УДК 517.9

Ю. А. Митропольский, Нгуен Донг Ань

Случайные колебания в квазилинейных системах стохастических интегро-дифференциальных уравнений

В настоящее время возрос интерес к исследованию систем интегро-дифференциальных уравнений со случайными возмущениями. В [1] на основе предположения о существовании медленно изменяющегося решения [2] и метода статистической линеаризации [3] стохастическое интегро-дифференциальное уравнение второго порядка приближенно заменяется стохастическим дифференциальным уравнением. К последнему применимы асимптотические методы Крылова — Боголюбова — Митропольского и метод уравнений Колмогорова — Фоккера — Планка (КФП) [4 — 8]. В данной работе рассматривается аналогичная задача для квазилинейных систем стохастических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. Исследуется вопрос математического обоснования предложенной методики.

1. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon \int_0^t K(t-s)\, x(s)\, ds + \varepsilon F(t, x) + \varepsilon f(\varepsilon, t, x)\, q(t), \qquad (1)$$

где A, K, f — квадратные матрицы порядка n, причем матрица A постоянная, $x = (x_1, \ldots, x_n)'$, $F = (F_1, \ldots, F_n)'$, $q = (q_1, \ldots, q_n)'$, $q(t)$ — векторный случайный центрированный стационарный процесс, ε — малый положительный параметр, штрих обозначает операцию транспонирования.

Применим к уравнению (1) метод статистической линеаризации, но не ко всему уравнению, а только к интегральной сумме, т. е. заметим уравнение (1) следующим:

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon Bx + \varepsilon F(t, x) + \varepsilon f(\varepsilon, t, x) q(t), \tag{2}$$

где B — квадратная матрица порядка n, определенная из условия минимизации

$$\min_B \langle \Big[\int_0^t K(t-s) x(s) ds - Bx(t)\Big]\Big[\int_0^t K(t-s) x(s) ds - Bx(t)\Big]'\rangle, \tag{3}$$

откуда путем дифференцирования по B и приравнивания результата нулю получим

$$\langle x(t)\Big[\int_0^t K(t-s) x(s) ds - Bx(t)\Big]'\rangle + \langle\Big[\int_0^t K(t-s) x(s) ds - Bx(t)\Big] x'(t)\rangle = 0.$$

Решая эту систему, имеем

$$B = \langle \int_0^t k(t-s) x(s) dsx'(t)\rangle \langle x(t) x'(t)\rangle^{-1}. \tag{4}$$

Чтобы привести выражение (4) к известным величинам, сделаем в уравнении (1) линейную замену переменных

$$x(t) = H(t) z(t), \tag{5}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n)'$, $H(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной порождающей системы ($\varepsilon = 0$)

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{6}$$

Очевидно, $H(t)$ обладает свойством [9]

$$H(t-\sigma) = H(t) H(-\sigma) = H(-\sigma) H(t). \tag{7}$$

Подставляя (5) в (1), получаем уравнение для $z(t)$:

$$\dot{z}(t) = \varepsilon H^{-1}(t)\Big[\int_0^t K(t-s) H(s) z(s) ds + F(t, H, z) + f(\varepsilon, t, H, z) q(t). \tag{8}$$

Поскольку ε — малый параметр, будем предполагать, что система (8) имеет решение $z(t)$, являющееся случайной медленно изменяющейся функцией, т. е. можно приближенно положить

$$z(t-\sigma) \approx z(t). \tag{9}$$

Теперь с помощью (5), (7), (9) находим

$$\int_0^t K(t-s) x(s) ds = \int_0^t K(\delta) x(t-\sigma) d\sigma = \int_0^t K(\sigma) H(t-\sigma) z(t-\sigma) d\sigma \approx$$

$$\approx \int_0^t K(\sigma) H(-\sigma) d\sigma H(t) z(t) = \int_0^t K(\sigma) H(-\sigma) d\sigma x(t). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (4), имеем

$$B = \int_0^t K(\sigma) H(-\sigma) d\sigma. \tag{11}$$

В практических задачах обычно ядро релаксации $K(\sigma)$ быстро стремится к нулю при $\sigma \to \infty$ [10]. В таких случаях можно принять

$$B = \int_0^\infty K(\sigma) H(-\sigma) d\sigma. \tag{12}$$

С учетом (12) уравнение (2) принимает вид

$$\dot{x} = \Big(A + \varepsilon \int_0^\infty K(\sigma) H(-\sigma) d\sigma\Big) x + \varepsilon F(t, x) + \varepsilon f(\varepsilon, t, x) q(t). \tag{13}$$

Таким образом, мы предлагаем методику, с помощью которой стохастическое интегро-дифференциальное уравнение (1) заменяется стохастическим дифференциальным уравнением (13). К последнему применяются известные методы статистической динамики, такие, как методы спектральной теории, методы марковских процессов, методы статистической линеаризации и др.

2. Математическое обоснование методики. В п. 1 мы предложили для интегро-дифференциального уравнения (1) замену (13), исходя из эвристических рассуждений. Вопрос математического обоснования предложенной методики состоит в доказательстве (при определенных условиях) близости решений уравнений (1) и (13) при одинаковом заданном начальном значении.

В настоящем пункте изложим один подход к решению указанного вопроса математического обоснования. Такой подход, разумеется, не является единственным, но дает наглядное представление и позволяет воспользоваться результатами теории стохастических дифференциальных уравнений. В основе излагаемого подхода лежит понятие фундаментальной матрицы решений линейной детерминированной системы. При этом оказывается, что замена (13) имеет место даже в случае, когда третий и четвертый члены в уравнении (1) не пропорциональны малому параметру ε. Для простоты изложения рассмотрим только скалярное уравнение (1).

Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x} = -\alpha x + \varepsilon \int_0^t K(t-s) x(s) ds + F(x, t) + f(t, x) \dot{\xi}(t), \tag{14}$$

где $\varepsilon, \alpha = \text{const}$, $K(t-s)$, $F(t, x)$ и $f(t, x)$ — детерминированные функции, причем ядро $K(\sigma)$ является непрерывным, $\dot{\xi}(t)$ — «белый шум», являющийся обобщенной производной винеровского процесса $\xi(t)$. При заданном начальном значении $x(0)$, не зависящем от $\dot{\xi}(t)$, стохастическое интегро-дифференциальное уравнение (14) можно представить в виде стохастического интегрального уравнения

$$x(t) = u(t) x(0) + \int_0^t u(t-s) F(s, x(s)) ds + \int_0^t u(t-s) f(s, x(s)) d\xi(s), \tag{15}$$

в котором $u(t)$ является решением детерминированного линейного интегро-дифференциального уравнения

$$\dot{u}(t) = -\alpha u(t) + \varepsilon \int_0^t K(t-s) u(s) ds, \quad u(0) = 1. \tag{16}$$

Доказательство представления (15) из-за его громоздкости опустим.

Пусть существует интеграл $\int_0^\infty K(\sigma) e^{\alpha\sigma} d\sigma$. Тогда рассмотрим следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\dot{\overline{x}} = \Big(-\alpha + \varepsilon \int_0^\infty K(\sigma) e^{\alpha\sigma}\Big) \overline{x} + F(t, \overline{x}) + f(t, \overline{x}) \dot{\xi}(t). \tag{17}$$

Вопрос о близости решений уравнений (14), (17), определенных одинаковым начальным значением $x(0)$, рассматривается в следующей теореме.

Теорема. *Пусть выполняются условия:*

1) *функции $F(t, x)$, $f(t, x)$ определены при $t \in [0, T]$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ и измеримы по совокупности переменных;*

2) *существует такая постоянная* K, *что при* $t \in [0, T]$, $x, y \in (-\infty, \infty)$ *справедливы неравенства* $| f(t, x) - f(t, y) | + | F(t, x) - F(t, y) | \leqslant K | x - y |$, $| f(t, x) |^2 + | F(t, x) |^2 \leqslant K^2 (1 + | x |^2)$;

3) $Mx^2(0) < \infty$, $\infty > 0$.

Тогда для сколь угодно малого числа $\sigma > 0$ *существует положительное число* $\varepsilon(\sigma)$ *такое, что для всех* $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon(\sigma)$ *выполняется равенство*

$$M [x(t) - \overline{x}(t)]^2 < \sigma \tag{18}$$

при $t \in [0, T]$.

Доказательство. Представим уравнение (17) в интегральной форме:

$$\overline{x}(t) = \overline{u}(t) x(0) + \int_0^t \overline{u}(t-s) F(s, \overline{x}(s)) ds + \int_0^t \overline{u}(t-s) f(s, \overline{x}(s)) d\xi(s), \tag{19}$$

где

$$\dot{\overline{u}}(t) = \left(-\alpha + \varepsilon \int_0^\infty K(\sigma) e^{\alpha\sigma} d\sigma\right) \overline{u}(t), \quad \overline{u}(0) = 1. \tag{20}$$

Рассматривая детерминированные уравнения (16), (20), нетрудно показать, что существует постоянная A, для которой

$$| u(t) | + | \overline{u}(t) | < A \text{ при } t \in [0, T], \tag{21}$$

и что для любого числа $\delta_1 > 0$ существует число $\varepsilon(\delta_1) > 0$ такое, что для всех $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon(\sigma_1)$

$$| u(t) - \overline{u}(t) |^2 < \delta_1 \text{ при } t \in [0, T]. \tag{22}$$

При выполнении условий 1 — 3 теоремы следует [7], что решения стохастических интегральных уравнений (15), (19) существуют единственно и существует такая постоянная B, что

$$M [\overline{x}(t)]^2 < B \text{ при } t \in [0, T]. \tag{23}$$

Согласно (15), (19) для $t \in [0, T]$ будем иметь

$$M [x(t) - \overline{x}(t)]^2 = M \Big\{ (u(t) - \overline{u}(t)) x(0) + \int_0^t (u(t-s) F(s, x(s)) -$$

$$- \overline{u}(t-s) F(s, \overline{x}(s))) ds + \int_0^t (u(t-s) f(s, x(s)) - \overline{u}(t-s) f(s, \overline{x}(s)) d\xi(s) \Big\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 3M [(u(t) - \overline{u}(t))^2 x^2(0)] + 3M \Big[\int_0^t (u(t-s) F(s, x(s)) - \overline{u}(t-s) \times$$

$$\times F(s, \overline{x}(s))) ds \Big]^2 + 3M \Big[\int_0^t (u(t-s) f(s, x(s)) - \overline{u}(t-s) f(s, \overline{x}(s))) d\xi(s) \Big]^2 \leqslant$$

$$\leqslant 3 | u(t) - \overline{u}(t) |^2 Mx^2(0) + 3tM \int_0^t [u(t-s) F(s, x(\sigma)) - \overline{u}(t-s) \times$$

$$\times F(s, \overline{x}(s)) \Big]^2 ds + 3M \int_0^t [u(t-s) f(s, x(s)) - \overline{u}(t-s) f(s, \overline{x}(s))]^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant 3 | u(t) - \overline{u}(t) |^2 Mx^2(0) + 6tA^2K^2 \int_0^t M [x(s) - \overline{x}(s)]^2 ds +$$

$$+ 6t\delta_1 K^2 \int_0^t M (1 + | \overline{x} |^2) ds + 6A^2K^2 \int_0^t M [x(s) - \overline{x}(s)]^2 ds +$$

$$+6\delta_1K^2\int_0^t M(1+|\overline{x}|)^2ds \leqslant 3\delta_1 Mx^2(0)+6K^2A^2(T+1)\int_0^t M[x(s)-\overline{x}(s)]^2ds+$$

$$+6K^2\delta_1(T+1)\int_0^t M[1+|x|^2]\,ds \leqslant 6K^2A^2(T+1)\int_0^t M[x(s)-\overline{x}(s)]^2ds+$$

$$+6K^2\delta_1(T_1+1)T(B+1)=\delta_1N+L\int_0^t M[x(s)-\overline{x}(s)]^2\,ds,$$

где $N=6K^2(T+1)T(B+1)+3Mx^2(0)$, $L=6K^2A^2(T+1)$. Таким образом, установили, что при $t\in[0,T]$ $M[x(t)-\overline{x}(t)]^2\leqslant\delta_1N+L\int_0^t M[x(s)-\overline{x}(s)]^2ds$, откуда с учетом известного интегрального неравенства следует $M[x(t)-$ $-\overline{x}(t)]^2\leqslant\delta_1N+L\int_0^t e^{L(t-s)}\delta_1Nds\leqslant\delta_1N\left(1+\dfrac{e^{LT}-1}{L}\right)$, $t\in[0,T]$. Итак, если взять $\delta_1=\delta/N\left(1+\dfrac{e^{LT}-1}{L}\right)$, то $M[x(t)-\overline{x}(t)]^2=\delta$, $t\in[0,T]$. Теорема доказана.

3. Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, уравнение движения которой имеет вид

$$\ddot{x}+\omega^2x=\varepsilon\int_0^t[R_1(t-s)\,x(s)+R_2(t-s)\,\dot{x}(s)]\,ds+\varepsilon F(t,x,\dot{x})+$$
$$+\sqrt{\varepsilon}f(t,x,\dot{x})\,\dot{\xi}(t), \tag{24}$$

где $\dot{\xi}(t)$ — «белый шум» с единичной интенсивностью. Уравнение (24) можно представить в матричной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix}+\varepsilon\int_0^t K(t-s)\begin{bmatrix}x(s)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}ds+\varepsilon\begin{bmatrix}0\\ F\end{bmatrix}+\sqrt{\varepsilon}\begin{bmatrix}0\\ f\end{bmatrix}\dot{\xi}(t), \tag{25}$$

где

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix},\quad K(\delta)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ R_1(\delta) & R_2(\delta)\end{bmatrix}. \tag{26}$$

Фундаментальная матрица решений системы (6) имеет вид

$$H(t)=\begin{bmatrix}\cos\omega t & \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}, \tag{27}$$

откуда

$$\int_0^\infty K(\delta)\,H-(\delta)\,d\delta=\begin{bmatrix}0\\ \int_0^\infty[R_1(\delta)\cos\omega\delta+\omega R_2(\delta)\sin\omega\delta]\,d\delta\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0\\ \int_0^\infty\left[R_2(\delta)\cos\omega\delta-\dfrac{R_1(\delta)}{\omega}\sin\omega\delta\right]d\delta\end{bmatrix}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в уравнение (13), получаем следующее приближенное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}+\omega^2x=\varepsilon\left\{\int_0^\infty[R_1(\delta)\cos\omega\delta+\omega R_2(\delta)\sin\omega\delta]\,d\delta x+\int_0^\infty[R_2(\delta)\cos\omega\delta-\right.$$
$$\left.-\frac{R_1(\delta)}{\omega}\sin\omega\delta\right]d\delta\dot{x}+F(t,x,\dot{x})\Big\}+\sqrt{\varepsilon}f(t,x,\dot{x})\,\dot{\xi}(t). \tag{29}$$

К уравнению (29) применимы методы марковских процессов. В качестве примера рассмотрим автономную систему Ван-дер-Поля со случайным параметрическим возбуждением при наличии линейного члена вязкоупругости

$$\ddot{x} + [\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t)]\,x = \varepsilon\left\{\int_0^t [R_1(t-s)\,x(s) + R_2(t-s)\,\dot{x}(s)]\,ds + (1-\gamma x^2)\,\dot{x}\right\}, \tag{30}$$

где ядра релаксации равны

$$R_1(\sigma) = h_1 e^{-\lambda\sigma}, \quad R_2(\sigma) = h_2 e^{-\beta\sigma}, \quad h_1,\ h_2,\ \lambda,\ \beta > 0. \tag{31}$$

С учетом

$$\int_0^\infty e^{-px}\sin bx\,dx = \frac{b}{b^2+p^2}, \quad \int_0^\infty e^{-px}\cos bx\,dx = \frac{p}{b^2+p^2} \tag{32}$$

соответствующее приближенное уравнение (29) принимает вид

$$\ddot{x} + [\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t)]\,x = \varepsilon\left\{\left(\frac{-h_1}{\omega^2+\lambda^2} + \frac{h_2\beta}{\omega^2+\beta^2}\right)\dot{x} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{h_1\lambda}{\omega^2+\lambda^2} + \frac{h_2\omega^2}{\omega^2+\beta^2}\right)x + (1-\gamma x^2)\,\dot{x}\right\} \equiv F(x, \dot{x}). \tag{33}$$

Решение уравнения (33) ищем в виде [4 — 7]

$$x = a\cos\psi, \quad \dot{x} = -a\omega\sin\psi, \quad \psi = \omega t + \theta. \tag{34}$$

Стационарное усреднение уравнения Колмогорова — Фоккера — Планка для плотности вероятностей амплитуды $W(a)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1(a)\,W) - \frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}(a)\,W) = 0, \tag{35}$$

где коэффициенты сноса и диффузии равны

$$K_1(a) = M\left\{-\frac{1}{\omega}F(x, \dot{x})\sin\psi + \frac{x^2\sigma^2\cos^2\psi}{2\omega^2 a}\right\} = \left(\frac{3\sigma^2}{16\omega^2} + \frac{1}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{h_2\beta}{2(\omega^2+\beta^2)} - \frac{h_1}{2(\omega^2+\lambda^2)}\right)a - \frac{\gamma a^3}{8}, \quad K_{11}(a) = M\left\{\frac{\sigma^2 x^2\sin^2\psi}{\omega^2}\right\} = \frac{\sigma^2 a^2}{8\omega^2}. \tag{36}$$

Решая уравнение (35), получаем

$$W(a) = Ca^{\frac{8\omega^2}{\sigma^2}\left(1 + \frac{h_2\beta}{\omega^2+\beta^2} - \frac{h_1}{\omega^2+\lambda^2}\right)+1}\exp\left\{-\frac{\gamma\omega^2}{\sigma^2}a^2\right\}. \tag{37}$$

Формула (37) показывает, что если параметры вязкоупругости h_1, h_2, λ, β и собственная частота ω удовлетворяют равенству

$$\frac{h_2\beta}{\omega^2+\beta^2} - \frac{h_1}{\omega^2+\lambda^2} + 1 = 0, \tag{38}$$

то плотность вероятностей амплитуды (37) имеет вид

$$W(a) = Ca\exp\left\{-\frac{\gamma\omega^2}{\sigma^2}a^2\right\}, \tag{39}$$

т. е. такую же форму, какую имеет плотность вероятностей амплитуды решения линейной системы со случайным внешним возбуждением

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\gamma\dot{x} + \omega^2 x = \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t). \tag{40}$$

Если величина

$$\frac{8\omega^2}{\sigma^2}\left(1+\frac{h_2\beta}{\omega^2+\beta^2}-\frac{h_1}{\omega^2+\lambda^2}\right)+1 \qquad (41)$$

отрицательна, то плотность вероятностей (37) будет иметь неинтегрируемую особенность в точке $a = 0$. Следовательно, установившиеся случайные колебания, определяемые плотностью вероятностей (37), невозможны. Если величина (41) положительна, то плотность вероятностей (37) существует для всех $a \in [0, \infty]$ и достигает максимума при

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\gamma}\left[\frac{\sigma^2}{\omega^2}+8\left(1+\frac{h_2\beta}{\omega^2+\beta^2}-\frac{h_1}{\omega^2+\lambda^2}\right)\right.}. \qquad (42)$$

В отсутствие случайного возмущения и вязкоупругости ($\sigma = 0$, $h_1 = 0$, $h_2 = 0$) из (42) следует известное значение амплитуды автоколебания системы Ван-дер-Поля.

1. *Митропольский Ю. А., Нгуен Донг Ань.* Случайное колебание в некоторых вязко-упругих нелинейных системах // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 4.— С. 468—472.
2. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М. : Наука, 1964.— 432 с.
3. *Попов Е. П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах.— М. : Наука, 1973.— 584 с.
4. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах //Приближенные методы исследования нелинейных систем. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 102—147.
5. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем.— М. : Наука, 1979.— 336 с.
6. *Диментберг М. Ф.* Некоторые стохастические задачи механических колебаний.— М. : Наука, 1980.— 368 с.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 612 с.
8. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу решения уравнений КФП для неавтономной механической системы с одной степенью свободы // Прикл. механика.— 1984.— 20, № 3.— С. 87—93.
9. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
10. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термо-вязкоупругости.— М. : Наука, 1970.— 280 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 05.11.85