УДК 517.947

А. И. Марковский

Об L^p -оценках решений некоторых гиперболических уравнений

Пусть в $R^n \times R^1 = \{(x, t)\}$ рассматривается задача Коши для гиперболического уравнения

$$\partial^2 u/\partial t^2 = \Delta u + a\partial u/\partial t + \sum_{j=1}^{n} b_j \partial u/\partial x_j + cu, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \partial u/\partial t|_{t=0} = f(x), \tag{2}$$

где a, b_j, c — комплексные постоянные, f — заданная функция. Если f принадлежит, например, пространству S Л. Шварца быстроубывающих функций, то решение задачи (1), (2) существует, единственно и может быть определено как линейный оператор $u(x, t) = U_t f(x)$, который в каждый момент t сопоставляет начальной скорости $f(x)$ решение $u(x, t)$ при данном

t как функцию от x. Возникает вопрос, можно ли продолжить оператор U_t по непрерывности до линейного оператора, действующего из $L^p(R^n)$ в $L^p(R^n)$, $1 < p < \infty$, иными словами, существует ли постоянная $C = C_t$ такая, что

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^p} \leqslant C_t \| f(\cdot) \|_{L^p} \quad \forall f \in L^p. \tag{3}$$

Известно, что в случае $p = 2$ ответ утвердителен. При $p \neq 2$ ответ на данный вопрос получен в работах [1 — 3] в случае, когда $a = c = b_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Оказывается, для справедливости неравенства (3) в этом случае необходимо и достаточно, чтобы числа p и $n = \dim R^n$ были связаны неравенством

$$| 1/2 - 1/p | \leqslant 1/(n - 1). \tag{4}$$

Этот результат получен методами теории мультипликаторов в пространствах L^p (см., например, [4 — 7]).

Основной результат настоящей работы состоит в том, что для справедливости оценки (3) для решения задачи (1), (2) при произвольных комплексных постоянных a, b_j и c необходимо и достаточно выполнение неравенства (4), т. е. этот критерий устойчив относительно возмущения главной части волнового оператора линейным дифференциальным оператором первого порядка с постоянными комплексными коэффициентами.

В частном случае, когда $a = b_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, а $c < 0$ (уравнение Клейна — Гордона), достаточность неравенства (4) для выполнения оценки (3) установлена в работе [3]. Необходимость условия (4) для справедливости неравенства (3) в случае уравнения Клейна — Гордона установлена в работе [8] методами, отличными от применяемых здесь.

В дальнейшем используются стандартные обозначения классов функций: $L^p = L^p(R^n)$; C^k; $\hat{f}(\xi)$ — преобразование Фурье (обобщенной) функции $f(x)$. Напомним определение мультипликатора в L^p. Ограниченная функция $m(\xi)$ называется мультипликатором в L^p, если линейный оператор

$$T_m f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R^n} m(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi,$$

первоначально определенный на пространстве S гладких быстроубывающих функций, может быть продолжен по непрерывности как оператор из L^p в L^p, т. е.

$$\| T_m \|_{L^p} = \sup_{\|f\|_{L^p} \leqslant 1} \| T_m f \|_{L^p} < \infty.$$

В этом случае записываем $m \in M_p$. Множество мультипликаторов образует алгебру относительно поточечного умножения, которая является банаховой, если в качестве нормы $\| m \|_{M_p}$ взять $\| T_m \|_{L^p}$. В дальнейшем будем называть функцией Михлина комплекснозначную функцию $m(\xi)$, $\xi \in R^n$, принадлежащую классу $C^k(R^n \setminus \{0\})$, $k \geqslant n/2$, и такую, что с некоторой постоянной A

$$| D_\xi^\gamma m(\xi) | \leqslant A (1 + |\xi|)^{-|\gamma|} \quad \forall \xi \in R^n, \quad |\gamma| \leqslant n/2.$$

Тогда [4, 5, 7] $m(\xi) \in M_p$ при $1 < p < \infty$ и $\| m \|_{M_p} \leqslant C_p A$.

Теорема. *Для решения* $u(x, t)$ *задачи* (1), (2) *оценка*

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^p} \leqslant C_t \| f(\cdot) \|_{L^p} \tag{5}$$

с постоянной C_t, *не зависящей от* f, *справедлива тогда и только тогда, когда*

$$| 1/2 - 1/p | \leqslant 1/(n - 1). \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим сперва случай $a=0$, $b_j=0$, $j=1,\dots,n$, $c=i=\sqrt{-1}$. (Относительно общего случая см. замечание после доказательства.) В рассматриваемом случае для преобразования Фурье $\hat{u}(\xi,t)$ имеем такую задачу Коши:

$$d^2\hat{u}/dt^2=(-|\xi|^2+i)\,\hat{u}, \tag{7}$$

$$\hat{u}|_{t=0}=0, \quad d\hat{u}/dt|_{t=0}=\hat{f}(\xi). \tag{8}$$

Из (7), (8) вытекает

$$\hat{u}(\xi,t)=\frac{\mu(r)-i\nu(r)}{2\omega(r)}\,[e^{(\mu(r)+i\nu(r))t}-e^{-(\mu(r)+i\nu(r))t}]\,\hat{f}(\xi), \tag{9}$$

где $\omega(r)=[r^4+1]^{1/2}$, $\mu(r)=\left[\dfrac{\omega(r)-r^2}{2}\right]^{1/2}$, $\nu(r)=\left[\dfrac{\omega(r)+r^2}{2}\right]^{1/2}$, $r=|\xi|$.

Из формулы (9) следует, что неравенство (5) эквивалентно включению

$$m(r)=\frac{\mu(r)-i\nu(r)}{2\omega(r)}\,[e^{(\mu(r)+i\nu(r))t}-e^{-(\mu(r)+i\nu(r))t}]\in M_p. \tag{10}$$

Достаточность условия (6) для этого включения доказывается следующим образом. Обозначим

$$m_1(r)=\frac{\mu(r)-i\nu(r)}{2\omega(r)}\,e^{\mu(r)t}e^{i\nu(r)t}, \qquad m_2(r)=-\frac{\mu(r)-i\nu(r)}{2\omega(r)}\,e^{-\mu(r)t}e^{-i\nu(r)t}.$$

Тогда $m(r)=m_1(r)+m_2(r)$. Каждое из слагаемых исследуется аналогично, поэтому рассмотрим $m_1(r)=\dfrac{\mu(r)}{2\omega(r)}\,e^{\mu(r)t}e^{i\nu(r)t}-\dfrac{i\nu(r)}{2\omega(r)}\,e^{\mu(r)t}e^{i\nu(r)t}=m_{10}(r)+m_{11}(r)$. Пусть $\varphi:R^1_+\to R^1_+$ — бесконечно дифференцируемая функция, причем $\varphi(t)\equiv 1$ при $0\leqslant t\leqslant 10$ и $\varphi(t)\equiv 0$ при $t\geqslant 20$, $0\leqslant\varphi(t)\leqslant 1$ $\forall t\in R^1_+$, а $\psi(t)=1-\varphi(t)$ $\forall t\in R^1_+$. Записывая $m_{10}(r)=m_{10}(r)\varphi(r)+m_{10}\psi(r)=m_{101}(r)+m_{102}(r)$, видим, что $m_{101}(r)$ — функция Михлина, и, следовательно,

$$m_{101}(r)\in M_p \quad \forall p:1<p<\infty. \tag{11}$$

Переходя к рассмотрению $m_{102}(r)$, заметим, что на $\operatorname{supp}\psi$ r велико, так что r^{-1} мало.

Применяя известное разложение $g(x)=g(0)+x\int\limits_0^1 g'(x\tau)\,d\tau$, получаем следующие представления, справедливые на $\operatorname{supp}\psi$:

$$\frac{1}{2\omega(r)}=\frac{1}{2r^2}\left(1+\frac{1}{r^2}\right)^{-1/2}=\frac{1}{2r^2}\left[1-\frac{1}{2r^2}\int\limits_0^1\left(1+\frac{\tau}{r^2}\right)^{-3/2}d\tau\right]=$$
$$=\frac{1}{2r^2}+\frac{\omega_1(r)}{r^4}, \tag{12}$$

$$\mu(r)=\frac{r}{\sqrt{2}}\left[\left(1+\frac{1}{r^4}\right)^{1/2}-1\right]^{1/2}, \quad \left(1+\frac{1}{r^4}\right)^{1/2}=1+\frac{1}{2r^4}\int\limits_0^1\left(1+\frac{\tau}{r^4}\right)^{-1/2}d\tau,$$

так что

$$\mu(r)=\frac{1}{2r}\left[\int\limits_0^1\left(1+\frac{\tau}{r^4}\right)^{-1/2}d\tau\right]^{1/2}=\frac{1}{2r}-\frac{\mu_1(r)}{8r^5}, \tag{13}$$

где $\mu_1(r) = \int\limits_0^1 \left\{\left[\int\limits_0^1 \left(1 + \frac{\tau s}{r^4}\right)^{-1/2} d\tau\right]^{-1/2} \int\limits_0^1 \left(1 + \frac{\tau s}{r^4}\right]^{-3/2} \tau d\tau\right\} ds$. Далее,

$$\nu(r) = \frac{r}{\sqrt{2}}\left[\left(1 + \frac{1}{r^4}\right)^{1/2} + 1\right]^{1/2} = r + \frac{\nu_1(r)}{2\sqrt{2}r^3}, \tag{14}$$

где $\nu_1(r) = \int\limits_0^1 \left[\left(1 + \frac{\tau}{r^4}\right)^{1/2} + 1\right]^{-1/2} \left(1 + \frac{\tau}{r^4}\right)^{-1/2} d\tau$. Нетрудно проверить, что входящие в формулы (12) — (14) функции ω_1, μ_1, ν_1 обладают тем свойством, что $\psi^{1/2}\omega_1$, $\psi^{1/2}\mu_1$, $\psi^{1/2}\nu_1$ — функции Михлина. Заметим также, что $\psi^{1/2}(r)\, e^{\left(\mu(r) + \frac{i\nu_1(r)}{2\sqrt{2}r^3}\right)t}$ — также функция Михлина, как видно из (13), (14). Отсюда и из формул (12) — (14) следует, что функция m_{102} представляет собой сумму конечного числа слагаемых вида

$$\psi^{1/2}(r)\, e^{irt} r^{-l} \psi^{1/2}(r)\, H(r, t), \tag{15}$$

где $\psi^{1/2}(r)\, H(r, t)$ — функция Михлина, гладко зависящая от t, а наименьшее из встречающихся l равно 3. Но из теоремы Шестранда — Миячи — Пераля [1 — 3] функция $\psi^{1/2}(r)\, e^{irt} r^{-l} \in M_p$ тогда и только тогда, когда

$$|1/2 - 1/p| \leqslant l/(n-1). \tag{16}$$

Поскольку $\psi^{1/2}(r)\, H(r, t)$ — функция Михлина, она принадлежит M_p при любом $1 < p < \infty$, а так как M_p — алгебра, то $\psi(r)\, e^{irt} H(r, t)\, r^{-l} \in M_p$, если выполнено условие (16). Однако так как $l \geqslant 3$, то это условие автоматически выполнено, коль скоро выполнено (6).

Записывая далее $m_{11}(r) = m_{11}\varphi(r) + m_{11}(r)\psi(r) = m_{111}(r) + m_{112}(r)$, видим, что $m_{111}(r)$ — функция Михлина, а потому принадлежит M_p при любом $1 < p < \infty$. Применив затем к выражению $m_{112}(r)$ формулы (12) — (14), представим $m_{112}(r)$ как сумму конечного числа слагаемых вида (15), причем одно из слагаемых равно

$$\psi^{1/2}(r)\, e^{irt} r^{-1} \psi^{1/2}(r)\, H(r, t), \tag{17}$$

а у остальных показатели степени r в знаменателе не меньше 2. Отсюда и из теорем Шестранда — Миячи — Пераля и Михлина следует, что слагаемое (17), а с ним и вся сумма m_{112} принадлежит M_p, если выполнено условие (6). Это доказывает достаточность условия (6), поскольку при исследовании функции $m_2(r)$ получаем тот же результат.

Необходимость условия (6) доказывается следующим образом. Представим $m(r) = m$ в виде

$$m = \frac{\nu}{\omega} \frac{e^{(\mu + i\nu)t} - e^{-(\mu + i\nu)t}}{2i} + \frac{\mu}{2\omega}\,[e^{(\mu + i\nu)t} - e^{-(\mu + i\nu)t}] = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2.$$

Как и выше, можно показать, что $\tilde{m}_2(r) \in M_p$, если $|1/2 - 1/p| \leqslant 3/(n - 1)$. Далее

$$\tilde{m}_1(r) = \frac{\nu}{2i\omega}\,[e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}] + \frac{\nu}{2i\omega}\,[(e^{\mu t} - 1)\, e^{i\nu t} - (e^{-\mu t} - 1)\, e^{-i\nu t}] = \tilde{m}_{11} + R_1 \tag{18}$$

и

$$\tilde{m}_{11} = \frac{\nu}{\omega} \sin rt + \frac{\nu}{2i\omega}\,[(e^{i\nu t} - e^{irt}) - (e^{-i\nu t} - e^{-irt})] = \tilde{m}_{111} + R_2. \tag{19}$$

В свою очередь

$$\tilde{m}_{111} = \sin rt/r + (\nu/\omega - 1/r) \sin rt = \sin rt/r + R_3, \tag{20}$$

так что из (18) — (20) получаем $m_1(r) = \sin rt/r + R_1(r, t) + R_2(r, t) + R_3(r, t)$. Снова используя разбиение единицы, формулы (12) — (14) и замечая, что $e^z = 1 + z\int\limits_0^1 e^{zt}dt$ при любом комплексном z, как и выше, доказываем, что сумма $R_1 + R_2 + R_3 \in M_p$, если $|1/2 - 1/p| \leqslant 2(n-1)$. Для доказательства необходимости условия (6) достаточно указать такую функцию $f(x) \in L^p$ при $|1/2 - 1/p| > 1/(n-1)$, что $\|u(\cdot, t)\|_{L^p} = \infty$ хотя бы при одном $t \neq 0$.

Как известно [7], $M_p = M_q$ при $1/p + 1/q = 1$, поэтому достаточно считать, что $1 < p < 2$. В качестве такой функции, следуя [3], возьмем функцию $\omega_\lambda(|x|)$, построенную Вайнгером [10] для каждого нецелого λ, $0 < \lambda < n$, и имеющую свойства:

1) $\omega_\lambda(|x|) \in C^\infty(R^n \setminus \{0\})$;

2) $\omega_\lambda(|x|) = B_{n,\lambda}|x|^{\lambda-n} (\operatorname{mod} C^\infty)$ в окрестности $x=0$, $B_{n,\lambda} = \mathrm{const} \neq 0$;

3) $\omega_\lambda(|x|) = O(|x|^{-N})$ $\forall N \in \mathbb{Z}_+$ при $|x| \to \infty$;

4) $\widehat{\omega_\lambda}(|\xi|) = \psi(|\xi|)|\xi|^{-\lambda}$, где в качестве $\psi(|\xi|)$ можно взять функцию, использованную выше.

Для такой функции $f(x) = \omega_\lambda(|x|)$ имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R^n} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|^{1+\lambda}} \psi(|\xi|) e^{i(x,\xi)} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R^n} \psi(|\xi|)|\xi|^{-\lambda} (\tilde{m}_2(|\xi|, t) + R_1(|\xi|, t) + R_2(|\xi|, t) +$$

$$+ R_3(|\xi|, t)) e^{i(x,\xi)} d\xi = u_0(x, t) + u_1(x, t).$$

Рассмотрим сперва $u_0(x, t)$. Поскольку на самом деле она зависит от $\rho = |x|$ и от t, то, используя формулу преобразования Фурье радиальной функции [6], получаем

$$u_0(\rho, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \rho^{-(n-2)/2} \int\limits_0^\infty s^{n/2-1-\lambda} \sin st\, \psi(s)\, \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(\rho s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \rho^{-(n-2)/2} \int\limits_0^\infty s^{n/2-1-\lambda} \sin st\, \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(\rho s)\, ds -$$

$$- \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \rho^{-(n-2)/2} \int\limits_0^\infty \varphi(s)\, s^{n/2-1-\lambda} \sin st\, \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(\rho s)\, ds = u_{01}(\rho, t) + u_{02}(\rho, t).$$

Здесь $\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}$ — бесселева функция первого рода порядка $(n-2)/2$, а φ и ψ — то же разбиение единицы, что и выше. Пусть для определенности $t > 0$. Поскольку $n \geqslant 2$, $0 < \lambda < n$, а $\operatorname{supp} \varphi$ компактен, функция $u_{02}(\rho_1 t)$ непрерывна при конечных ρ. Учитывая, что $\sqrt{\frac{2}{\pi st}} \sin st = \mathcal{J}_{1/2}(st)$ (см., например, [9]), получаем

$$u_{01}(\rho, t) = C_0 \sqrt{2t}\rho^{-(n-2)/2} \int\limits_0^\infty s^{(n-1)/2-\lambda} \mathcal{J}_{1/2}(st)\, \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(s\rho)\, ds,$$

где C_0 — некоторая постоянная. Полагая в последнем интеграле $\sigma = st$, находим

$$u_{01}(\rho, t) = C_0 \sqrt{2} t^{\lambda-n/2} \rho^{-(n-2)/2} \int\limits_0^\infty \sigma^{(n-1)/2-\lambda} \mathcal{J}_{1/2}(\sigma)\, \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sigma\rho/t)\, d\sigma. \quad (21)$$

Рассмотрим $u_{01}(\rho, t)$ в конусе $\rho < t$. Тогда по формуле (6.574.3) из [11] имеем

$$\int_0^\infty \sigma^{(n-1)/2-\lambda} \mathcal{J}_{1/2}(\sigma)\, \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(\sigma\rho/t)\, d\sigma =$$

$$= \frac{\left(\frac{\rho}{t}\right)^{(n-2)/2} \Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)}{2^{\lambda-(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda-n+3}{2}\right)} F\left(\frac{n-\lambda}{2}, \frac{n-\lambda-1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{\rho^2}{t^2}\right), \quad (22)$$

где Γ — гамма-функция, F — гипергеометрическая функция. По формуле (9.3.16) из [9] можно записать

$$F\left(\frac{n-\lambda}{2}, \frac{n-\lambda-1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{\rho^2}{t^2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\lambda+1-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} F\left(\frac{n-\lambda}{2},\right.$$

$$\left.\frac{n-\lambda-1}{2}, \frac{n-2\lambda+1}{2}, \frac{t^2-\rho^2}{t^2}\right) + \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2\lambda-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\lambda-1}{2}\right)} \times$$

$$\times \left(\frac{t^2-\rho^2}{t^2}\right)^{\frac{2\lambda+1-n}{2}} F\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \lambda - \frac{n-3}{2}, \frac{t^2-\rho^2}{t^2}\right). \quad (23)$$

Поскольку $\rho < t$, входящие в эту формулу гипергеометрические функции регулярны, и в окрестности сферы $\rho = t$ получим из (21) — (23) следующее асимптотическое разложение:

$$u_{01}(\rho, t) = d_{\lambda,n} t^{n-\lambda} (t^2-\rho^2)^{\lambda-(n-1)/2}, \quad d_{\lambda,n} = \text{const} \neq 0. \quad (24)$$

Пусть $1 < p < 2$, $1/p - 1/2 = 1/(n-1) + \delta$, а $0 < \delta < 1/(n-1)$, так что $|1/2 - 1/p| < 2/(n-1)$. Подберем параметр $0 < \lambda < n$ так, чтобы а) $(n-\lambda)p < n$; б) $(\lambda - (n-1)/2)p = -1$. Из условий а), б) следует, что при данном δ необходимо так подобрать $\varepsilon > 0$, чтобы $\lambda = (n-1)/2 - 1/p = n - n/p + \varepsilon$. Но $1/p = 1/2 + 1/(n-1) + \delta$, так что $\varepsilon = (n-1)/p - (n+1)/2 = (n-1)/2 + 1 + \delta(n-1) - (n+1)/2 = \delta(n-1) > 0$ при $n \geqslant 2$. Из (24) и условия б) следует

$$\int_{t/2}^{t} \rho^{n-1} |u_{01}(\rho, t)|^p d\rho = \infty. \quad (25)$$

Между тем на основании условия а) и свойств 1 — 3 функции Вайнгера имеем $w_\lambda(|x|) \in L^p$, причем $1/(n-1) < |1/2 - 1/p| < 2/(n-1)$. Поэтому $\tilde{m}_2(|\xi|, t) + R_1(|\xi|, t) + R_2(|\xi|, t) + R_3(|\xi|, t) \in M_p$, и, стало быть, $u_1(x, t) = u_1(\rho, t) \in L_p$. Поскольку $u(x, t) = u_{01}(\rho, t) + u_{02}(\rho, t) + u_1(\rho, t)$, то из (25) и непрерывности $u_{02}(\rho, t)$ получаем $u(x, t) \notin L^p$, если $|1/2 - 1/p| \geqslant 1/(n-1) + \delta$, где $0 < \delta < 1/(n-1)$. Отсюда, а также в силу теоремы М. Риса — Торина об интерполяции следует, что $u(x, t) \notin L^p$ при любых $1 < p < \infty$, для которых $|1/2 - 1/p| > 1/(n-1)$.

Приведенное нами доказательство необходимости несколько проще соответствующего доказательства в [5] для случая волнового уравнения. Теорема доказана в частном случае $a = 0$, $b_j = 0$, $j_j = 1, \ldots, n$, $c = i$.

З а м е ч а н и е. Обсудим кратко общий случай постоянных коэффициентов a, b_j, $j = 1, \ldots, n, c$ в (1). Заменой $u \to ve^{\alpha t + i(\beta, x)}$ (β вещественны), не изменяющей метрических свойств функции $u(x, t)$, можно свести уравнение (1) к случаю, когда $a = \operatorname{Im} b_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $c = \gamma_1 + i\gamma_2$. Положим $p(\xi) = \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j$. В этом случае $\omega(\xi) = [(|\xi|^2 - \gamma_1)^2 + (p(\xi) + \gamma_2)^2]^{1/2}$. Многообразие нулей Λ этой функции компактно. Характеристические корни равны соответственно

$$\lambda_{1,2} = \pm \left\{ \operatorname{sign}(p(\xi) + \gamma_2) \left[\frac{\omega(\xi) - |\xi|^2 + \gamma_1}{2} \right]^{1/2} + \right.$$

$$\left. + i \left[\frac{\omega(\xi) + |\xi|^2 - \gamma_1}{2} \right]^{1/2} \right\} = \pm \{\mu + i\nu\} \qquad (26)$$

и формула (9) сохраняется при μ и ν, определенных в (26). Положим $\omega_-(\xi) = \left[\frac{\omega(\xi) - |\xi|^2 + \gamma_1}{2} \right]^{1/2}$, $\omega_+(\xi) = \left[\frac{\omega(\xi) + |\xi|^2 - \gamma_1}{2} \right]^{1/2}$ и пусть $\Theta(s)$ — функция Хевисайда. Тогда

$$e^{\mu(\xi)t} = e^{\operatorname{sign}(p(\xi)+\gamma_2)\omega_-(\xi)t} = \Theta(p(\xi) + \gamma_2) e^{\omega_-(\xi)t} + \Theta(-p(\xi) - \gamma_2) e^{-\omega_-(\xi)t},$$

$$\mu(\xi) = [\Theta(p(\xi) + \gamma_2) - \Theta(-p(\xi) - \gamma_2)] \omega_-(\xi).$$

Заметим также, что $\Theta(p(\xi) + \gamma_2) + \Theta(-p(\xi) - \gamma_2) = 1$.

Учитывая все это в формуле (9), получаем формулу такого же вида, что и ранее, но только в качестве новых множителей будут выступать характеристические функции полупространств $p(\xi) + \gamma_2 \lesseqgtr 0$. Однако известно [7], что каждая такая характеристическая функция принадлежит M_p для любого $1 < p < \infty$. Поскольку теперь полученная формула содержит гладкие функции $\omega_+(\xi)$ и $\omega_-(\xi)$, можно полностью применить изложенную выше схему доказательства. Следует только разбиение единицы выбрать так, чтобы $\operatorname{supp} \varphi \supset \Lambda$, что возможно в силу компактности Λ. Доказательство необходимости аналогично, ибо, как легко видеть, главный член нового символа тот же — $\sin rt/r$.

1. *Sjostrand S.* On the Riesz means of the solution of the Schrodinger equation // Ann. sci. norm. super. Pisa.— 1970.— **24**, N 3.— P. 331—348.
2. *Miyachi A.* On some estimates for wave equation in L^p and H^p// J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA.— 1980.— **27**, N 2.— P. 331—354.
3. *Peral J. C.* L^p-estimates for the wave equation // J. Funct. Anal.— 1980.— **36**.— P 114—145.
4. *Хёрмандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига.— М. : Изд-во иностр. лит.— 1962.— 70 с.
5. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение.— М. : Мир, 1980.— 264 с.
6. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М. : Мир, 1974.— 331 с.
7. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М. : Мир, 1973.— 342 с.
8. *Марковский А. И.* Об L^p-оценках для уравнения Клейна — Гордона // Респ. конф. по нелинейн. задачам мат. физики: Тез. докл.— Донецк : Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, 1983.— С. 88.
9. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения.— М. : Гостехтеориздат, 1953.— 379 с.
10. *Wainger S.* Spetial trigonometric series in k-dimensions // Mem. Amer. Math. Soc.— 1985.— N 59.— P. 102.
11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М. : Физматгиз, 1963.— 1100 с.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 25.12.84