УДК 517.948

Г. А. Дерфель, В. Н. Шевело

О связи между существованием суммируемых и почти периодических решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений

В настоящей работе выделены некоторые новые классы дифференциально-функциональных уравнений вида

$$\sum_{j=0}^{l} \sum_{k=0}^{m} a_{jk} y^{(k)} (\alpha_j x) = 0, \tag{1}$$

имеющих почти периодические по Г. Бору решения. Основой для установления таких классов является приведенная ниже теорема о связи между существованием почти периодических решений и решений, быстро убывающих на бесконечности.

Из работ, посвященных этой тематике, отметим статьи Л. Я. Быковой [1] и П. Фредериксона [2].

Всюду в дальнейшем предполагается, что α_j мультипликативно соизмеримы, т. е. α_j — вещественные числа (произвольного знака), представимые в виде $\alpha_j = q^{r_j}$, где q — вещественное число, такое, что $|q| > 1$, r_j — рациональные числа.

Под решением всюду, где не оговорено противное, будем понимать комплекснозначную функцию $y(x) \in C^m(-\infty, \infty)$, удовлетворяющую (1) на всей оси.

Теорема 1. *Если уравнение* (1) *имеет нетривиальное решение* $y_1(x)$, *абсолютно суммируемое на всей оси вместе с первыми* n *производными, где* $n = \max\{2, m\}$, *то это уравнение имеет нетривиальное почти периодическое решение* $y_2(x)$.

Доказательство теоремы 1 приведем в конце работы, а сейчас отметим некоторые следствия этой теоремы и результатов асимптотического поведения решений уравнения (1), полученных в [3].

Рассмотрим уравнение вида (1) с выделенной старшей производной

$$y^{(m)} (x) = \sum_{j=0}^{l} \sum_{k=0}^{m-1} a_{jk} y^{(k)} (\alpha_j x), \quad -\infty < x < \infty, \quad \alpha = \min_{0 \leqslant j \leqslant l} |\alpha_j| > 1. \tag{2}$$

Обозначим

$$A = \max_{0 \leqslant j \leqslant l} |\alpha_j|. \tag{3}$$

Теорема 2. *При выполнении условия* (3) *уравнение* (2) *имеет нетривиальное решение* $y(x)$, *удовлетворяющее оценке*

$$|y^{(k)} (x)| \leqslant c \exp\{-\gamma_1 \ln^2 (1 + |x|)\}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

при $c > 0$ *и любом* $\gamma_1 < \tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{2} \frac{m}{\ln A}$.

Для формулировки теоремы 3 рассмотрим уравнение вида (1) с выделенным членом без дифференцирования

$$y(x) = \sum_{j=0}^{l} \sum_{k=0}^{m} a_{jk} y^{(k)} (\lambda_j x), \quad -\infty < x < \infty, \quad \Lambda = \max_{0 \leqslant j \leqslant l} |\lambda_j| < 1. \tag{5}$$

Обозначим

$$\lambda = \min_{0 \leqslant j \leqslant l} |\lambda_j|. \tag{6}$$

Теорема 3. *При выполнении условия* (6) *уравнение* (5) *имеет нетривиальное решение* $y(x)$, *абсолютно суммируемое на всей оси вместе со все-*

ми своими производными, удовлетворяющее в некоторой окрестности нуля оценке

$$|y(x)| \leqslant c \exp\{-\gamma_2 \ln^2 |x|\} \tag{7}$$

при $c > 0$ *и любом*

$$\gamma_2 < \tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{2|\ln \lambda|}. \tag{8}$$

В качестве непосредственного следствия теорем 1 и 2 получаем теорему 4.

Теорема 4. *Всякое уравнение вида* (2) *при выполнении условия* (3) *имеет нетривиальное почти периодическое решение.*

Аналогично, из теорем 1 и 3 следует такая теорема.

Теорема 5. *Всякое уравнение вида* (5) *при выполнении условия* (6) *имеет нетривиальное почти периодическое решение.*

Доказательство теоремы 1. Не уменьшая общности, можно предполагать, что r_j — целые числа. Тогда уравнение (1) можно представить в виде

$$\sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=0}^{m} a'_{jk} y^{(k)}(q^j x) = 0, \tag{9}$$

где N_1, N_2 — целые числа, $N_1 \leqslant N_2$, и существуют $0 \leqslant k_1,\ k_2 \leqslant m$ такие, что $a_{N_1k_1} \neq 0$, $a_{N_2k_2} \neq 0$. Преобразование Фурье функции $y_1(x)$ обозначим через $f(p)$:

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(x) e^{-ipx} dx.$$

А так как $y^{(k)}(x) \in L(-\infty, \infty)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^{(k)}(q^j x) e^{-ipx} dx = (ip)^k q^{-(k+1)} f(q^{-j} p),$$

и, следовательно, $f(p)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=0}^{m} a'_{jk} (ip)^k q^{-(k+1)j} f(q^{-j} p) = 0. \tag{10}$$

Поскольку $f(p) \not\equiv 0$, то существует число s такое, что $1 \leqslant |s| \leqslant q^{N_2}$ и $f(s) \neq 0$. (В противном случае методом шагов мы получили бы, что $f(p) \equiv 0$.)

Искомое почти периодическое решение $y_2(x)$ может быть найдено в виде

$$y_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{isq^n x}, \tag{11}$$

где

$$c_n = q^n f(q^n s). \tag{12}$$

Из условия $y^{(k)}(x) \in L(-\infty, \infty)$, $k = 0, 1, 2$, следует, что вне любой окрестности нуля $|f(p)| \leqslant D/|p|^2$ при некотором $D > 0$. Следовательно, $|c_n| = |q^n f(q^n s)| \leqslant |q|^n \dfrac{D}{|q|^{2n} s^2} \leqslant D_1 |q|^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, где $D_1 > 0$. Кроме того, ясно, что $|c_n| \leqslant D_2 |q|^n$, $n = 0, -1, -2, \ldots$. Поэтому ряд в правой части (11) сходится, и его сумма — функция $y_2(x)$ является равномерной почти периодической функцией.

Проверим теперь, что $y_2(x)$ удовлетворяет уравнению (9). Так как

$$y^{(k)}(q^j x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-j} (is)^k q^{k(n-j)} e^{isq^n x},$$

то для этого достаточно убедиться, что

$$\sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=0}^{m} a'_{jk} (is)^k q^{k(n-j)} c_{n-j} = 0. \tag{13}$$

Но согласно (12) имеем

$$\sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=0}^{m} a'_{jk} (is)^k q^{k(n-j)} c_{n-j} = q^n \sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=0}^{m} a'_{jk} (is)^k q^{kn} q^{-(k+1)j} f(q^{n-j} s). \tag{14}$$

Обозначая в (13) $q^n s$ через p, получаем равенство

$$\sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=0}^{m} a'_{jk} (is)^k q^{k(n-j)} c_{n-j} = q^n \sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=0}^{m} a'_{jk} (ip)^k q^{-(k+1)j} f(q^{-j} p). \tag{15}$$

Из (15) и (10) вытекает (13). Теорема доказана.

Замечание 1. Как следует из результатов работ [4, 5], уравнение (2) при выполнении условия $A < 1$ и уравнение (5) при выполнении условия $\lambda > 1$ не могут иметь ненулевых почти периодических решений.

Замечание 2. П. Фредериксон [2] доказал существование почти периодических решений уравнения

$$y'(x) = \sum_{j=0}^{l} a_j y(\alpha_j x) + by(x) \tag{16}$$

при выполнении условий

$$\alpha = \min |\alpha_j| > 1, \quad \operatorname{Re} b = 0, \quad b \neq 0. \tag{17}$$

В частности, уравнение

$$y'(x) - by(x) = y(\alpha x); \qquad \alpha > 1, \quad \operatorname{Re} b = 0, \quad b \neq 0, \tag{18}$$

имеет почти периодическое решение. Обобщение последнего результата на системы вида $A(D)\, u(x) = B(D)\, u(\alpha x)$, где $A(p)$, $B(p)$ — полиномиальные матрицы порядка $(n \times n)$, $u \in R^n$, $D = d/dx$, $\alpha \neq 0, \pm 1$, дано в работе Л. Я. Быковой [1].

Теоремы 4 и 5 не содержат в себе результатов работ [1, 3] и не содержатся в них. Например, существование почти периодических решений уравнения (18) не вытекает из теорем 4, 5, а уравнение $y'(x) = ay(\alpha x)$, $\alpha > 1$, простейшее из рассмотренных в настоящей работе, не удовлетворяет условиям теорем из [1, 3].

1. *Быкова Л. Я.* О почти-периодических решениях систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии.— 1971.— Вып. 8.— С. 306—318.
2. *Frederickson P.* Dirichlet series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes Math.— 1971.— 243.— P. 249—254.
3. *Дерфель Г. А.* Об асимптотических свойствах решений некоторых линейных функционально-дифференциальных уравнений // Докл. семинара Ин-та прикл. математики Тбил. ун-та.— 1978.— № 12/13.— С. 21—23.
4. *Дерфель Г. А.* Об одном классе дифференциально- функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом // Сообщ. АН ГССР.— 1976.— 83, № 3.— С. 561—563.
5. *Дерфель Г. А.* Об асимптотике решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Асимптотическое поведение решений дифференциально-функциональных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978.— С. 58—65.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 05.12.85

то для этого достаточно убедиться, что

$$\sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=0}^{m} a'_{jk} (is)^k q^{k(n-j)} c_{n-j} = 0. \tag{13}$$

Но согласно (12) имеем

$$\sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=0}^{m} a'_{jk} (is)^k q^{k(n-j)} c_{n-j} = q^n \sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=0}^{m} a'_{jk} (is)^k q^{kn} q^{-(k+1)j} f(q^{n-j} s). \tag{14}$$

Обозначая в (13) $q^n s$ через p, получаем равенство

$$\sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=0}^{m} a'_{jk} (is)^k q^{k(n-j)} c_{n-j} = q^n \sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=0}^{m} a'_{jk} (ip)^k q^{-(k+1)j} f(q^{-j} p). \tag{15}$$

Из (15) и (10) вытекает (13). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Как следует из результатов работ [4, 5], уравнение (2) при выполнении условия $A < 1$ и уравнение (5) при выполнении условия $\lambda > 1$ не могут иметь ненулевых почти периодических решений.

З а м е ч а н и е 2. П. Фредериксон [2] доказал существование почти периодических решений уравнения

$$y'(x) = \sum_{j=0}^{l} a_j y(\alpha_j x) + by(x) \tag{16}$$

при выполнении условий

$$\alpha = \min |\alpha_j| > 1, \quad \operatorname{Re} b = 0, \quad b \neq 0. \tag{17}$$

В частности, уравнение

$$y'(x) - by(x) = y(\alpha x); \qquad \alpha > 1, \quad \operatorname{Re} b = 0, \quad b \neq 0, \tag{18}$$

имеет почти периодическое решение. Обобщение последнего результата на системы вида $A(D)\,u(x) = B(D)\,u(\alpha x)$, где $A(p)$, $B(p)$ — полиномиальные матрицы порядка $(n \times n)$, $u \in R^n$, $D = d/dx$, $\alpha \neq 0, \pm 1$, дано в работе Л. Я. Быковой [1].

Теоремы 4 и 5 не содержат в себе результатов работ [1, 3] и не содержатся в них. Например, существование почти периодических решений уравнения (18) не вытекает из теорем 4, 5, а уравнение $y'(x) = ay(\alpha x)$, $\alpha > 1$, простейшее из рассмотренных в настоящей работе, не удовлетворяет условиям теорем из [1, 3].

1. *Быкова Л. Я.* О почти-периодических решениях систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии.— 1971.— Вып. 8.— С. 306—318.
2. *Frederickson P.* Dirichlet series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes Math.— 1971.— 243.— P. 249—254.
3. *Дерфель Г. А.* Об асимптотических свойствах решений некоторых линейных функционально-дифференциальных уравнений // Докл. семинара Ин-та прикл. математики Тбил. ун-та.— 1978.— № 12/13.— С. 21—23.
4. *Дерфель Г. А.* Об одном классе дифференциально- функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом // Сообщ. АН ГССР.— 1976.— 83, № 3.— С. 561—563.
5. *Дерфель Г. А.* Об асимптотике решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Асимптотическое поведение решений дифференциально-функциональных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978.— С. 58—65.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 05.12.85