УДК 519.4

А. В. Панасюк

Индуцированные представления конечных кольцевых групп

С помощью категории кольцевых групп Г. И. Кац построил законченную теорию двойственности, включающую результаты Л. С. Понтрягина для коммутативных локально компактных групп и Таннаки—Крейна для компактных групп. Г. И. Кац также обобщил ряд понятий и теорем о конечных группах на конечные кольцевые группы, в частности, было начато построение теории представлений конечных кольцевых групп [1].

В данной работе дается определение индуцированного представления конечной кольцевой группы и доказываются две теоремы, являющиеся обобщением на кольцевые группы теорем о двойственности Фробениуса и Артина из теории индуцированных представлений конечных групп.

Все необходимые сведения о конечных кольцевых группах, их подгруппах и представлениях содержатся в [1, 2]. Встречающиеся далее векторные пространства и алгебры конечномерны и рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пусть G — кольцевая группа, H — ее подгруппа. Обозначим пространство кольцевой группы G через M, ее групповую алгебру через CG, пространство кольцевой группы H через M_{H}, ее групповую алгебру через CH (CG и CH как векторные пространства совпадают с векторными пространствами M и M_{H} соответственно). Заметим, что CH является подалгеброй в CG.

Представлением кольцевой группы H в векторном пространстве $\hat{E}$ будем называть представление $D : CH \otimes E \to E$ групповой алгебры CH в пространстве E (здесь $\hat{E}$ — пространство, двойственное E, см. [1, с. 226]). Это определение эквивалентно определению, данному в [1, с. 246]. Поскольку задание представления D равносильно заданию на E структуры CH-модуля, дальнейшее изложение теории представлений кольцевых групп будем проводить в терминах теории модулей.

Определение. *Пусть E — некоторый CH-модуль. Индуцированным модулем E^G будем называть CG-модуль $CG \otimes_{\text{CH}} E$.*

Для доказательства аналога двойственности Фробениуса нам понадобятся два предварительных результата.

Предложение 1. *Пусть G — кольцевая группа. Обозначим через $(,)_G$ скалярное произведение в M (см. [1, с. 236]), $\| \ \|_G$ — норма, определенная этим скалярным произведением, 1_G — единица алгебры пространства M. Пусть E_1, E_2 — некоторые CG-модули и χ_1, χ_2 — их характеры соответственно (см. [1, с. 250]). Тогда*

$$(\chi_1, \chi_2)_G = \| 1_G \|_G^2 \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{CG}(E_1, E_2).$$

Предложение 2. *Пусть H — подгруппа кольцевой группы G, E — некоторый CH-модуль, V — некоторый CG-модуль. Тогда*

$$\operatorname{Hom}_{CH}(E, V) \cong \operatorname{Hom}_{CG}(E^G, V)$$

(*$\cong$ обозначает изоморфизм векторных пространств*).

Предложение 1 доказывается аналогично соответствующему «групповому» утверждению, а предложение 2 содержится в [3, с. 47].

Введем некоторые обозначения. Пусть G — кольцевая группа, H — ее подгруппа, V — некоторый CG-модуль. Символом V_{H} обозначается CH-модуль, полученный из V сужением области операторов (редуцированный модуль). Обозначим через $R^+(G)$ множество всех характеров кольцевой группы G, через $R(G)$ — аддитивную группу, порожденную $R^+(G)$, через $T(G)$ — $\mathbb{C}$-линейную оболочку множества $R(G)$. Отметим, что $T(G) = \mathbb{C} \otimes R(G)$, множество всех характеров неприводимых представлений образует $\mathbb{C}$-базис в $T(G)$ и $T(G)$ как подпространство совпадает с центром групповой алгебры CG.

В дальнейшем будем предполагать, что инвариантные средние (см. [1, с. 235]) на кольцевой группе G и на ее подгруппах H нормированы так, что $\| 1_G \|_G = \| 1_H \|_H$.

Пусть E — CH-модуль, V — CG-модуль, φ и ψ — их характеры соответственно. Обозначим через $\mathrm{Ind}\,\varphi$ характер E^G, через $\mathrm{Res}_H\,\psi$ характер V_H. Тем самым заданы отображения множеств $\mathrm{Ind}: R^+(H) \to R^+(G)$ и $\mathrm{Res}_H: R^+(G) \to R^+(H)$. Продолжим их по линейности на T. Из предложений 1 и 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 1 (двойственность Фробениуса). *Пусть* $\varphi \in T(H)$, $\psi \in T(G)$, *тогда* $(\varphi, \mathrm{Res}_H\psi)_H = (\mathrm{Ind}\,\varphi, \psi)_G$.

Другими словами отображения $\mathrm{Ind}: T(H) \to T(G)$ и $\mathrm{Res}_H: T(G) \to T(H)$ являются сопряженными отображениями гильбертовых пространств.

Воспользуемся теоремой 1 для доказательства аналога теоремы Артина, но прежде сформулируем следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть G — кольцевая группа, H — ее подгруппа с главным проектором* p_H (*см.* [2, *с.* 474]) *и* $\chi \in T(G)$. *Тогда*

$$\mathrm{Res}_H\chi = p_H\chi.$$

Доказательство. Предложение достаточно доказать для $\chi \in R^+(G)$. Пусть χ — характер некоторого CG-модуля E, $D: CG \otimes E \to E$ — соответствующее представление групповой алгебры. Не ограничивая общности, можно считать, что E — гильбертово пространство, D — $*$-представление, поскольку каждое представление C^*-алгебры CG эквивалентно некоторому $*$-представлению в гильбертовом пространстве. Итак $E = \hat{E}$.

Рассмотрим двойственное D копредставление коалгебры пространства M $\hat{D}: E \to M \otimes E$. Очевидно, что редуцированное представление подгруппы H задается сквозным отображением $\hat{D}_H: E \xrightarrow{\hat{D}} M \otimes E \xrightarrow{p_H \otimes \mathrm{id}} M_H \otimes E$, где M_H — коалгебра пространства подгруппы.

Пусть $\{\xi_k\}$ — ортонормированный базис в E, $\{z_{ij}\}$ и $\{z_{ij}^H\}$ — коэффициенты представлений $\hat{D}$ и $\hat{D}_H$ соответственно, в базисе $\{\xi_k\}$ (см. [1, с. 246]). Непосредственные вычисления показывают, что $z_{ij}^H = p_H z_{ij}$, откуда $\mathrm{Res}_H\chi = \Sigma_k z_{kk}^H = p_H \Sigma_k z_{kk} = p_H\chi$.

Теорема 2. *Пусть X — семейство подгрупп кольцевой группы G, p_H — главный проектор подгруппы $H \in X$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $(\bigcap_{H \in X} \mathrm{Ker}\, p_H) \cap T(G) = \{0\}$;

2) *образ отображения* $\mathrm{Ind}: \bigoplus_{H \in X} R(H) \to R(G)$ *имеет конечный индекс*;

3) $\forall \chi \in R(G)$ *существуют такие элементы* $\{\varphi_H\}_{H \in X}$, $\varphi_H \in R(H)$ *и такое* $d \in \mathbf{N}$, *что* $d\chi = \sum_{H \in X} \mathrm{Ind}\,\varphi_H$.

Доказательство. Очевидно, что условия 2) и 3) эквивалентны.

Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 3). Из условия 1) и предложения 3 следует, что отображение Res, действующее из $T(G)$ в гильбертову прямую сумму $\bigoplus_{H \in X} T(H)$ инъективно. По теореме 1 отображение $\mathrm{Ind}: \bigoplus_{H \in X} T(H) \to T(G)$ сопряжено с Res и, значит, сюръективно. Следовательно, сюръективно и отображение $\mathrm{Ind}: \bigoplus_{H \in X} (\mathbf{Q} \otimes R(H)) \to \mathbf{Q} \otimes R(G)$. Отсюда вытекает справедливость условия 3).

Покажем, что 3) $\Rightarrow$ 1). Из условия 3) следует, что отображение $\mathrm{Ind}: \bigoplus_{H \in X} T(H) \to T(G)$ сюръективно. По теореме 1 отображение $\mathrm{Res}: T(G) \to$

$\to \bigoplus_{H\in X} T(H)$ инъективно, откуда $\bigcap_{H\in X} \operatorname{Ker}\operatorname{Res}_H = \{0\}$. Остается воспользоваться предложением 3.

Замечание 1. В случае, когда G — обычная группа, H — ее подгруппа, условия на нормировку инвариантных средних выполнены тривиально: $\| 1_H \|_H^2 = \frac{1}{|H|} \sum_{g\in H} 1 = \| 1_G \|_G^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} 1 = 1$ (здесь $|\ |$ — порядок группы).

Замечание 2. В случае, когда G — обычная группа, услови- 1) теоремы 2 эквивалентно следующему: объединение подгрупп, сопряженных подгруппам семейства X, совпадает со всей группой G. Докажем эту эквивалентность.

Пусть G — группа, H — ее подгруппа. Тогда $T(G)$ — это пространство функций на G, постоянных на классах сопряженных элементов в G, $T(H)$ — пространство функций на H, постоянных на классах сопряженных элементов в H. Отображение $p_{\mathrm{H}} : T(G) \to T(H)$ продолжает функцию нулем вне H.

Если X — такое семейство подгрупп в G, что объединение подгрупп, сопряженных подгруппам семейства X, совпадает со всей группой G, то, легко видеть, $\bigcap_{H\in X} \operatorname{Ker} p_{\mathrm{H}} = \{0\}$.

Обратно, пусть $\bigcap_{H\in X} \operatorname{Ker} p_H = \{0\}$. Допустим, что объединение подгрупп, сопряженных подгруппам семейства X, не совпадает с G, т. е. существует класс сопряженных элементов в G, который не пересекается с $\bigcup_{H\in X} \{H\}$. Тогда функция, равная нулю вне этого класса, лежит в $\bigcap_{H\in X} \operatorname{Ker} p_H$.

Пример. Покажем, как использовать теорему 1 для вычисления характеров индуцированных представлений.

Пусть G — кольцевая группа восьмого порядка, построенная в [1, с. 258]. Она имеет подгруппу H четвертого порядка, являющуюся обычной коммутативной группой. Группа H обладает четырьмя одномерными представлениями с характерами: $\chi_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\chi_2 = (1, -1, -1, 1)$, $\chi_3 = (1, -1, 1, -1)$, $\chi_4 = (1, 1, -1, -1)$.

Нормируем инвариантные средние на G и H так, чтобы $\| 1_G \|_G^2 = \| 1_H \|_H^2 = 1$, т. е. положим нормировочные множители на G и H равными 1/8 и 1/4 соответственно. Тогда для $\alpha \in T(H)$ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\mu_H(\alpha) = 1/4(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$, где μ_H — инвариантное среднее на H. Пусть $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \ldots, \chi^{(5)}$ — характеры неприводимых представлений кольцевой группы G. Они образуют базис в $T(G)$. По теореме 1 $(\operatorname{Ind}\chi_1, \chi^{(1)})_G = (\chi_1, \operatorname{Res}_H \chi^{(1)})_H = 1$, $(\operatorname{Ind}\chi_1, \chi^{(2)})_G = 1$, $(\operatorname{Ind}\chi_1, \chi^{(3)})_G = 0$, $(\operatorname{Ind}\chi_1, \chi^{(4)})_G = 0$, $(\operatorname{Ind}\chi_1, \chi^{(5)})_G = 0$. Отсюда $\operatorname{Ind}\chi_1 = \chi^{(1)} + \chi^{(2)}$. Аналогичными вычислениями получаем $\operatorname{Ind}\chi_2 = \chi^{(3)} + \chi^{(4)}$, $\operatorname{Ind}\chi_3 = \chi^{(5)}$, $\operatorname{Ind}\chi_4 = \chi^{(5)}$.

1. *Кац Г. И., Палюткин В. Г.* Конечные кольцевые группы // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1966.— **15**.— С. 224—261.
2. *Кац Г. И.* Расширения групп, являющиеся кольцевыми группами // Мат. сб.— 1968.— **76**, № 3.— С. 473—496.
3. *Картан А., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 510 с.
4. *Серр Ж.-П.* Линейные представления конечных групп.— М. : Мир, 1970.— 132 с.
5. *Кац Г. И.* Некоторые арифметические свойства кольцевых групп // Функцион. анализ и его прил.— 1972.— **6**, вып. 2.— С. 88—90.

Львов. ун-т

Получено 17.05.85,
после доработки — 22.04.86