^{i_0}(a) < a_1 = f^{i_1}(a) < \ldots < a_{n-1} = f^{i_{n-1}}(a)$; при этом полагаем $f_0(a) \equiv a$. Орграф $G_f(a)$ имеет $n-1$ вершин, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n-1$. Дуга (i, j) принадлежит орграфу $G_f(a)$ тогда и только тогда, когда отрезок $[a_{j-1}, a_j]$ лежит между числами $f(a_{i-1})$ и $f(a_i)$.

Орграф $G_f(a)$, построенный по n-периодической точке a функции f, интересен тем, что если в нем есть неповторный цикл длины m, то на отрезке $[a_0, a_{n-1}]$ функция f имеет периодическую точку периода m [1]. Под неповторным циклом понимается такой цикл, который не состоит из нескольких повторений цикла меньшей длины. На основании этого факта в работах [1—3] доказывается теорема Шарковского. В работе [3] ставится вопрос об описании n-периодических орграфов. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы найти число неизоморфных n-периодических орграфов.

С периодической точкой a функции f свяжем подстановку π_f, действующую на $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$, следующим образом: $\pi_f(i) = j \Leftrightarrow f(a_i) = a_j$. Заметим, что подстановка π_f является циклической подстановкой длины k. Определим орграф G_{π_f}, порожденный подстановкой π_f, следующим образом. Орграф G_{π_f} имеет $k-1$ вершин, занумерованных числами $1, 2, \ldots, k-1$.

Вершины i и j в орграфе G_{π_f} соединены дугой (i, j) тогда и только тогда, когда числа j и $j-1$ лежат между числами $\pi_f(i)$ и $\pi_f(i-1)$. Легко видеть, что орграфы $G_f(a)$ и G_{π_f} совпадают. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать орграфы, порожденные циклическими подстановками.

Пусть $G(V)$ — n-вершинный орграф на множестве вершин V ($|V| = n$) и ν — нумерация его вершин числа $1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $G(V; \nu)$ орграф $G(V)$, вершины которого занумерованы в соответствии с нумерацией ν. Нумерацию ν назовем правильной, если существует циклическая подстановка π, действующая на $\{0, 1, \ldots, n\}$, такая, что порожденный ею орграф G_π совпадает с $G(V; \nu)$.

Заметим, что существуют такие орграфы, что при любой нумерации их вершин они не порождаются никакой циклической подстановкой (например, контур на трех вершинах). Существуют также орграфы, которые при одной нумерации вершин не порождаются циклической подстановкой, а при другой нумерации — порождаются.

Пусть $G(V)$ — орграф с множеством вершин V и множеством дуг E, $a \in V$ — его вершина. Обозначим через V_a множество вершин, которые смежны с a по исходящим из нее дугам, т. е. $V_a = \{b \in V \mid (a, b) \in E\}$, через W_a — множество вершин, смежных с a по входящим в нее дугам, т. е. $W_a = \{b \in V \mid (b, a) \in E\}$. Через $\operatorname{rest}(p, q)$ обозначим остаток от деления целого числа p на целое число q, через $A \Delta B$ — симметрическую разность множеств A и B.

Определение 1. *Конечное множество I натуральных чисел называется интервальным, если для любых p и q из I множество I содержит также все натуральные числа, лежащие между p и q.*

Определение 2. *Интервальные множества $I_1 = [i_1, j_1]$ (i_1 — его левый конец, j_1 — его правый конец) и $I_2 = [i_2, j_2]$ называются соседними, если выполнено одно из условий:*

1) если числа i_1 и i_2 различны и различны числа j_1 и j_2, то либо $i_1 \leqslant j_1 < i_2 \leqslant j_2$ и $i_2 = j_1 + 1$, либо $i_2 \leqslant j_2 < i_1 \leqslant j_1$ и $i_1 = j_2 + 1$;

2) если I_1 и I_2 имеют общий конец, то либо $I_1 \subseteq I_2$, либо $I_2 \subseteq I_1$.

Отметим, что если вершины $(n+1)$-периодического орграфа правильно занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$, то каждое V_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — интервальное множество и множества V_j и V_{j+1}, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, являются соседними.

Пусть $G(V)$ — $(n+1)$-периодический орграф, допускающий правильную нумерацию ν своих вершин, при которой орграф $G(V; \nu)$ порождается подстановкой g. Тогда справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Множества $V_1, V_2, \ldots, V_n$, определяемые орграфом $G(V; \nu)$, попарно различны.*

Доказательство. Пусть $V_p = V_q = [a, b]$ при $p \neq q$. Тогда в силу построения орграфа G_g, порожденного подстановкой g, подстановка g должна отображать числа $p-1$, $q-1$, q в $a-1$ и b. Так как $p \neq q$, то среди чисел $p-1$, p, $q-1$, q имеются по крайней мере три различных числа, отображаемых в $\{a-1, b\}$, что невозможно.

Лемма 2. *Множества $W_1, W_2, \ldots, W_n$, определяемые орграфом $G(V; \nu)$, попарно различны.*

Доказательство. В силу построения орграфа G_g, если $j \in W_p \cap W_q$, то $V_j \supseteq [p, q]$. Если предположить, что $W_p = W_q$ для $p \neq q$, то для каждого интервального множества V_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, либо $V_j \cap [p, q] = [p, q]$, либо $V_j \cap [p, q] = \varnothing$. Это означает, что подстановка g не принимает значений p, $p+1, \ldots, q-1$, что невозможно.

Лемма 3. *Множества $W_1 \triangle W_2, W_2 \triangle W_3, \ldots, W_{n-1} \triangle W_n$ являются интервальными, каждое из которых состоит не более чем из двух элементов. Причем если $|W_i \triangle W_{i+1}| = 1$, то либо $W_i \triangle W_{i+1} = \{1\}$, либо $W_i \triangle W_{i+1} = \{n\}$.*

Доказательство. Множество $W_i \triangle W_{i+1}$ не пусто (лемма 2). Пусть $k \in W_i \triangle W_{i+1}$. Не ограничивая общности будем считать, что $k \in W_i$

и $k \notin W_{i+1}$. Тогда в орграфе $G(V; \nu)$ имеется дуга (k, i) и, следовательно, $i \in V_k$. С другой стороны, в орграфе $G(V; \nu)$ нет дуги $(k, i+1)$ и, следовательно, $i+1 \notin V_k$. Таким образом, число i является правым концом множества V_k, т. е. $V_k = [r, i]$, и в силу построения орграфа G_g либо $g(k-1) = r-1$ и $g(k) = i$, либо $g(k-1) = i$ и $g(k) = r-1$.

Пусть $g(k-1) = r-1$, $g(k) = i$ и $k < n$. Если $g(k+1) < i$, то i является правым концом интервального множества V_{k+1} и тогда $k+1 \in \in W_i \setminus W_{i+1}$; если $g(k+1) > i$, то $i+1$ является левым концом множества V_{k+1} и тогда $k+1 \in W_{i+1} \setminus W_i$. Таким образом, в обоих случаях $\{k, k+1\} \subseteq W_i \triangle W_{i+1}$. Если предположить, что некоторое $p \notin \{k, k+1\}$ принадлежит множеству $W_i \triangle W_{i+1}$, то в случае, когда $p \in W_i \setminus W_{i+1}$, i является правым концом множества Vp и поэтому либо $g(p-1) = i$, либо $g(p) = i$, что невозможно; в случае, когда $p \in W_{i+1} \setminus W_i$, $i+1$ является левым концом множества V_p и поэтому либо $g(p-1) = i$, либо $g(p) = i$, что также невозможно. Таким образом, если $k < n$, то $W_i \triangle W_{i+1} = \{k, k+1\}$. Если же $k = n$, то $W_i \triangle W_{i+1} = \{n\}$. Аналогичным образом рассматривается случай, когда $g(k-1) = i$, $g(k) = r-1$, и показывается, что если $k > 1$, то $W_i \triangle W_{i+1} = \{k-1, k\}$ и если $k = 1$, то $W_i \triangle W_{i+1} = \{1\}$.

Лемма 4. *Если* $W_i \triangle W_{i+1} = \{j, j+1\}$, *то* $g(j) = i$; *если* $W_i \triangle W_{i+1} = \{n\}$, *то* $g(n) = i$; *если* $W_i \triangle W_{i+1} = \{1\}$, *то* $g(0) = i$.

Доказательство. Пусть $W_i \triangle W_{i+1} = \{j, j+1\}$. Если $\{j, j+1\} = W_{i+1} \setminus W_i$, то число i является правым концом множеств V_j и V_{j+1} и поэтому $g(j) = i$. Если $\{j, j+1\} = W_{i+1} \setminus W_i$, то число $i+1$ является левым концом множеств V_j и V_{j+1} и поэтому $g(j) = i$. Если $j \in W_i \setminus W_{i+1}$ и $j+1 \in W_{i+1} \setminus W_i$ то, очевидно, число i является правым концом множества V_j, а число $i+1$ — левым концом множества V_{j+1}, и тогда $g(j) = i$. И наконец, если $j \in W_{i+1} \setminus W_i$ и $j+1 \in W_i \setminus W_{i+1}$, то число $i+1$ является левым концом множества V_j, а число i — правым концом множества V_{j+1}, и тогда $g(j) = i$. Аналогичным образом лемма доказывается в случаях, когда $W_i \triangle W_{i+1} = \{n\}$ и $W_i \triangle W_{i+1} = \{1\}$.

Лемма 5. *Если для некоторого* j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $W_j = \{i\}$, *то* $j = n+1-i$.

Доказательство. Пусть $W_j = \{i\}$. Рассмотрим поведение подстановки g на множествах $A = \{0, 1, \ldots, i-1\}$ и $B = \{i, i+1, \ldots, n\}$. Легко видеть, что имеются лишь две возможности: 1) $\forall p \in A$ $g(p) < j$, $\forall q \in B$ $g(q) \geqslant j$; 2) $\forall p \in A$ $f(p) \geqslant j$, $\forall q \in B$ $g(q) < j$.

В первом случае $g(A) = \{g(p) \mid p \in A\} = A$ и $g(B) = B$ и тогда подстановка g должна иметь по крайней мере два цикла—один на множестве A, другой на B, что невозможно.

Во втором случае $g(A) = \{j, j+1, \ldots, n\}$ и $g(B) = \{0, 1, \ldots, j-1\}$. Так как $|g(A)| = |A|$, то $n+1-j = i$.

Лемма 6. *Множества* W_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, *таковы, что* $|W_j| \leqslant 2\min(j, n+1-j)$.

Доказательство. Допустим, что для некоторого j_0 $|W_{j_0}| > > 2\min(j_0, n+1-j_0)$. Это означает, что среди интервальных множеств $V_1, V_2, \ldots, V_n$ имеется ровно $|W_{j_0}|$ множеств, у каждого из которых левый конец $\leqslant j_0$, а правый $> j_0$. Тогда среди чисел $0, 1, 2, \ldots, n$ должно быть не менее чем $|W_{j_0}|/2$ чисел, которые g отображала бы в $\{0, 1, \ldots, j_0 - 1\}$, и $|W_{j_0}|/2$ чисел, которые g отображала бы в $\{j_0, j_0+1, \ldots, n\}$, что невозможно.

Лемма 7. *Если множество* W_j *состоит только из двух элементов* p *и* q, *то* $|p-q| = j$, *либо* $|p-q| = n+1-j$.

Доказательство. Пусть $W_j = \{p, q\}$ и $q > p$. Рассмотрим действие подстановки g на множествах $A = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $B = \{p, p+1, \ldots \ldots, q-1\}$, $C = \{q, q+1, \ldots, n\}$. Заметим, что $|A| = p$, $|B| = q-p$ и $|C| = = n+1-q$. Очевидно имеется лишь две возможности: 1) $\forall k \in A \cup C$ $g(k) < j$ и $\forall l \in B$ $g(l) \geqslant j$; 2) $\forall k \in A \cup C$ $g(k) \geqslant j$ и $\forall l \in B$ $g(l) < j$.

Рассмотрим первый случай. Если $n + 1 - j < q - p$, то в B нашлись бы по крайней мере два числа, образы которых при отображении g совпадали, что невозможно; если $n + 1 - j > q - p$, то в $A \cup C$ нашлись бы по крайней мере два числа, образы которых при отображении g совпадали, что также невозможно. Следовательно, $q - p = n + 1 - j$. Аналогичным образом рассматривается и второй случай и показывается, что $q - p = j$.

Лемма 8. *Если множество $W_i \triangle W_j$ состоит только из двух элементов p и q, то либо $|p - q| = |j - i|$ либо $|p - q| = n + 1 - |j - i|$. Если множество $W_i \triangle W_j$ состоит только из одного элемента p, то либо $|j - i| = p$, либо $|j - i| = n + 1 - p$.*

Доказательство. Пусть $W_i \triangle W_j = \{p, q\}$ и $i < j$, $p < q$. Рассмотрим случай $\{p, q\} = W_i \setminus W_j$. Тогда при $1 \leqslant s < p$ концы a_s и b_s интервального множества $V_s = [a_s, b_s]$ либо оба принадлежат множеству $D = \{i + 1, i + 2, \ldots, j - 1\}$, либо оба не принадлежат ему. Если $a_s, b_s \in D$, $1 \leqslant s < p$, то и концы a_t, b_t интервальных множеств $V_t = [a_t, b_t]$, $q < t \leqslant n$, принадлежат множеству D. Поскольку g — подстановка, то справедливо равенство $n + 1 - q + p = j - i$. Если $a_s, b_s \notin D$, $1 \leqslant s < p$, то концы a_t, b_t интервальных множеств $V_t = [a_t, b_t]$, $p < t < q$, должны принадлежать D, а также правый конец b_p множества V_p должен принадлежать множеству D. Следовательно, в этом случае справедливо равенство $j - i = q - p$. Аналогичным образом доказывается справедливость леммы в остальных трех случаях, т. е. когда $\{p, q\} = W_j \setminus W_i$, $p \in W_i \setminus W_j$, а $q \in W_j \setminus W_i$, $p \in W_j \setminus W_i$, а $q \in W_i \setminus W_j$.

Пусть $W_i \triangle W_j = \{p\}$. Тогда концы интервальных множеств V_s, $s \neq p$, либо оба принадлежат множеству D, либо оба не принадлежат D, либо один из концов множества $V_p = [a_p, b_p]$ принадлежит D, а другой не принадлежит ему. Если $a_s, b_s \in D$, $1 \leqslant s < p$, то $a_t, b_t \notin D$, $p < t \leqslant n$, и тогда выполняется равенство $|j - i| = p$; если $a_s, b_s \notin D$, $1 \leqslant s < p$, то $a_t, b_t \in D$, $p < t \leqslant n$, и тогда справедливо равенство $|j - i| = n + 1 - p$. Лемма доказана.

Пусть $G(V)$ — $(n + 1)$-периодический орграф, ν и μ — правильные нумерации его вершин. Пусть подстановка $\varphi = \begin{pmatrix} 1\ 2 \ldots n \\ j_1 j_2 \ldots j_n \end{pmatrix}$ переводит нумерацию ν в нумерацию μ ($\mu = \varphi(\nu)$), т. е. орграф $G(V; \mu)$ получается из орграфа $G(V; \nu)$ перенумерацией вершин последнего согласно подстановке φ (вершине номера i орграфа $G(V; \nu)$ присваивается номер $\varphi(i)$, $1 \leqslant i < n$). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 3$, ν и μ — правильные нумерации вершин $(n + 1)$-периодического орграфа $G(V)$, φ — подстановка, переводящая нумерацию ν в нумерацию μ. Тогда для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, выполняется одно из равенств: либо $|\varphi(k) - \varphi(k + 1)| = \varphi(1)$, либо $|\varphi(k) - \varphi(k + 1)| = n + 1 - \varphi(1)$.*

Доказательство. Орграф $G(V; \nu)$ задает множества W_1, W_2, …, W_n, где каждое W_n есть множество тех вершин орграфа $G(V; \nu)$, которые смежны с вершиной j по заходящим в нее дугам. Чтобы не возникало путаницы, соответствующие множества, задаваемые орграфом $G(V; \mu)$, будем обозначать через Y_1, Y_2, …, Y_n. Легко видеть, что $Y_{\varphi(j)} = \{\varphi(i) \mid i \in W_j\}$.

Пусть орграф $G(V; \nu)$ порождается циклической подстановкой π. Множества $W_1 \triangle W_2$, $W_2 \triangle W_3, \ldots, W_{n-1} \triangle W_n$ являются интервальными, каждое из которых состоит не более чем из двух элементов. Эти множества попарно различны. Действительно, если $W_{k+1} \triangle W_k = \{i, i + 1\} = W_p \triangle W_{p+1}$, то $k = \pi(i) = p$ (лемма 4); если $W_k \triangle W_{k+1} = \{1\} = W_p \triangle W_{p+1}$, то $k = \pi(0) = p$; если $W_k \triangle W_{k+1} = \{n\} = W_p \triangle W_{p+1}$, то $k = \pi(n) = p$. Тогда множества $Y_{\varphi(1)} \triangle Y_{\varphi(2)}, Y_{\varphi(2)} \triangle Y_{\varphi(3)}, \ldots, Y_{\varphi(n-1)} \triangle Y_{\varphi(n)}$ также попарно различны и каждое из них содержит не более двух элементов.

Отметим, что по крайней мере одно из множеств W_1 или W_n содержит в точности два элемента. Действительно, каждое из них содержит не более двух элементов (лемма 6) и если $|W_1| = |W_n| = 1$, то $W_1 = \{n\}$, $W_n = \{1\}$ (лемма 5) и тогда $\pi(n) = 0$ и $\pi(0) = n$, что при $n \geqslant 3$ невозможно.

Не ограничивая общности будем считать, что $W_1 = \{i_1, i_1 + 1\}$, т. е. $\pi(i_1) = 0$. По множеству W_1 построим последовательность множеств $S = \{A_j\}$, $j = 1, \ldots, n+1$, следующим образом. Множество A_1 полагаем равным W_1 и для $j > 1$

$$A_j = \begin{cases} W_{i_{j-1}} \triangle W_{i_{j-1}+1}, & \text{если } A_{j-1} = \{i_{j-1}, i_{j-1}+1\}, \\ W_{i_{j-1}}, & \text{если } A_{j-1} = \{i_{j-1}\}. \end{cases}$$

Заметим, что если $A_j = W_{i_{j-1}} \triangle W_{i_{j-1}+1} = \{i_j, i_{j+1}\}$, то $\pi(i_j) = i_{j-1}$ и если $A_j = \{i_j\} = W_{i_{j-1}} \triangle W_{i_{j-1}+1}$, то либо $i_j = 1$, либо $i_j = n$ (леммы 4, 3) и тогда $i_{j-1} = \begin{cases} \pi(0), & \text{если } i_j = 1, \\ \pi(n), & \text{если } i_j = n. \end{cases}$ Отсюда легко видеть, что если $j < n+1$, то $A_j \neq \{1\}$, в противном случае подстановка π имела бы цикл $\begin{pmatrix} 0 & i_{j-1} & \ldots & i_2 & i_1 \\ i_{j-1} & i_{j-2} & \ldots & i_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Покажем что $A_p \neq A_q$ при $p \neq q$. Предположим, что $A_p = A_q$ и $p < q$. Тогда в силу леммы 4 подстановка π на множествах действует следующим образом: $\pi(i_q) = i_{q-1}$, $\pi(i_{q-1}) = i_{q-2}, \ldots, \pi(i_{p+1}) = i_p = i_q$, т. е. π имеет цикл длины $q - p$, что невозможно. Отсюда следует, что $A_{n+1} = \{1\}$, а среди интервальных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеется ровно $n - 1$ различных двухэлементных множеств и одно множество, совпадающее с $\{n\}$. Пусть $A_p = \{n\}$. Таким образом, последовательность S имеет вид $A_1 = W_1 = \{i_1, i_1 + 1\}$, $A_2 = W_{i_1} \triangle W_{i_1+1} = \{i_2, i_2 + 1\}, \ldots, A_{p-1} = W_{i_{p-2}} \triangle W_{i_{p-2}+1} = \{i_{p-1}, i_{p-1} + 1\}$, $A_p = W_{i_{p-1}} \triangle W_{i_{p-1}+1} = \{n\}$, $A_{p+1} = W_n = \{i_p, i_p + 1\}, \ldots, A_n = W_{i_{n-1}} \triangle W_{i_{n-1}+1} = \{i_n, i_n + 1\}$, $A_{n+1} = W_{i_n} \triangle W_{i_n+1} = \{1\}$. Тогда $Y_{\varphi(1)} = \{\varphi(i_1), \varphi(i_1 + 1)\}$, $Y_{\varphi(i_1)} \triangle Y_{\varphi(i_1+1)} = \{\varphi(i_2), \varphi(i_2 + 1)\}, \ldots, Y_{\varphi(i_{p-2})} \triangle Y_{\varphi(i_{p-2}+1)} = \{\varphi(i_{p-1}), \varphi(i_{p-1} + 1)\}$, $Y_{\varphi(i_{p-1}+1)} \triangle Y_{\varphi(i_{p-1}+1)} = \{\varphi(n)\}$, $Y_{\varphi(n)} = \{\varphi(i_{p+1}), \varphi(i_{p+1} + 1)\}, \ldots, Y_{\varphi(i_{n-1})} \triangle Y_{\varphi(i_{n-1}+1)} = \{\varphi(i_n), \varphi(i_n + 1)\}$, $Y_{\varphi(i_n+1)} = \{\varphi(1)\}$. Применив леммы 7 и 8 к последним соотношениям, получим, что для каждого k, $k \neq p$ и $1 \leqslant k \leqslant n$, выполняется одно из равенств $|\varphi(i_k) - \varphi(i_k + 1)| = \varphi(1)$ либо $|\varphi(i_k) - \varphi(i_k + 1)| = n + 1 - \varphi(1)$, что доказывает теорему.

Следствие. *Если ν и μ — правильные нумерации вершин орграфа $G(V)$ и подстановка φ переводит нумерацию ν в μ, то $\varphi(k) = \mathrm{rest}(kp, n+1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и множества $\varphi(V_1), \varphi(V_2), \ldots, \varphi(V_n)$ являются интервальными, где число $p = \varphi(1)$ взаимно просто с $n + 1$, а $V_1, V_2, \ldots, V_n$ — последовательность интервальных множеств, определяемых орграфом $G(V; \nu)$.*

Теорема 2. *Пусть $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n & 0 \end{pmatrix}$ и G_h — орграф, порожденный подстановкой h. Если $\pi = h^p$, где p — взаимно просто с $n + 1$, то орграф G_π, порожденный циклической подстановкой π, получается из G_h перенумерацией вершин последнего согласно подстановке φ, где $\varphi(k) = \mathrm{rest}(kp, n+1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Если же циклическая подстановка π не совпадает с h^p ни для какого p, то орграф G_π допускает лишь одну правильную перенумерацию своих вершин, соответствующую подстановке ψ, где $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.*

Доказательство. Легко видеть, что орграф G_h определяет последовательность интервальных множеств $V_1 = \{2\}$, $V_2 = \{3\}, \ldots, V_{n-1} = \{n\}$, $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Очевидно подстановка φ сохраняет интервальность множеств $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Перенумеруем вершины орграфа G_h согласно подстановке φ. Орграф, который получился после перенумерации, обозначим через $\tilde{G}$, а множества смежных по исходящим дугам вершин, определяемые орграфом $\tilde{G}$, — через $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Пусть $\varphi = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$, т. е. $\operatorname{rest}(k_j p, n+1) = j$. Отметим, что $\operatorname{rest}(np, n+1) = n+1-p$. Тогда $X_1 = \varphi(V_{k_1}) = \{\varphi(k_1+1)\} = \{p+1\}$, $X_2 = \varphi(V_{k_2}) = \{\varphi(k_2+1)\} = \{p+2\}, \ldots, X_{n-p} = \{\varphi(k_{n-p}+1)\} = \{n\}, X_{n+1-p} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $X_{n+2-p} = \{1\}, \ldots, X_n = \{\varphi(k_n+1)\} = \{p-1\}$. Легко видеть, что последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n$ задает подстановку

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n-p & n-p+1 & n-p+2 & \ldots & n \\ p & p+1 & p+2 & \ldots & n & 0 & 1 & \ldots & p-1 \end{pmatrix} = h^p,$$

что доказывает первую часть теоремы.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть орграф G_π порождается подстановкой π такой, что ни для какого p подстановка h^p не совпадает с π. Тогда среди множеств $V_1, V_2, \ldots, V_n$, определяемых орграфом G_π, найдутся по крайней мере два множества V_s и V_t такие, что $|V_s| \geqslant 2$ и $|V_t| \geqslant 2$ и в силу леммы 1 одно из них не совпадает с $\{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть $V_t \neq \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда множество $\varphi(V_t)$ будет интервальным тогда и только тогда, когда $p = n$, т. е. $\varphi(k) = \operatorname{rest}(kn, n+1) = n+1-k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, $\varphi = \psi$, что доказывает вторую часть теоремы.

Пусть $d(n+1)$ — число всех неизоморфных $(n+1)$-периодических орграфов, $\alpha(n+1)$ — функция Эйлера, т. е. число взаимно простых с $n+1$ чисел меньших $n+1$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Число всех неизоморфных $(n+1)$-периодических орграфов равно*

$$d(n+1) = \begin{cases} \dfrac{n! - \alpha(n+1) + (n-1)!/(k-1)!}{2} + 1, & \text{если } n = 2k-1, \\[2ex] \dfrac{1}{2}(n! - \alpha(n+1)) + 1, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $n = 2k-1$. Множество H всех циклических подстановок степени $n+1$ разобьем на три подмножества H_1, H_2 и H_3 следующим образом. Подстановки вида h^p, где $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \ldots & n & 0 \end{pmatrix}$ и p взаимно просто с $n+1$, составляют множество H_1. Подстановки вида $\begin{pmatrix} 0 & i_1 & \ldots & i_{k-1} & n & n-i_1 & \ldots & n-i_{k-1} \\ i_1 & i_2 & \ldots & n & n-i_1 & n-i_2 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ составляют множество H_2. И, наконец, $H_3 = H \setminus (H_1 \cup H_2)$. Нетрудно видеть, что $|H_1| = \alpha(n+1)$, $|H_2| = (n-1)!/(k-1)!$ и $|H_3| = n! - (n-1)!/(k-1)! - \alpha(n+1)$.

В силу теоремы 2 подстановкам из H_1 соответствует один и тот же $(n+1)$-периодический орграф, а орграфы, порожденные подстановками из $H_2 \cup H_3$, допускают лишь две правильные нумерации вершин ν и μ, причем нумерация μ получается из ν перенумерацией согласно подстановке $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Легко видеть, что если орграф $G(V; \nu)$ порождается подстановкой $g = \begin{pmatrix} 0 & i_1 & \ldots & i_{n-1} & i_n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n & 0 \end{pmatrix}$, то орграф $G(V; \mu)$ порождается подстановкой $g_\psi = \begin{pmatrix} n & n-i_1 & \ldots & n-i_{n-1} & n-i_n \\ n-i_1 & n-i_2 & \ldots & n-i_n & n \end{pmatrix}$. Заметим, что если $g \in H_2$, то $g = g_\psi$. Поэтому двум различным подстановкам из H_2 соответствуют различные $(n+1)$-периодические орграфы. Подстановки π, π_ψ из H_3 задают один и тот же $(n+1)$-периодический орграф. Таким образом, число $(n+1)$-периодических орграфов равно $1 + |H_2| + \frac{1}{2}|H_3|$, что доказывает теорему в случае, когда $n = 2k-1$.

В случае $n = 2k$ множество H_2 является пустым, а H_3 содержит $n! - \alpha(n+1)$ подстановок и тогда число $(n+1)$-периодических орграфов равно $1 + \frac{1}{2}|H_3|$. Теорема доказана.

1. *Li T.-V.*, *York J.* Period three implies chaos // Amer. Math. Mon.— 1975.— **82**.— P. 985—992.
2. *Stefan P.* A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line // Communs Math. Phys.— 1977.— **54**.— P. 237—248.
3. *Straffin P. D.* Periodic points of continuous functions // Math. Mag.— 1978.— **51**, N 2.— P. 98—105.
4. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывных преобразований прямой в себя // Укр. мат. журн.— 1964.— **16**, № 1.— С. 61—71.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 04.11.85

УДК 517.5

С. В. Переверзев, Ж. Е. Мырзанов

Об одной задаче приближенного интегрирования, возникающей в теории систем обслуживания

1. Постановка задачи. Обозначим через $L_2(Q)$ пространство интегрируемых с квадратом на $Q=[-1,1]\times[-1,1]$ функций $g(x, y)$ с нормой

$$\|g\|=\Big(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g^2(x,y)\,dxdy\Big)^{1/2},$$

а $L_2^{r,s}(Q)$, $r=1,2,\ldots;\ s=1,2,\ldots,$ — пространство функций $g(x,y)$, у которых частные производные $g^{(r,s)}(x,y)$ принадлежат $L_2(Q)$. Аналогичные пространства определенных на $[-1,1]$ функций одной переменной будем обозначать соответственно через L_2 и L_2^r.

Пусть самосопряженный оператор

$$Hf(x)=\int_{-1}^{1} g(x,y)\,f(y)\,dy$$

с ядром $g(x,y)\in L_2^{r,r}(Q)$ имеет единицу в качестве простого собственного значения.

В настоящей статье будем рассматривать задачу восстановления интеграла

$$(F,u)=\int_{-1}^{1} F(x)\,u(x)\,dx$$

по информации

$$Hx^i\equiv\int_{-1}^{1} g(x,y)\,y^i dy=\mu_i(x),\ \ i=\overline{0,N}, \tag{1}$$

$$HF(x)\equiv\int_{-1}^{1} g(x,y)\,F(y)\,dy=\mu_{N+1}(x), \tag{2}$$

где $F(x)\in L_2$ — некоторая фиксированная функция, $u(x)$ — собственный элемент оператора H, отвечающий собственному значению $\lambda=1$, т. е. $u(x)=\int_{-1}^{1} g(x,y)\,u(y)\,dy$ и $\int_{-1}^{1} u(x)\,dx=1$.

Задача о восстановлении функционала $(F,\ u)$ по информации вида (1), (2) часто возникает в теории массового обслуживания [1] в следующей ситуации. Пусть $u(x)$ — плотность вероятности стационарного распределения цепи Маркова, а $g(x,y)$ — условная плотность перехода из y в x. Тогда $u(x)$ есть собственный элемент интегрального оператора с ядром $g(x,y)$, отвечающий собственному значению $\lambda=1$ и нормированный так, как ука-