УДК 517.946

М. А. Фельдман

Коэрцитивные граничные задачи для параболических переопределенных систем с переменными коэффициентами

1. Пусть M — гладкое многообразие с гладкой границей Γ, $\dim M = n$; E_i и G_i — гладкие конечномерные векторные расслоения над M и Γ соответственно (гладкость класса C^∞); $M' = M \times R^1$, $\Gamma' = \Gamma \times R^1$; E_i' и G_i' — обратные образы расслоений E_i и G_i при проекциях $M' \to M$ и $\Gamma' \to \Gamma$ $\mathscr{E}(E_i')$ и $\mathscr{E}(G_i')$ — пространства C^∞ гладких сечений расслоений E_i' и G_i' Пусть $(A, B): \mathscr{E}(E_0') \to \mathscr{E}(E_1') \times \mathscr{E}(G_1')$ — оператор граничной задачи, где B — оператор вида $B: y \to (B_1 y)|_{\Gamma'}$, A и B_1 — дифференциальные операторы. Обозначим через $\sigma_\xi(\tilde{x}, A)$ главный b-однородный символ оператора A, где $\tilde{x} = (x, t) \in M'$ $(x \in M, t \in R^1)$, $\xi = (\hat{\xi}, \tau) \in T^*M'$ (переменные $\hat{\xi}$ соответствуют $\partial/\partial x$, τ соответствует $\partial/\partial t$); b-однородность означает, что $\sigma_{(r\hat{\xi}, r^b\tau)}(\tilde{x}, A) = r^k \sigma_{(\hat{\xi}, \tau)}(\tilde{x}, A)$ для всякого $r > 0$. Обозначим через p^*M' и $p^*\Gamma'$ обратные образы расслоений $T^*M \times \overline{C}^-$ и $T^*\Gamma \times \overline{C}^-$ при проекциях $M' \to M$ и $\Gamma' \to \Gamma$, где $C^- = \{z \in C^1, \operatorname{Im} z < 0\}$, т. е. элементы $p^*M'|_{\tilde{x}}$ — пары вида $(\hat{\xi}, \tau)$, где $\tau \in \overline{C}^-$.

Определение 1. *Дифференциальный оператор $A: \mathscr{E}(E_0') \to \mathscr{E}(E_1')$ назовем параболическим с весом b, если при всех $\tilde{x} \in M'$, $\xi \in p^*M'$, $\xi \neq 0$, отображение $\sigma_\xi(\tilde{x}, A): E_0'|_{\tilde{x}} \to E_1'|_{\tilde{x}}$ — мономорфизм.*

Граничные задачи для переопределенных параболических операторов рассматривались в работах [1, 2]. В работе [1] показано, что для параболической граничной задачи (A, B) выполнено $\operatorname{Ker}(A, B) = \{0\}$ и образ оператора (A, B) замкнут в пространствах Гельдера. В работе [2] для оператора (A, B), коэффициенты которого не зависят от t, построен дифференциально-граничный (д-г) оператор совместимости, т. е. оператор $\Phi: \mathscr{E}(E_1') \times \mathscr{E}(G_1') \to \mathscr{E}(E_2') \times \mathscr{E}(G_2')$ вида

$$\Phi: (f, g) \to (\Phi^{11} f, (\Phi^{21} f)|_{\Gamma'} + \Phi^{22} g), \tag{1}$$

где Φ^{11}, Φ^{21}, Φ^{22} — дифференциальные операторы, и при выполнении условий коэрцитивности [2] показана разрешимость граничной задачи $(A, B)\, y = (f, g)$ при выполнении условий совместности $\Phi(f, g) = 0$ в анизотропных пространствах Соболева с экспоненциальным весом на бесконечном по t интервале.

В данной работе для оператора (A, B) с коэффициентами, зависящими от t, строится д-г оператор совместности и доказывается разрешимость коэрцитивной граничной задачи при выполнении условий совместности на конечном и бесконечном интервале по t (в случае бесконечного интервала коэффициенты предполагаются не зависящими от t при больших t).

2. Пусть $J^k(E')$ — расслоение k струй [3]. Для целого числа $b > 1$ определим расслоение $J^{k,b}(E')$. Сечения s_1 и s_2 расслоения E' назовем эквивалентными, если в некоторой системе координат в окрестности $u \in M'$, содержащей точку $\tilde{x}$, выполняется равенство $\dfrac{\partial^{|\alpha|+r}}{\partial x^\alpha \partial t^r}(s_1 - s_2)(\tilde{x}) = 0$ при всех $|\alpha| + rb \leqslant k$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс. Множество классов эквивалентности обозначим $J^{k,b}_{\tilde{x}}(E')$ и $J^{k,b}(E') = \bigcup\limits_{\tilde{x} \in M'} J^{k,b}_{\tilde{x}}(E')$. Существуют проекция $\pi_b: J^k(E') \to J^{k,b}(E')$ и отображение $j^{k,b} = \pi_b j^k: \mathscr{E}(E') \to \mathscr{E}(J^{k,b}(E'))$.

Дифференциальный оператор порядка (k, b) (порядка k с весом b по t) — это оператор вида $A = p^b(A) j^{k,b} : \mathscr{E}(E_0') \to \mathscr{E}(E_1')$ где $p^b(A) : J^{k,b}(E_0') \to E_1'$ — морфизм расслоений постоянного ранга. Оператор A также представляется в виде $A = p(A) j^k$, где $p(A) : J^k(E_0') \to E_1'$ — морфизм расслоений [3].

Определение 2. *Дифференциальный оператор A порядка (k, b) назовем b-регулярным, если оператор A регулярен* [3] *и при всех $l \geqslant 0$ множества $R_{k+l,b} = \operatorname{Ker} p^b(j^l A)$ — векторные расслоения. Оператор A назовем b-формально интегрируемым, если A b-регулярен и при всех $l = bm$ $\pi_b : R_{k+(l+1),b} \to R_{k+l,b}$ — эпиморфизмы. Оператор $A : \mathscr{E}(E_1') \to \mathscr{E}(E_2')$ порядка (k_1, b) назовем b-оператором совместности оператора A, если при каждом $l = bm$ точен комплекс*

$$J^{k+k_1+l,b}(E_0') \xrightarrow{p^b(j^{k_1+l,b}A)} J^{k_1+l,b}(E_1') \xrightarrow{p^b(j^{l,b}A_1)} J^{l,b}(E_2'). \tag{2}$$

Предложение 1. *Пусть A — b-регулярный дифференциальный оператор порядка (k, b). Тогда существует b-оператор совместности оператора A.*

Доказательство. Обозначим через $\tilde{A}_1$ оператор совместности оператора A [3] и $k' = \operatorname{ord} \tilde{A}_1$. Из b-регулярности оператора A следует, что $\operatorname{Im} p^b(j^{k'b,b}A)$ — подрасслоение расслоения $J^{k'b,b}(E_1')$. Пусть E_2' и $p^b(A_1) : J^{k.b,b}(E_1') \to E_2'$ — такие расслоение и морфизм расслоений, что $\operatorname{Ker} p^b(A_1) = \operatorname{Im} p^b(j^{k'b,b}A)$. Покажем, что оператор $A_1 = p^b(A_1) j^{k'b,b} : \mathscr{E}(E_1') \to \mathscr{E}(E_2')$ — b-оператор совместности оператора A. Точность комплекса (2) при $k_1 = k'b$ для $l = 0$ очевидна, а для $l > 0$ следует из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
J^{k+k'b+l}(E_0') \arrow[r, "p(j^{k'b+l}A)"] \arrow[d, "\pi_b"] & J^{k'b+l}(E_1') \arrow[r, "p(j^{k'(b-1)+l}\tilde{A}_1)"] \arrow[d, "\pi_b"] & J^{k'(b-1)+l}(\tilde{E}_2) \\
J^{k+(k'b+l),b}(E_0') \arrow[r, "p^b(j^{k'b+l,b}A)"] \arrow[d] & J^{k'b+l,b}(E_1') \arrow[r, "p^b(j^{l,b}A_1)"] \arrow[d] & J^{l,b}(E_2'), \\
0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

столбцы и верхняя строка которой точны, а левый квадрат коммутативен, и из равенства $\pi_b \operatorname{Ker} p(j^{k'(b-1)+l}\tilde{A}_1) = \operatorname{Ker} p^b(j^{l,b}A_1)$, которое следует из формальной интегрируемости оператора $\tilde{A}_1$.

Предложение 2. *Пусть A_1 — b-оператор совместности оператора A, где A — b-формально интегрируемый оператор и* $\dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(\tilde{x}, A) = 0$ *при всех $\tilde{x} \in M'$, $\xi \in p^*M' \setminus 0$. Тогда комплекс*

$$E_0'|_{\tilde{x}} \xrightarrow{\sigma_\xi(\tilde{x}, A)} E_1'|_{\tilde{x}} \xrightarrow{\sigma_\xi(\tilde{x}, A_1)} E_2'|_{\tilde{x}} \tag{4}$$

точен при всех $x \in M'$, $\xi \in p^*M'$, $\xi \neq 0$.

Доказательство. Фиксируем точку $\tilde{x} \in M'$ и в некоторой окрестности точки $\tilde{x}$ запишем операторы A и A_1 в координатах. Пусть $A^0(\tilde{x})$, $A_1^0(\tilde{x})$ — главные b-однородные части операторов A и A_1 с фиксированными в точке $\tilde{x}$ коэффициентами. Очевидно, что операторы $A^0(\tilde{x})$ и $A_1^0(\tilde{x})$ b-формально интегрируемы и $A_1^0(\tilde{x})$—b-оператор совместности оператора $A_0(\tilde{x})$. Но оператор $A^0(\tilde{x})$ имеет постоянные коэффициенты и оператор совместности оператора $A^0(\tilde{x})$, построенный в работе [2], является b-оператором совместности. Поэтому утверждение следует из утверждения 1 работы [2].

Рассмотрим д-г оператор Φ вида (1), в котором оператор Φ^{21} содержит дифференцирования только по касательным к Γ' направлениям, т. е. $(\Phi^{21}f)|_{\Gamma'}=$ $=\hat{\Phi}^{21}f|_{\Gamma'}$, где $\hat{\Phi}^{21}:\mathscr{E}(E_0'|_{\Gamma'})\to\mathscr{E}(G_1')$ — дифференциальный оператор. Обозначим $\hat{\Phi}(f,g)=\hat{\Phi}^{21}f+\Phi^{22}g$. Пусть Φ^{11} — оператор порядка (k,b); Φ^{21} и Φ^{22} — операторы порядка (l,b);

$$\mathcal{R}_{k+m}=\operatorname{Ker} p\,(j^m\Phi^{11})\subset J^{k+m}(E_0'),\quad \mathcal{R}_{k+m}^b=\operatorname{Ker} p^b\,(j^{m,b}\Phi^{11})\subset J^{k+m,b}(E_0'),$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{l+m}=\operatorname{Ker} p\,(j^m\hat{\Phi})\subset J^{l+m}(E_0'|_{\Gamma'})\oplus J^{l+m}(G_0')\subset J^{l+m}(E_0')_{\Gamma'}\oplus J^{l+m}(G_0'),$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{l+m}^b=\operatorname{Ker} p^b\,(j^{m,b}\hat{\Phi})\subset J^{l+m,b}(E_0'|_{\Gamma'})\oplus J^{l+m,b}(G_0')\subset J^{l+m,b}(E_0')|_{\Gamma'}\oplus J^{l+m,b}(G_0').$$

Следующее определение является условием невырожденности коэффициентов оператора Φ и налагает требования на формальные свойства оператора Φ^{11}.

Определение 3. *Д-г оператор Φ назовем b-регулярным, если конормаль к Γ' квазирегулярна* [4] *для оператора Φ^{11} в каждой точке $\bar{x}\in\Gamma'$, оператор Φ^{11} b-формально интегрируем и множества $\mathcal{R}_{k+m_1}\cap\tilde{\mathcal{R}}_{m+l_2}$ и $\mathcal{R}_{k+m_1}^b\cap\tilde{\mathcal{R}}_{l+m_2}^b$ подрасслоения расслоений $J^{m_1+k}(E_0')|_{\Gamma_1}\oplus J^{m_2+l}(G_0')$ и $J^{m_1+k,b}(E_0')|_{\Gamma'}\oplus J^{m_2+l,b}(G_0')$ при всех целых m_1, m_2, $m_1-m_2=l-k$ (в пересечениях $\mathcal{R}_{k+m_1}$ рассматривается как $\mathcal{R}_{k+m_1}\oplus J^{m_2+l}(G_0')$, а $\mathcal{R}_{k+m_1}^b$ — как $\mathcal{R}_{k+m_1}^b\oplus J^{m_2+l,b}(G_0')$).*

Пусть $\Phi_0=(A,B):\mathscr{E}(E_0')\to\mathscr{E}(E_1')\oplus\mathscr{E}(G_1')$ — b-регулярный оператор граничной задачи, $\tilde{\Phi}_1$ — оператор совместности оператора Φ_0 [5]; (k,b) и (l,b) — порядки операторов A и B, c — порядок оператора $\tilde{\Phi}_1^{21}$, число r таково, что $d=rbc+l-k\geqslant 0$. Из b-регулярности оператора Φ_0 следует, что $p^b(j^{rbc}\hat{B})(\mathcal{R}_{k+d|\Gamma'}^b)$ — подрасслоение расслоения $J^{rbc,b}(G_1')$, где $\hat{B}f=Bf|_{\Gamma'}$. Существуют такие расслоение G_2' и морфизм $p^b(\Phi_1^{22}):J^{rbc,b}(G_1')\to G_2'$, что $\operatorname{Ker}p^b(\Phi_1^{21})=p^b(j^{rbc}\hat{B})(\mathcal{R}_{k+k|\Gamma'}^b)$. В диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_{k+(d+s)|\Gamma'} \arrow[r, "p\,(j^{rbc+s}\hat{B})"] \arrow[d, "\pi_b"] & J^{rbc+s}(G_1') \arrow[r, "p\,(j^{c(rb-1)+r}\tilde{\Phi}_1^{22})"] \arrow[d, "\pi_b"] & J^{c(rb-1)+c}(\tilde{G}_2') \\
\mathcal{R}_{k+(d+s)|\Gamma'}^b \arrow[r, "p^b\,(j^{rbc+s,b}\hat{B})"] \arrow[d] & J^{rbc+s,b}(G_1') \arrow[r, "p^b\,(j^{s,b}\Phi_1^{22})"] \arrow[d] & J^{s,b}(G_2') \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

верхняя строка точна при всяком $s\geqslant 0$ [4], а столбцы точны (первый — из b-формальной интегрируемости оператора A), левый квадрат коммутативен, оператор $\tilde{\Phi}_1^{22}$ формально интегрируем [4]. Поэтому, как в предложении 2, нижняя строка точна при всех $s=mb$. При $s=0$ из диаграммы определяется морфизм $p(D):J^{c(rb-1)}(\tilde{G}_2')\to G_2'$ такой, что диаграмма коммутативна. Оператор $\Phi_1:(f,g)\to(\Phi_1^{11}f,\ D\tilde{\Phi}_1^{21}f+D\tilde{\Phi}_1^{22}g)$, где $D=p^b(D)\,j^{c(rb-1)}$ и Φ_1^{11} — b-оператор совместности оператора A, назовем b-оператором совместности оператора (A,B). Следовательно, доказано следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть (A,B) — b-регулярный оператор граничной задачи. Тогда существует д-г оператор Φ_1, b-оператор совместности оператора (A,B), удовлетворяющий следующим свойствам:*

а) *оператор Φ_1^{11} — b-оператор совместности оператора A;*

б) *при всех $s=mb$ точен комплекс*

$$\mathcal{R}_{k+(d+s)|\Gamma'}^b\xrightarrow{p^b\,(j^{rbc+s,b}\hat{B})}J^{rbc+s,b}(G_1')\xrightarrow{p^b\,(j^{s,b}\Phi_1^{22})}J^{s,b}(G_2');\tag{5}$$

в) $\Phi_1\cdot(A,B)=0$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* (A, B) — *такой* ∂-*г оператор, что существует дифференциальный оператор* P, *для которого из равенства* $PAf = 0$ *следует* $Af = 0$, *и оператор* (PA, B) b-*регулярен. Тогда существует* Φ_1 — b-*оператор совместности оператора* (A, B), *удовлетворяющий свойствам* а) — в) *предположения* 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\tilde{\Phi}_1$ — b-оператор совместности оператора (PA, B), то оператор Φ_1 определяется формулой $\Phi_1(f, g) = \tilde{\Phi}_1(Pf, g)$.

3. Приведем определения используемых далее пространств функций и сечений расслоений: $\overset{+}{H}{}^{s,b}(R^n)$ — пополнение пространства C_0^∞ функций $f(\tilde{x}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$, равных нулю при $t < 0$, по норме $\|f\|^2_{s,b} = \int (1 + |\bar{\xi}|^{2b} + |\tau|^2)^{s/b} |\tilde{f}(\xi')|^2 d\xi'$, где $\xi' = (\bar{\xi}, \tau)$, $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, $\tilde{f}(\xi') = \int e^{-i\tilde{x}\xi'} f(\tilde{x}) \times d\tilde{x}$ — преобразование Фурье функции f; $\overset{+}{H}{}^{s,b,\delta}(R^n)$ — пространство, состоящее из таких функций f, что $e^{-\delta t} f \in \overset{+}{H}{}^{s,b}(R^n)$, норма определяется формулой [8] $\|f\|^2_{s,b,\delta} = \int (1 + |\bar{\xi}|^{2b} + |\tau - i\delta|^2)^{s/b} |\tilde{f}(\bar{\xi}, \tau - i\delta)|^2 d\xi'$, где $\tilde{f}(\bar{\xi}, \tau - i\delta) = \widetilde{(e^{-\delta t} f)}(\xi')$ (с помощью разбиения единицы определяются пространства $\overset{+}{H}{}^{s,b}(G_i')$, $\overset{+}{H}{}^{s,b,\delta}(G_i')$ сечений расслоений G_i'); $\overset{+}{H}{}^{s,b}(R_+^{n+1})$ — пространство, состоящее из функций $f(\tilde{x})$ на $R_+^{n+1} = \{\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n, t), x_n > 0\}$, которые можно продолжить до функций, принадлежащих $\overset{+}{H}{}^{s,b}(R^{n+1})$. Норма определяется формулой $\|f\|^+_{s,b} = \|r^+ (\xi_- - i)^s \widetilde{(j^+ f)}\|$, где справа норма в $L^2(R^{n+1})$; $j^+ f$ — продолжение f на R^{n+1} нулем при $x_n < 0$, $\xi_- = e^{i\pi(b-1)/(2b)} \tau^{1/b} - i|\bar{\xi}| - \xi_n$, оператор r^+ определен в работе [6]; $\overset{+}{H}{}^{s,b,\delta}(R_+^{n+1})$ — пространство функций, таких, что $e^{-\delta t} f \in \overset{+}{H}{}^{s,b}(R_+^{n+1})$ с нормой $\|f\|^+_{s,b,\delta} = \|r^+ (\xi_-(\delta) - i)^s \times \widetilde{(j^+ e^{-\delta t} f)}\|$, где $\xi_-(\delta) = (\tau - i\delta)^{1/b} - i|\bar{\xi}| - \xi_n$. С помощью разбиения единицы определяются пространства $\overset{+}{H}{}^{s,b}(E_i')$, $\overset{+}{H}{}^{s,b,\delta}(E_i')$ сечений расслоений E_i'.

Пусть

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} P + G & K \\ T & Q \end{pmatrix} : \mathscr{E}(E_0') \times \mathscr{E}(G_0') \to \mathscr{E}(E_1') \times \mathscr{E}(G_1') \tag{6}$$

— оператор Буте де Монвеля [6] и внутренний и граничный символы оператора $\mathcal{A}$ (обозначим их $\sigma_{M'}(\mathcal{A})(\tilde{x}, \xi)$ и $\sigma_{\Gamma'}(\mathcal{A})(\tilde{x}, \xi')$) продолжаются голоморфно по τ на $\bar{C}^-$ и не зависят от t при $t > T$ (подробное определение классов таких символов дано в работе [7]). Обозначим через $\mathcal{U}$ множество таких операторов, $\hat{\mathcal{A}}$ — оператор с символами $\sigma_{M'}(\mathcal{A})(\tilde{x}, \bar{\xi}, \xi_n, \tau - i\delta)$ и $\sigma_{\Gamma'}(\mathcal{A})(\tilde{x}, \bar{\xi}, \tau - i\delta)$ при некотором $\delta > 0$. Определим, следуя [8], оператор

$$\mathcal{A}_\delta : u \to e^{\delta t} \hat{\mathcal{A}}(e^{-\delta t} u). \tag{7}$$

Следующее предположение формулируется без доказательства. Утверждения, аналогичные предложениям 4 и 5, сформулированы в работе [7], однако определение действия операторов, принадлежащих множеству $\mathcal{U}$, в пространствах $\overset{+}{H}{}^{s,b,\delta}$ в данной работе (формула (7)) отличается от принятого в работе [7].

П р е д л о ж е н и е 4. *Пусть оператор* (6) *принадлежит множеству* $\mathcal{U}$, $\operatorname{ord} P = \operatorname{ord} G = s_1 - s_2$, $\operatorname{ord} K = s_1 - t_2 + 1/2$, $\operatorname{ord} Q = t_1 - t_2$, $\operatorname{ord} T = t_1 - s_2 - 1/2$ *и* $s_2 - 1/2$ *больше, чем класс операторов* G *и* T [6] (*порядки операторов определяются порядком* b-*однородности главного символа*). *Тогда при всяком* $\delta > 0$ *непрерывно отображение*

$$\mathcal{A}_\delta : \overset{+}{H}{}^{s_1,b,\delta}(E_0') \times \overset{+}{H}{}^{t_1,b,\delta}(G_0') \to \overset{+}{H}{}^{s_2,b,\delta}(E_1') \times \overset{+}{H}{}^{t_2,b,\delta}(G_1'). \tag{8}$$

Если главные b-однородные внутренний и граничный символы оператора $\mathcal{A}$ обратимы при всех $\tau, \hat{\xi} \neq 0$ ($\tau \in \overline{C^-}$), то отображение (8) при достаточно больших δ — изоморфизм и оператор $\mathcal{A}^{-1}$ принадлежит $\mathcal{U}$. Главные внутренний и граничный символы оператора $\mathcal{A}^{-1}$ есть обратные операторы к главным внутреннему и граничному символам оператора $\mathcal{A}$.

Приведем схему доказательства. Утверждение выводится из неравенства $\| \mathcal{A}_\delta u \|_{(s_2,t_2),b,\delta} \leqslant C \| u \|_{(s_1,t_1),b,\delta}$, где C не зависит от $u \in \overset{+}{H}{}^{s_1,b,\delta}(E_0') \times \overset{+}{H}{}^{t_1,b,\delta}(G_0')$ и $\delta > \delta_0$.

Для псевдодифференциальных операторов на замкнутом многообразии аналогичное неравенство доказано в работе [8]. На операторы, принадлежащие множеству $\mathcal{U}$, неравенство распространяется так же, как подобные неравенства при доказательстве непрерывности операторов Буте де Монвеля в пространствах Соболева [7].

Обозначим $M_T' = M \times [0, T]$, $\Gamma_T' = \Gamma \times [0, T]$; E_{iT}' и G_{iT}' — сужения на M_T' и Γ_T' расслоений E_i' и G_i'; $\overset{+}{H}{}^{s,b}(E_{iT}')$ — пространство сечений расслоения E_{iT}', которые можно продолжить до сечений, принадлежащих $\overset{+}{H}{}^{s,b}(E_i')$. Оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$ определяет отображение $\mathcal{A} : \mathcal{E}(E_{0T}') \times \mathcal{E}(G_{0T}') \to \mathcal{E}(E_{1T}') \times \mathcal{E}(G_{1T}')$. При этом символ оператора $\mathcal{A}$ достаточно определить на интервале $[0, T+\varepsilon]$ по t. Множество таких операторов обозначим через $\mathcal{U}_T$.

Предложение 5. *Пусть для оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{U}_T$ выполнены все предположения предложения* 4. *Тогда отображение* $\mathcal{A} : \overset{+}{H}{}^{s_1,b}(E_{0T}') \times \overset{+}{H}{}^{t_1,b}(G_{0T}') \to \overset{+}{H}{}^{s_2,b}(E_{1T}') \times \overset{+}{H}{}^{t_2,b}(G_{1T}')$ — *изоморфизм и для оператора* $\mathcal{A}^{-1}$ *выполняются утверждения предложения* 4.

Доказательство. Пусть $\alpha(t)$ — C^∞-функция, $\alpha(t) = t$ при $0 \leqslant t \leqslant T$; $0 \leqslant \alpha(t) \leqslant T + \varepsilon$ при $T \leqslant t \leqslant T + \varepsilon/2$ и $\alpha(t) = T + \varepsilon/2$ при $t \geqslant T + \varepsilon$. Оператор $\hat{\mathcal{A}} \in \mathcal{U}$ с символами $\sigma_{M'}(\mathcal{A})(x, \alpha(t), \xi)$ и $\sigma_{\Gamma'}(\mathcal{A})(x, \alpha(t), \xi')$ совпадает на интервале $[0, T]$ по t с оператором $\mathcal{A}$ и удовлетворяет условиям предложения 4. Предложение доказано.

4. Пусть $\Phi_0 = (A, B)$ — b-регулярный оператор граничной задачи и Φ_1 — b-оператор совместности оператора (A, B). Пусть разбиения $G_t' = \oplus_j G_t^j$, $l = 1, 2$, число s и мультииндексы β_1, β_2 таковы, что в комплексе

$$0 \to \overset{+}{H}{}^{s,b}(E_{0T}') \xrightarrow{A,B} \overset{+}{H}{}^{s-k,b}(E_{1T}') \times \overset{+}{H}{}^{s-\beta_1,b}(G_{1T}') \xrightarrow{\Phi_1} \overset{+}{H}{}^{s-k',b}(E_{2T}') \times \overset{+}{H}{}^{s-\beta_2,b}(G_{2T}') \tag{9}$$

все отображения ограничены (здесь $\operatorname{ord}(A = (k, b)$, $\operatorname{ord} \Phi_1^{11} = (k' - k, b)$, $\overset{+}{H}{}^{s-\beta_l,b}(G_{lT}') = \oplus_j \overset{+}{H}{}^{s-\beta_l^j,b}(G_{lT}')$ для $l = 1, 2$). Выберем в окрестности точки $\tilde{x} \in \Gamma'$ систему координат на M', в которой граница Γ' задается условием $x_n = 0$, и запишем операторы (A, B) и Φ_1 в координатах. Обозначим через $A^0(\tilde{x}, \xi')$, $\Phi_1^{11}(\tilde{x}, \xi')$ обыкновенные дифференциальные операторы, полученные из главных b-однородных частей операторов A, Φ_1^{11} заменой $\partial/\partial x_k \to i\xi_k$, $k = \overline{1, n-1}$, $\partial/\partial t \to i\tau$; $B^0(\tilde{x}, \xi')$ и $C^0(\tilde{x}, \xi')$ определяются главными частями по Дуглису—Ниренбергу относительно мультииндексов s—β_1, s—β_2 из операторов B и Φ_1^{22}. Приведем условие коэрцитивности (согласно [2]).

Определение 4. *Оператор граничной задачи* $(A, B) : \mathcal{E}(E_0') \to \mathcal{E}(E_1') \times \mathcal{E}(G_1')$ *удовлетворяет условию коэрцитивности (на интервале* $[0, T]$) *с мультииндексами* β_1, β_2, *если при всех* $\tilde{x} \in \Gamma_T'$, $\xi' \in p^*\Gamma_T' \setminus 0$ *точен комплекс*

$$0 \to \operatorname{Ker} A^0(\tilde{x}, \xi') \cap \mathfrak{M}_+ \xrightarrow{B^0(\tilde{x}, \xi')} G_1'|_{\tilde{x}} \xrightarrow{C^0(\tilde{x}, \xi')} G_2'|_{\tilde{x}}, \tag{10}$$

где $\mathfrak{M}_+ = \{f(x),\ x \in R_+^1,\ f(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty\}$.

Теорема 1. *Пусть* (A, B) — *b-регулярный оператор граничной задачи; оператор* A *параболический (в случае* $\dim M = 1$ *предполагается выполненным условие, аналогичное правильной эллиптичности* [9]); *пусть оператор* (A, B) *удовлетворяет условию коэрцитивности с мультииндексами* β_1, β_2. *Тогда существует такое число* s_0, *что при* $s \geqslant s_0$ *комплекс* (9) *точен.*

Доказательство. Следующее предложение выводится из работы [2] аналогично предложению 2.

Предложение 6. *В условиях теоремы 1 при всех* $\tilde{x} \in \Gamma'_T$, $\xi' \in p^*\Gamma'_T \setminus 0$ *точен комплекс*

$$0 \to H^s(R^1_+, E'_0|_{\tilde{x}}) \xrightarrow{(A^0(\tilde{x}, \xi'), B^0(\tilde{x}, \xi'))} H^{s-k}(R^1_+, E'_1|_{\tilde{x}}) \times$$

$$\times G'_1|_{\tilde{x}} \xrightarrow{\Phi^0_1(\tilde{x}, \xi')} H^{s-k'}(R^1_+, E'_2|_{\tilde{x}}) \times G'_2|_{\tilde{x}}.$$

В работе [1] построен левый обратный оператор к (A, B). Проведем это построение в терминах операторов, принадлежащих множеству $\mathcal{U}$. Заметим, что в отличие от случая эллиптических операторов нельзя воспользоваться оператором $(\Phi_0^*\Phi_0)^{-1}\Phi_0^*$, так как из включения $\Phi_0 \in \mathcal{U}_T$ не следует $\Phi_0^* \in \mathcal{U}_T$. Построим левые обратные отображения к главным символам оператора (A, B).

Фиксируем $\tilde{x} \in M'_T$. Обозначим $A(\xi) = \sigma_\xi(\tilde{x}, A)$. В работе [1] построена левая обратная к $A(\xi)$ матрица вида $\frac{1}{L(\xi)}\mathcal{L}(\xi)$, где $L(\xi)$ — полином, $\mathcal{L}(\xi)$ — матрица, состоящая из полиномов.

Пусть $\tilde{x} \in \Gamma'_T$. Из предложения 6 следует мономорфность главного граничного символа оператора $\Phi_0 = (A, B)$, отображения $\sigma_{\Gamma'}(A, B)(\tilde{x}, \xi') : H^+ \otimes \otimes E'_0|_{\tilde{x}} \to H^+ \otimes E'_1|_{\tilde{x}}$ вида $u \to (r^+A(\xi)u, r'B(\xi)u)$, где $B(\xi) = \sigma_\xi(x, \tilde{B})$, при всех $\xi' \in p^*\Gamma'_T \setminus 0$ (определение пространств H^+, H^- и операторов r^+, r^-, r' дано в работе [6]). Следовательно, система

$$r^+A(\xi)u = f, \quad r'B(\xi)u = g \tag{11}$$

имеет не более одного решения $u \in H^+ \otimes E'_0|_{\tilde{x}}$ при $f \in H^+ \otimes E'_1|_{\tilde{x}}$, $g \in G'_1|_{\tilde{x}}$. Пусть $(f, g) \in \operatorname{Im}\sigma_{\Gamma'}(A, B)(\tilde{x}, \xi')$. Из равенства

$$r^+A(\xi)u = A(\xi)u - r^-A(\xi)u \tag{12}$$

и первого уравнения системы (11) с учетом того, что матрица $A(\xi)$ состоит из полиномов и $u \in H^+ \otimes E'_l|_{\tilde{x}}$, следует

$$u(\xi_n) = \frac{1}{L(\xi)}\mathcal{L}(\xi)f(\xi_n) - \sum_{k=1}^{N_1}\frac{1}{\mathcal{L}(\xi)}q_k(\xi)\omega_k, \tag{13}$$

где $N_1 = \operatorname{ord} A(\xi)$, $\omega_k = r'\xi_n^{k-1}u(\xi_n)$, $q_k(\xi)$ — матрицы, состоящие из полиномов.

Условие $u \in H^+ \otimes E'_0|_{\tilde{x}}$ эквивалентно уравнению $r^-u = 0$. Подставляя в это уравнение выражение (13) и учитывая, что $\mathcal{L}(\xi)$, $L(\xi)$, $q_k(\xi)$ полиномиальны по ξ, получаем, что уравнение $r^-u = 0$ эквивалентно системе

$$\sum_{k=1}^{N_1} Q^1_{kl}(\xi')\omega_k = \sum_{k=1}^{N_2^-} Q^2_{kl}(\xi')r'\frac{\xi_n^{k-1}}{L(\xi)}f(\xi_n) + \sum_{k=1}^{N_2} Q^3_{kl}(\xi')r'\xi_n^{k-1}f(\xi_n) \tag{14}$$

при $l = 1, \ldots, N$, где $N = \max(N_1, N_2)$, $N_2 = \operatorname{ord} L(\xi)$; N_2^- — количество корней полинома $L(\xi', \xi_n)$ с отрицательной мнимой частью ($L(\xi', \xi_n)$ рассматривается как полином по ξ_n, число N_2^- в условиях теоремы не зависит от $\tilde{x}, \xi'$), $Q^i_{kl}(\xi')$ — матрицы, состоящие из полиномов. Подставим (13) в (11) и к полученной системе уравнений относительно ω_k присоединим уравнения (14). Матрица полученной системы мономорфна (из мономорфности системы (11)) при всех $\xi' \in p^*\Gamma'_T \setminus 0$. Решая систему, подставляем ω_k в (13) и получаем левое обратное к $\sigma_{\Gamma'}(A, B)(\tilde{x}, \xi')$ отображение в виде

$$(f, g) \to u = \frac{1}{L(\xi)} \mathscr{L}(\xi) f + \frac{1}{L(\xi)} \sum_{k=1}^{N_2^-} \tilde{Q}^1_k(\xi)\, r' \frac{\xi_n^{k-1}}{L(\xi)} f +$$

$$+ \frac{1}{L(\xi)} \sum_{k=1}^{N_2} \tilde{Q}^2_k(\xi)\, r' \xi_n^{k-1} f + \frac{1}{L(\xi)} \tilde{Q}^3(\xi)\, g, \tag{15}$$

где $\tilde{Q}^j_k(\xi)$ — матрицы, состоящие из полиномов по ξ_n и голоморфные по τ при $\tau \in C^-$. Так как при $f \in H^+ \otimes E'_1|_{\tilde{x}}$, $g \in G'_1|_{\tilde{x}}$ функция u, задаваемая формулой (15), принадлежит пространству $H^+ \otimes E'_0|_{\tilde{x}}$, то $r^+u = u$, следовательно, левый обратный к $\sigma_{\Gamma'}(A, B)$ оператор задается формулой

$$u = r^+ \frac{1}{L(\xi)} \mathscr{L}(\xi) f + \sum_{k=1}^{N_2^-} r^+ \left(\frac{1}{L(\xi)} \tilde{Q}^1_k(\xi) \right) r' \left(r^- \frac{\xi_n^{k-1}}{L(\xi)} \right) f +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_2} r^+ \left(\frac{1}{L(\xi)} \tilde{Q}^2_k(\xi) \right) r' \xi_n^{k-1} f + r^+ \left(\frac{1}{L(\xi)} \tilde{Q}^3(\xi) \right) g. \tag{16}$$

Пусть $\mathscr{P}' \in \mathcal{U}_T$ — оператор, внутренний символ которого $\frac{1}{L(\xi)} \mathscr{L}(\xi)$ и граничный символ—правая часть (16). Из предложения 5 следует существование оператора $\mathscr{P}_1 = (\mathscr{P}' \circ (A, B))^{-1}$; оператор $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 \mathscr{P}'$ — левый обратный к оператору (A, B) и главные символы операторов $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'$ совпадают.

Рассмотрим оператор $\mathscr{B}: \mathscr{E}(E'_{1T}) \times \mathscr{E}(G'_{1T}) \to \mathscr{E}(E'_{0T}) \oplus \mathscr{E}(E'_{2T}) \times \mathscr{E}(G'_{2T})$ вида $(u, v) \to \mathscr{P}(u, v) \oplus \Phi_1(u, v)$. Мономорфность оператора $\mathscr{B}$ эквивалентна точности комплекса (9) в члене $\overset{+}{H}{}^{s-k,b}(E'_{1j}) \times \overset{+}{H}{}^{s-\beta_1,b}(G'_{1T})$.

Из предложений 2 и 6 следует мономорфность главных символов оператора $\mathscr{B}$. Левое обратное отображение к главному внутреннему символу в точке $\tilde{x} \in M'_T$ можно выбрать в виде $\frac{L(\xi)}{L_1(\xi)} \mathscr{L}_1(\xi)$, где $L_1(\xi)$ — полином, $\mathscr{L}_1(\xi)$ — матрица, состоящая из полиномов. Главный граничный символ оператора $\mathscr{B}$ представляется левой частью системы

$$r^+ \frac{1}{L(\xi)} \mathscr{L}(\xi)\, u + \sum_{k=1}^{N_2^-} r^+ \left(\frac{1}{L(\xi)} \tilde{Q}^1_k(\xi) \right) r' \left(r^- \frac{\xi_n^{k-1}}{L(\xi)} u \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_2} r^+ \left(\frac{1}{L(\xi)} \tilde{Q}^2_k(\xi) \right) r' \xi_n^{k-1} u + r^+ \left(\frac{1}{L(\xi)} \tilde{Q}^2_k(\xi) \right) v = f_1, \quad r^+ \Phi_1^{11}(\xi)\, u = f_2,$$

$$r' \Phi_1^{21}(\xi)\, u + \Phi_1^{22} v = g, \tag{17}$$

где $f_1 \in H^+ \otimes E'_{0T}|_{\tilde{x}}$, $f_2 \in H^+ \otimes E'_{2T}|_{\tilde{x}}$, $g \in G'_{2T}|_{\tilde{x}}$, $u \in H^+ \otimes E'_1|_{\tilde{x}}$, $v \in G'_{1T}|_{\tilde{x}}$, $\tilde{x} \in \Gamma'_T$.

В первом уравнении системы (17) заменим выражение (16) выражением (15). Второе уравнение системы (17) преобразуем к виду $\Phi_1^{11}(\xi)\, u = f_2$ —

$-\sum_{k=1}^{N_3} \hat{q}_k(\xi) r' \xi_n^{k-1} u$, где $N_3 = \operatorname{ord} L_1$. Обозначим $\omega_k^1 = r'\xi_n^{k-1}u$, где $k = 1, \ldots$

$\ldots, \max(N_2, N_3)$, и $\omega_k^2 = r' \dfrac{\xi_n^{k-1}}{L(\xi)} u$, где $k = 1, \ldots, N_2$. Дальнейшее решение системы (17) аналогично решению системы (11) и построение левого обратного оператора к оператору $\mathcal{B}$ аналогично построению оператора $\mathcal{P}$. Теорема доказана.

5. Рассмотрим случай бесконечного интервала по t.

Теорема 2. *Пусть для оператора* $(A, B): \mathcal{E}(E_0') \to \mathcal{E}(E_1') \times \mathcal{E}(G_1')$ *выполняются предположения теоремы* 1 *на интервале* $[0, \infty)$ *по* t *и коэффициенты оператора* (A, B) *не зависят от* t *при* $t \geqslant T$. *Тогда существуют такие числа* s_0 *и* δ_0, *что при* $s \geqslant s_0$, $\delta \geqslant \delta_0$ *комплекс*

$$0 \to \overset{+}{H}{}^{s,b,\delta}(E_0') \xrightarrow{(A,B)} \overset{+}{H}{}^{s-k,b,\delta}(E_1') \times \overset{+}{H}{}^{s-\beta_1,b,\delta}(G_1') \xrightarrow{\Phi_1} \overset{+}{H}{}^{s-k',b,\delta}(E_2') \times \overset{+}{H}{}^{s-\beta_2,b,\delta}(G_2')$$

точен.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

6. Пример. Рассмотрим оператор $A: u \to (\partial u/\partial t - a\Delta u, \operatorname{rot} u)$, где $u: \Omega' \to R^3$ $a: \Omega' \to R^1$, $\Omega' = \Omega \times [0, T]$, Ω — область в R^3, $\bar{\Omega}$ — компактное множество, Γ — граница Ω. Если ранг отображения $F: R^3 \to R^3$ вида $y \to [\operatorname{grad} a \times y]$ не зависит от $(x, t) \in \Omega'$, оператор A 2-регулярен. Можно рассмотреть четыре случая (соответствуют значениям $\operatorname{rang} F$). Приведем наиболее простой случай $\operatorname{rang} F \equiv 0$, т. е. $a = a(t)$. В этом случае оператор PA (где $P: (f, g) \to (f, g, \partial g_k/\partial x_l)$; $k, l = 1, 2, 3$) 2-формально интегрируем. Из теоремы 1 и следствия 1 следует точность комплекса

$$0 \to \overset{+}{H}{}^{s,2}(\Omega', R^3) \xrightarrow{\Phi_0} \mathcal{H}^s \times \overset{+}{H}{}^{s-1/2,2}(\Gamma', R^1) \xrightarrow{\Phi_1} \overset{+}{H}{}^{s-4,2}(\Omega', R^4),$$

где $\Phi_0: u \to (f, g, h) = (\partial u/\partial t - a\Delta u, \operatorname{rot} u, u_n|_{\Gamma'})$, $\Phi_1: (f, g, h) \to (\partial g/\partial t - a\Delta g - \operatorname{rot} f, \operatorname{div} g)$, $\mathcal{H}^s = \{(f, g): f, g, \partial g_k/\partial x_l \in \overset{+}{H}{}^{s-2,2}(\Omega', R^s);\ k, l = 1, 2, 3\}$.

1. *Хачатрян А. Г.* Переопределенные параболические краевые задачи // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та.— 1977.— **69**.— С. 240—272.
2. *Самборский С. Н.* Коэрцитивные граничные задачи для переопределенных систем (параболические задачи) // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 4.— С. 473—479.
3. *Спенсер Д.* Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Математика.— 1970.— **14**, № 2.— С. 66—99.
4. *Самборский С. Н., Фельдман М. А.* Об условии коэрцитивности для переопределенных граничных задач // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 5.— С. 616—622.
5. *Самборский С. Н.* Коэрцитивные граничные задачи для переопределенных систем (эллиптические задачи) // Там же.— 1984.— **36**, № 3.— С. 340—346.
6. *Boutet de Monvel.* Boundary problems for pseudodifferential operators // Acta Math.— 1970.— **126**.— P. 11—51.
7. *Rempel S., Schulze B.-W.* Index theory of elliptic boundary problems.— Berlin : Akad. Verl., 1982.— 393 p.
8. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Задача Коши для плюрипараболических уравнений // Мат. сб.— 1968.— **75**, № 1.— С. 64—105.
9. *Агранович М. А., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук.— 1964.— **19**, вып. 3.— С. 53—161.

НИИАСС Госстроя УССР, Киев

Получено 11.04.85,
после доработки — 24.10.85