УДК 517.95:531.36

**К. С. Матвийчук** (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

# ОБ УСЛОВИЯХ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПРОЦЕССЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Sufficient conditions of the technical stability are obtained for solutions of a nonlinear boundary-value problem which describes distributed parametric processes in the Hilbert space.

Отримано достатні умови технічної стійкості розв'язків нелінійної крайової задачі, що описує розподілені параметричні процеси в гільбертовому просторі.

Настоящая работа посвящена исследованию технической устойчивости [1 – 10] параметрически возбуждаемых [11, 12] нелинейных распределенных процессов на конечном и бесконечном промежутках времени, асимптотической технической устойчивости. Дифференциальные уравнения в частных производных, с помощью которых они описываются, содержат коэффициенты, зависящие от времени [13 – 15]. Для решения данной задачи применяется метод сравнения [8 – 10, 16], метод собственных значений в сочетании со вторым методом Ляпунова [10 – 12, 17]. Соответствующие дифференциальные неравенства сравнения построены с использованием экстремальных свойств отношений Рэлея для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве [16, 18, 19]. Этот подход связан с решением задачи о собственных значениях, порожденной линейной задачей, соответствующей исходной. При этом время рассматривается лишь как параметр, входящий в приведенные соотношения и оценки [11, 12].

**1. Основные предположения и постановка задачи.** Рассмотрим класс динамических процессов в области $D \subset R^{\nu}$ с границей $C$, где $R^{\nu}$ — $\nu$-мерное евклидово пространство с вектором координат $x = (x_1, \ldots, x_{\nu})$, описываемых на заданном конечном интервале времени $T_1 \subset T \equiv [t_0, +\infty)$, $t_0 \geq 0$, нелинейными уравнениями в частных производных вида

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathcal{L}(t,\mu)\, u(t,x); \qquad \mathcal{L}(t,\mu)\, u(t,x) \equiv$$

$$\equiv L(t)\, u(t,x) + \mu F\left(t, x, u(t,x), \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \ldots, \mu\right), \qquad t \in T_1, \quad x \in D. \tag{1}$$

Здесь $u(t,x)$ — $2N$-мерный вектор состояния, удовлетворяющий заданным граничным условиям

$$Gu(t,x) = 0, \qquad x \in C, \tag{2}$$

и начальному условию

$$u(t_0, x) = u_0(x). \tag{3}$$

При этом функция $u_0(x)$ имеет частные производные всех необходимых порядков в области $D \subset R^{\nu}$; оператор $L(t)$ обозначает $(2N \times 2N)$-мерную матрицу линейных дифференциальных операторов в частных производных по пространственным переменным с зависящими от времени непрерывными коэффициентами; $\mu$ — малый положительный параметр: $0 < \mu < 1$; $F$ — нелинейная вектор-функция, непрерывная в заданной ограниченной области изменения всех своих аргументов и при $u(t, x) = 0$ не обязательно равная нулю. Здесь обозначено

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_{2N})^*, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_{2N}}{\partial x_\nu}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u_{2N}}{\partial x_\nu^2}\right), \ \ldots \ ;$$

$$F = (F_1, F_2, \ldots, F_{2N})^*.$$

Введем в рассмотрение действительное функциональное пространство $H$ $2N$-мерных векторов непрерывных функций, определенных в $T_1 \times D$. Для каждой пары векторов $v_1, v_2 \in H$ определим скалярное произведение

$$(v_1, v_2) = \int_D v_1^*(t, x)\, v_2(t, x)\, dx, \tag{4}$$

где $*$ обозначает транспонирование. Пусть пространство $H$ расширено таким образом, что $H$ оказывается гильбертовым пространством. Норму в пространстве $H$, индуцированную скалярным произведением (4), обозначаем $\|\cdot\|$. Полагаем, что вектор $F$, являющийся непрерывной вектор-функцией по всем своим аргументам, по $x$ удовлетворяет свойству $F \in H$ вдоль решения исходной задачи (1) – (3) при всех $t \in T_1$, $\mu \in (0, 1)$.

Полагаем, что $G$ — линейный, не зависящий от времени оператор в $H$, действующий в заданной области $Q_G \subset H$, а его замыкание $\overline{G}$ имеет компактную область определения $\overline{Q}_G$.

Пусть задача (1) – (3) [13, 14] имеет однозначное непрерывное решение $u(t, x, \mu)$, имеющее в областях $T_1 \times D$, $T_1 \times C$ необходимые производные, входящие соответственно в (1) и краевые условия (2), (3), и принадлежащее вместе со всеми необходимыми производными пространству $H$.

Пусть множество $W$ состояний рассматриваемого процесса представляет собой подмножество пространства $H$ такое, у которого элементы удовлетворяют граничному условию (2) и другим необходимым условиям гладкости, обеспечивающим свойство непрерывности функции $L(t)u$ в $T_1 \times D$ для действующего в области $W$ линейного оператора $L(t)$, рассматриваемого в исходной задаче (1) – (3) [11 – 14, 18, 19].

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = L(t)\, u(t, x), \qquad t \in T_1 \subset T, \quad x \in D, \tag{5}$$

с граничными (2) и начальными (3) условиями. Пусть существует решение $\tilde{u}(t, x)$ линейной задачи (5), (2), (3), удовлетворяющее тем же свойствам регулярности, что и решение $u(t, x, \mu)$ [13, 14]. Тогда решению $\tilde{u}(t, x)$ для каждого момента времени $t$ можно сопоставить элемент множества $W$, само решение $\tilde{u}(t, x)$ образует некоторую траекторию в $W$, а $L(t)$ — оператор в $H$, действующий в области $W \subset H$, что записываем так: $L(t)\colon W \to H$; $\mathscr{L}(t, \mu)$ — оператор, также действующий из множества $W$ в пространство $H$ при каждом $\mu \in (0, 1)$: $\mathscr{L}(t, \mu)\colon W \to H$ [18, 19]. Решение $u(t, x, \mu)$ задачи (1) – (3) представляет некоторую траекторию в $W$, отличающуюся в общем от траектории, соответствующей уравнению (5). Предполагаем, что существует сопряженный оператор $L^*(t)$ к оператору $L(t)$.

Для каждой пары векторов $u, v \in W$ определим меру $\rho(u, v)$ как квадратный корень суммы скалярных произведений

$$\rho(u, v) = \left[(A_0 z, A_0 z) + \sum_{i=1}^{n} (A_i z, A_i z)\right]^{1/2},$$

где $z = u - v$, $A_0$ — оператор тождественного преобразования, а $A_1, \ldots, A_n$ — линейные дифференциальные операторы в $H$, действующие в области $W$ [11, 18]. Для меры $\rho(u, 0)$ имеем

$$\rho(u, 0) = \left[(A_0 u, A_0 u) + \sum_{i=1}^{n} (A_i u, A_i u)\right]^{1/2} = (u, Mu)^{1/2}, \tag{6}$$

где использовано интегрирование по частям в предположении, что возникающие граничные значения в силу условий (2) равны нулю. Оператор

$$M = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i^* A_i,$$

где $A_i^*$ — сопряженный оператор по отношению к оператору $A_i$.

Начальную задачу (1)–(3) рассматриваем в заданной области:

$$\Omega = \{t, x, u, \mu: t \in T_1 \subset T; \quad x \in D \subset R^{\nu};$$
$$\| u \| \leq a = \text{const} > 0 \quad \forall u \in W(T_1 \times D) \subset H,$$
$$\mathcal{L}(t, \mu): W \to H; \quad 0 < \mu < \mu_0 \leq 1\}.$$

**2. Функционал Ляпунова и связанные с ним соотношения.** Введем в рассмотрение функционал

$$V[u, t] = (u, B(t) u), \qquad u \in W, \tag{7}$$

где оператор $B(t): H \to H$ представляет самосопряженный оператор в следующем смысле [12, 18, 19]:

$$(v, B(t) w) = (w, B(t) v), \qquad v, w \in W, \tag{8}$$

может содержать необходимые дифференциальные элементы по пространственным переменным и, как матрица, имеет ту же размерность, что и $L(t)$.

Таким образом, функционал $V$ явно зависит от времени через посредство оператора $B(t): H \to H$. Кроме того, оператор $B(t)$ определим таким же образом, чтобы функционал $V$ был положительно определенным относительно меры $\rho(u, 0)$, что означает

$$V[u, t] \geq \alpha \rho^2(u, 0) \qquad \forall t \in T_1 \tag{9}$$

при некотором $\alpha = \text{const} > 0$. В силу (6) условие (9) принимает вид

$$(u, [B(t) - \alpha M] u) \geq 0, \qquad \alpha = \text{const} > 0. \tag{10}$$

Полагаем, что $B(t)$ содержит такие коэффициенты, при которых он удовлетворяет необходимому свойству дифференцируемости по $t$.

**Определение 1.** *Динамические процессы, описываемые краевой задачей* (1)–(3), *называются технически устойчивыми на заданном конечном промежутке времени* $T_1 \subset T$ *по заданной мере* $\rho(u, 0)$, *если вдоль возмущенного решения* $u(t, x, \mu)$ *задачи* (1)–(3) *для положительно определенного функционала* $V[u, t]$ *относительно меры* $\rho(u, 0)$ *при заранее заданном операторе* $B(t)\colon H \to H$ *выполняется условие*

$$V[u(t, x, \mu), t] \leq P(t, \mu), \quad t \in T_1, \quad \mu \in (0, 1),$$

*лишь только в начальный момент времени*

$$V[u_0(x), t_0] \leq \overline{a}, \quad t_0 \in T_1, \tag{11}$$

*где значение* $V[u_0(x), t_0]$ *определено на начальных данных* (3) *и наперед заданные функция* $P(t, \mu)$, *постоянная* $\overline{a}$ *на заранее заданном интервале времени* $T_1 \subset T$ *удовлетворяют условиям*

$$P(t_0, \mu) \geq \overline{a}, \quad 0 < P(t, \mu) \leq \overline{C}, \quad \overline{C} = \text{const} > 0;$$

*при этом функция* $P(t, \mu)$ *зависит от* $\mu$ *параметрически.*

**Определение 2.** *Если условия определения* 1 *выполняются на любом интервале времени* $T_1 \subset T$, *то динамические процессы* (1)–(3) *называются технически устойчивыми по заданной мере* $\rho(u, 0)$ *на бесконечном интервале времени* $T$.

**Определение 3.** *Если при выполнении условий определения* 2 *вдоль решения краевой задачи* (1)–(3) *справедливо условие*

$$\lim_{t \to +\infty} V[u(t, x, \mu), t] = 0,$$

*то исходные процессы* (1)–(3) *называются асимптотически технически устойчивыми по мере* $\rho(u, 0)$.

**Определение 4.** *Динамические процессы, описываемые краевой задачей* (1)–(3), *называются технически неустойчивыми в области* $T_1$ *или* $T$ *при заданных постоянной* $\overline{a} > 0$ *и функции* $P(t, \mu)$, *если при выполнении на значениях* (3) *условия* (11) *для решений* $u(t, x, \mu)$ *краевой задачи* (1)–(3) *найдется значение* $t_1 \in T_1$ *или* $t_1 \in T$, $t_1 > t_0$, *такое, для которого выполняется неравенство*

$$V[u(t_1, x, \mu), t_1] > \overline{C}.$$

Пусть ограниченный оператор $N(t)\colon W \to H$ равен $N(t) = L^*(t)B(t) + B(t)L(t) + \dot{B}(t)$, где $\dot{B}(t) = \dfrac{d}{dt}[B(t)]$ означает непрерывное дифференцирование коэффициентов операторов $B(t)$ в предположении, что они имеют это свойство. Полагаем, что имеет место задача о собственных значениях [11–14]

$$N(t)u = \lambda B(t)u, \quad u \in W, \quad t \in T_1, \tag{12}$$

собственные значения которой являются вещественными ограниченными величинами $\{\lambda_n(t)\}$ для всех $t \in T_1 \subset T$; при этом время $t$ рассматривается лишь как параметр. Обозначим через $\lambda_{\max}(t)$ наибольшее собственное значение задачи (12).

Введем в рассмотрение область

$$\Lambda = \{t,\ z,\ \lambda_{\max}(t),\ \tilde{\mu} : t \in T_1 \subset T, \quad -\infty < z < +\infty,$$
$$|\lambda_{\max}(t)| \le b, \quad b = \text{const} > 0, \quad 0 < \tilde{\mu} < \mu_0 \le 1\},$$

в которой ниже будем рассматривать соответствующую исходной краевой задаче (1) – (3) скалярную задачу Коши сравнения [8–10, 16].

Обозначим следующие выражения:

$$F(t, \mu) = F\left(t, u(t, x, \mu), \frac{\partial u(t, x, \mu)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(t, x, \mu)}{\partial x^2}, \ldots, \mu\right)$$

— вдоль решений задачи (1) – (3);

$$\overline{F}(t, \tilde{\mu}) = F\left(t, \tilde{u}(t, x), \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 \tilde{u}(t, x)}{\partial x^2}, \ldots, \tilde{\mu}\right)$$

— вдоль решений линейной задачи (5), (2), (3).

**3. Условия технической устойчивости исходных процессов.** Достаточные условия технической устойчивости динамических процессов, характеризующихся краевой задачей (1) – (3), содержатся в следующей теореме.

**Теорема.** *Пусть справедливы следующие условия:*

1. *Для краевых задач* (1) – (3) *и* (5), (2), (10), *где при указанных выше свойствах регулярности коэффициентов и вектор-функции* $F$ *дифференциальные операторы* $\mathcal{L}(t, \mu)$, $L(t)$ *есть операторы в* $H$, *действующие в области* $W \subset \subset H$, *существуют решения с указанными выше свойствами.*

2. *Существует положительно определенный относительно меры* $\rho(u, 0)$ *функционал* $V[u, t] = (u, B(t)u)$, *порожденный с указанными выше свойствами наперед заданным оператором* $B(t)\colon H \to H$.

3. *Для линейного оператора* $L(t)$ *задачи* (5), (2), (3) *существует сопряженный оператор* $L^*(t)$, *удовлетворяющий при всех* $v, w \in W$ *условию*

$$(L(t)v, B(t)w) = (v, L^*(t)B(t)w).$$

4. *В задаче о собственных значениях* (12), *порожденной операторами* $L(t)$, $B(t)$, *оператор* $B^{-1}(t)N(t)$ *является компактным при* $t \in T_1 \subset T$.

5. *Существуют постоянные* $C_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, *и значение* $\mu_1 > 0$, *удовлетворяющее условию* $|\mu - \tilde{\mu}| < \mu_1$, *неотрицательные, непрерывные на* $T_1 \subset \subset T$ *функции* $f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, $\gamma(t)$, *для которых справедливы соответственно неравенства*

а) $\|u(t, x, \mu) - \tilde{u}(t, x)\| \, \|N(t)[u(t, x, \mu) - \tilde{u}(t, x)]\| \le C_1 f_1(t)$;

б) $2\,\|\mu F(t, \mu) - \tilde{\mu}\overline{F}(t, \tilde{\mu})\| \, \|B(t)\, u(t, x, \mu)\| \le C_2 f_2(t)$;

в) $\|\overline{F}(t, \tilde{\mu})\| \, \|B(t)\, u(t, x, \mu)\| \le C_3 f_3(t)$;

г) $|V[\tilde{u}(t, x), t] - V[u(t, x, \mu), t]| \le C_4 \gamma(t)$.

6. *В области* $\Lambda$ *существует скалярная задача Коши сравнения*

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_{\max}(t)[y + \sigma(t, \tilde{\mu})], \qquad t \in T_1, \tag{13}$$

$$y(t_0) = y_0 \geq V[u_0(x), t_0], \qquad t_0 \in T_1, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \sigma(t, \tilde{\mu}) = \int_{t_0}^{t} [C_4 b \tilde{\gamma}(\tau) + f_3(\tau, \tilde{\mu})] d\tau, \\ f_3(t, \tilde{\mu}) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + 2\tilde{\mu} C_3 f_3(t), \end{gathered} \tag{15}$$

*соответствующая задача о собственных значениях* (12), *решение которой* $\overline{y}(t) = y(t, t_0, y_0)$ *определено при* $t \in T_1$ *и удовлетворяет неравенствам*

$$\overline{y}(t) + \sigma(t, \tilde{\mu}) \leq P(t, \mu), \qquad t \in T_1, \quad y_0 \leq \overline{a}, \tag{16}$$

*при наперед заданных ограниченной функции* $P(t, \mu)$ *и постоянных* $\overline{a}$, $T_1$.

*Тогда динамические процессы, описываемые нелинейными уравнениями* (1) *с краевыми условиями* (2), (3) *в гильбертовом пространстве* $H$, *технически устойчивы по мере* $\rho(u, 0)$ *в области* $\Omega$ *на конечном промежутке времени* $T_1 \subset T$.

*Если условия теоремы справедливы на каждом промежутке* $T_1 \subseteq T$, *то исходные процессы* (1)–(3) *технически устойчивы в области* $\Omega$ *на бесконечном промежутке времени* $T$.

*Более того, если функции* $\overline{y}(t)$, $\sigma(t, \tilde{\mu})$ *таковы, что справедливо условие*

$$\overline{y}(t) + \sigma(t, \tilde{\mu}) \to 0, \qquad t \to +\infty, \qquad \tilde{\mu} \in (0, \mu_0),$$

*то исходные процессы* (1)–(3) *асимптотически технически устойчивы в области* $\Omega$.

***Доказательство.*** Учитывая условия 1–3 теоремы, вдоль решения $u(t, x, \mu) \in W \subset H$ задачи (1)–(3) вычислим производную по времени от функционала (7), полагая $V(t) = V[u(t, x, \mu), t]$:

$$\frac{dV(t)}{dt} = (\mathscr{L}(t, \mu) u, B(t) u) + (u, B(t) \mathscr{L}(t, \mu) u) + (u, \dot{B}(t) u), \tag{17}$$

или

$$\frac{dV(t)}{dt} = (u, N(t) u) + 2\mu(F(t, \mu), B(t) u),$$

где

$$N(t) = L^*(t) B(t) + B(t) L(t) + \dot{B}(t).$$

Задача о собственных значениях (12) связана с линейной краевой задачей (5), (2), (3). Поэтому, используя величины

$$(\tilde{u}(t, x), N(t) \tilde{u}(t, x)), \qquad \tilde{\mu}(\overline{F}(t, \tilde{\mu}), B(t) \tilde{u}(t, x)),$$

для производной (17) получаем неравенство

$$\begin{gathered} \frac{dV(t)}{dt} \leq (\tilde{u}(t, x), N(t) \tilde{u}(t, x)) + \\ + \|u(t, x, \mu) - \tilde{u}(t, x)\| \, \|N(t)[u(t, x, \mu) - \tilde{u}(t, x)]\| + \end{gathered}$$

$$+ 2\,\|\mu F(t,\mu) - \tilde{\mu}\overline{F}(t,\tilde{\mu})\|\,\|B(t)\,u(t,x,\mu)\| + 2\tilde{\mu}\,\|\overline{F}(t,\tilde{\mu})\|\,\|B(t)\,u(t,x,\mu)\|.$$

Следовательно, с учетом условий теоремы при $t \in T_1$ вдоль решения задачи (1) – (3) справедлива оценка

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq (\tilde{u}(t,x), N(t)\,\tilde{u}(t,x)) + f_3(t,\tilde{\mu}). \tag{18}$$

Вычислим вдоль траекторий $v(t,x)$, $w(t,x) \in W$ производную по времени от обеих частей равенства (8), после чего убедимся, что оператор $N(t)$ является самосопряженным в смысле определения (8). Следовательно, задача о собственных значениях (12) имеет вещественные собственные значения. Далее, согласно условию 4 теоремы задача (12) при всех $t \in T_1 \subset T$ имеет ограниченные собственные значения, т. е. максимальное собственное значение $\lambda_{\max}(t)$ является ограниченной действительной величиной [11 – 14, 19]. Заметим, что так как операторы $B(t)$, $N(t)$ являются самосопряженными в смысле (8) и в силу условий теоремы собственное значение $\lambda$ в (12) не может быть равным нулю, то собственные векторы задачи (12) образуют полную систему в $W$. Согласно теореме об экстремальных свойствах [11, 12, 19] отношения $(u(t,x), N(t)\,u(t,x))\,/\,(u(t,x), B(t)\,u(t,x))$ находим верхнюю оценку

$$\frac{(u, N(t)\,u)}{(u, B(t)\,u)} \leq \lambda_{\max}(t), \qquad t \in T_1 \subset T; \quad u \in W \subset H,$$

где $|\lambda_{\max}(t)| \leq b$.

Отсюда вместо (18) получаем оценку

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq \lambda_{\max}(t)\,V(t) + C_4\,b\,\tilde{\gamma}(t) + f_3(t,\tilde{\mu}). \tag{19}$$

Оценка (19) позволяет [11 – 13, 19] рассмотреть скалярную задачу Коши сравнения типа (13), (14) при (15), порожденную операторами $\mathcal{L}(t,\mu)$, $L(t)$, $B(t)$ при указанных выше условиях, полагая при этом $k(t,\tilde{\mu}) = V(t) - \sigma(t,\tilde{\mu})$. Используя при $t \in T_1$ $y$ — верхнее решение (13), (14), определяемое в данном случае выражением

$$\overline{y}(t) = \exp\left[\int\limits_{t_0}^{\tau} \lambda_{\max}(\tau)\,d\tau\right]\left\{y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{f}(\tau,\tilde{\mu}) \exp\left[-\int\limits_{t_0}^{\tau} \lambda_{\max}(s)\,ds\right]\right\} - \sigma(t,\tilde{\mu}),$$

где $\tilde{f}(\tau,\tilde{\mu}) = C_4\,b\,\tilde{\gamma}(\tau) + f_3(\tau,\tilde{\mu})$, согласно теореме о дифференциальных неравенствах (теорема 9.5 в [16]), вдоль решения $u(t,x,\mu)$ краевой задачи (1) – (3) для положительно определенного относительно меры $\rho(u,0)$ функционала $V[u,t]$ (7) имеем оценку

$$V[u(t,x,\mu),t] \leq \overline{y}(t) + \sigma(t,\tilde{\mu}), \qquad t \in T_1.$$

Используя условия (16) теоремы, получаем неравенства

$$\begin{gathered} V[u(t,x,\mu),t] \leq P(t,\mu), \\ V[u_0(x),t_0] \leq \overline{a}, \qquad t, t_0 \in T_1, \end{gathered} \tag{20}$$

откуда следует, что при условиях теоремы возмущенная траектория из области $\Omega$ нелинейных процессов (1) – (3) будет находиться от невозмущенной $u(t,x,$

$\mu) = 0$ в каждый момент времени $t \in T_1$ на „расстоянии", не превышающем по величине пределов, характеризующихся наперед заданными функцией $P(t, \mu)$ и постоянной $\bar{a}$. Неравенство (20) характеризует заданную мерой $\rho(u, 0)$ окрестность $\rho(u, 0) \leq \overline{C}$ ($\overline{C} = \text{const} > 0$) невозмущенного процесса, где постоянная $\overline{C}$ определяется первым неравенством из (20). Два последних утверждения теоремы доказываются очевидным образом с незначительными изменениями. Теорема доказана.

Полученные здесь результаты применены для решения нелинейной задачи о технической устойчивости колебаний стержневой системы типа стойки, находящейся под действием переменной во времени продольной динамической силы. Такого типа системы представляют математическую модель широко распространенных реальных систем на практике.

**4. Техническая устойчивость нелинейных состояний вертикальной стержневой системы при параметрическом возбуждении.** Рассмотрим в гильбертовом пространстве следующую нелинейную краевую задачу о поперечных колебаниях вертикально расположенного стержня, шарнирно закрепленного в основаниях и нагруженного переменной во времени продольной возбуждающей силой, а именно:

$$\frac{\partial^4 w(t, x)}{\partial x^4} + f(t)\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} =$$

$$= \mu(1 - w^2(t, x))\left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial t}\right)^3, \quad t \in T, \tag{21}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$w(t, x)\big|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial w(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0(x), \tag{22}$$

$$w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(t, 1)}{\partial x^2} = 0, \tag{23}$$

где $w_0(x)$, $v_0(x)$ — четырежды непрерывно дифференцируемые функции по $x \in D \equiv [0, 1]$; $T$ — заданный промежуток времени, $T \subset I = [t_0, +\infty)$.

В частности, для силы $f(t)$ может быть гармонический закон изменения

$$f(t) = 4\pi^2(R_0 + R_t\cos\omega t),$$
$$R_0 = \frac{P_0 l^2}{4\pi^2 E I_1}, \quad R_t = \frac{P_t l^2}{4\pi^2 E I_1}, \tag{24}$$

где $P_0$ — постоянная составляющая сжимающей силы; $P_t$ — постоянная амплитуды пульсирующей составляющей продольной силы; $l$ — длина стойки, $E$ — модуль Юнга, $I_1$ — момент инерции поперечного сечения стойки относительно ее оси, проходящей через ее центр масс; $\beta$ — коэффициент демпфирования. Вместе с тем для силы $f(t)$ возможны другие регулярные представления.

Совместно с задачей (21)–(23) будем рассматривать линейный процесс

$$\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 w(t, x)}{\partial x^4} - f(t)\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} \tag{25}$$

при начальных (22) и граничных (23) условиях.

Считаем, что краевая задача (21) – (23) имеет однозначное непрерывное решение $w(t, x, \mu)$ в области $T \times D$ при $\mu \in (0, 1)$, имеющее в $T \times D$, согласно (21) – (23), необходимые непрерывные производные и принадлежащее вместе с указанными производными вещественному гильбертовому пространству $L^2(D)$. Относительно решения $w(t, x)$ линейной задачи (25), (22), (23) допускаем аналогичные свойства.

Уравнение (21) можно представить в виде

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \mathscr{L}(t, \mu)\, u(t, x), \tag{26}$$

$$\mathscr{L}(t, \mu)\, u(t, x) = L(t)\, u(t, x) + \mu F(t, u_1^2(t, x), u_2^3(t, x)), \tag{27}$$

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} - f(t)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -\beta \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ [1 - u_1^2(t, x)]\, u_2^3(t, x) \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))^*,$$
$$u_1(t, x) = w(t, x), \quad u_2(t, x) = \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t}. \tag{29}$$

Краевые условия имеют вид

$$u(t, x)|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x) = (w_0(x), v_0(x))^*, \tag{30}$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(t, 1)}{\partial x^2} = 0. \tag{31}$$

Исходную задачу (21) – (23) рассматриваем на конечном промежутке времени $T = [0, \tilde{L}\mu^{-1}]$, где $\mu$ — малый положительный параметр в (21), $\tilde{L} = \text{const} > 0$ зависит от параметров процесса (21) – (23).

Совместно с задачей (26), (30), (31), эквивалентной задаче (21) – (23), рассмотрим линейную задачу

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = L(t)\, u(t, x) \tag{32}$$

при краевых условиях (30), (31), эквивалентную (25), (22), (23).

Рассмотрим вещественное гильбертово пространство $\overline{H}$ векторов $u(t, x) = \{u_1(t, x), u_2(t, x)\}$ с непрерывными функциями $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ при $t \in T$, $x \in D$, для которых скалярное произведение каждой пары векторов $u$, $v$ равно

$$(u, v) = \int\limits_D \sum_{i=1}^{2} u_i(t, x)\, v_i(t, x)\, dx, \quad u, v \in \overline{H}.$$

Из предположений на исходные процессы (21) – (23) следует, что оператор $\mathscr{L}(t, \mu)$ есть оператор в $\overline{H}$, действующий в области $\tilde{W}(T \times D)$ : $\mathscr{L}(t, \mu)$: $\tilde{W} \to \overline{H}$, где область определения $\tilde{W}$ оператора $\mathscr{L}(t, \mu)$ есть множество двухкомпонентных векторов $u = \{u_1(t, x), u_2(t, x)\} \in \overline{H}$, компоненты которых имеют по $t$, $x$ необходимые частные производные согласно (26) – (31), принадлежащие гильбертовому пространству $L^2(D)$ при $t \in T$, и удовлетворяют граничным условиям (31). Оператор $L(t)$ есть также отображение из множества $\tilde{W}$ в пространство $\overline{H}$ : $L(t)$: $\tilde{W} \to \overline{H}$. Решение задачи (26), (30) , (31) при всех $t \in T$, как и решение линейной задачи (32), (30), (31), определяет траекторию в $\tilde{W}$.

Исходную задачу рассматриваем в области

$$\Omega = \Big\{t,\ x,\ u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\ \frac{\partial u_1}{\partial x}, \ldots,\ \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4},\ f(t),$$

$$\mu\colon\ t \in T,\ \ x \in D,\ \|u_1\|_2 \le b_1,\ \left\|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right\|_2 \le b_2,\ \left\|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right\|_2 \le b_3;$$

$$\left\|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right\|_2 \le c_1, \ldots,\ \left\|\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4}\right\|_2 \le c_4;\quad |f(t)| \le \tilde{C} \equiv 4\pi^2 |R_0 + R_t|;$$

$$b_i = \text{const} > 0,\ \ i = 1, 2, 3;\quad c_j = \text{const} > 0,\ \ j = 1, 2, 3, 4;\quad \mu \in (0, 1)\Big\}.$$

В качестве меры $\rho(u, 0)$ в $\tilde{W} \subset \overline{H}$ положим

$$\rho(u, 0) = \left\{\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + w^2 + v^2\right] dx\right\}^{1/2}. \tag{33}$$

Отсюда, учитывая граничные условия (31), с мерой (33) свяжем оператор $M$, имеющий представление

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^4}{\partial x^4} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Сопряженный оператор $L^*(t)$ к линейному оператору $L(t)$ (28) в этом случае, с учетом граничных условий (31), имеет следующее представление:

$$L^*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} - f(t)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Рассмотрим функционал

$$V[u, t] = (u, B(t)u), \tag{36}$$

где оператор $B(t)$ задан в виде матрицы

$$B(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^4}{\partial x^4} + \gamma(t)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_1 + \dfrac{\beta^2}{4} & \dfrac{\beta}{2} \\ \dfrac{\beta}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

($\gamma(t)$ — некоторый коэффициент, непрерывно дифференцируемый по $t \in$ $\in [0, \tilde{L}\mu^{-1}]$, $\alpha_1$ — некоторый постоянный параметр) и является определенно положительным относительно меры $\rho(u, 0)$ при условиях

$$0 < \tilde{\mu} < 1, \quad (1-\tilde{\mu})4\pi^2 - (\tilde{\mu}+\varepsilon) > \gamma(t),$$

$$\alpha_1 > \tilde{\mu} - \frac{\beta^2}{4} - \varepsilon\pi^2 + \frac{\beta^2}{4(1-\tilde{\mu})}, \tag{38}$$

$$\varepsilon = \text{const} > 0,$$

которые следуют из равенства

$$(u, [B(t) - \tilde{\mu} M] u) \geq 0.$$

Здесь оператор $M$ определен согласно (34). Из (28), (35), (37) для оператора $N(t)$ получаем представление

$$N(t) = \begin{pmatrix} -\beta\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} - \left[\beta f(t) + \dfrac{d\gamma(t)}{dt}\right]\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -[f(t) - \gamma(t)]\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_1 - \dfrac{\beta^2}{4} \\ -[f(t) - \gamma(t)]\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_1 - \dfrac{\beta^2}{4} & -\beta \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Отметим, что $\tilde{\mu}$ — некоторое фиксированное значение малого параметра $\mu$, где $\mu \in (0, 1)$.

Задача о собственных значениях, соответствующая соотношениям (37)–(39), определяется уравнением вида

$$N(t)y = \lambda B(t)y, \quad y \in \tilde{W}, \quad t \in T; \tag{40}$$

при этом искомый собственный вектор $y \in \tilde{W}$ является двухкомпонентным: $y = (y_1, y_2)$. Наша цель — найти ограниченное максимальное собственное значение $\lambda_{\max}(t)$, $t \in T$, задачи (40) в явном виде. Методом исключения уравнение (40) сведем к уравнению лишь для одной компоненты, например для $y_1$:

$$\frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + k(t)\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + c(t)\, y_1 = 0. \tag{41}$$

Коэффициенты $k(t)$, $c(t)$ таковы:

$$k(t) = \Big\{(\lambda+\beta)[\beta f(t) - \dot{\gamma}(t) + \lambda\gamma(t)] +$$

$$+ 2[f(t) - \gamma(t)]\left(\alpha_1 - \frac{\beta^2}{4} - \lambda\frac{\beta}{2}\right)\Big\}\{(\lambda+\beta)^2 - [f(t) - \gamma(t)]^2\}^{-1}, \tag{42}$$

$$c(t) = \frac{\lambda(\lambda+\beta)(\alpha_1 + \beta^2/4) - (\alpha_1 - \beta^2/4 - \lambda\beta/2)^2}{(\lambda+\beta^2) - [f(t) - \gamma(t)]^2}, \tag{43}$$

функция $y_1$ удовлетворяет нулевым граничным условиям

$$y_1(t,0) = y_1(t,1) = 0, \quad \frac{\partial^2 y_1(t,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_1(t,1)}{\partial x^2} = 0. \tag{44}$$

При фиксированном $t$ уравнение (41) имеет постоянные коэффициенты. Это относится и к системе (40), которую свели к (41). Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (41), имеет корни

$$\tilde{r}_1 = +i\left(\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} - c}\right)^{1/2}, \quad \tilde{r}_2 = -i\left(\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} - c}\right)^{1/2},$$

$$\tilde{r}_3 = +i\left(\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - c}\right)^{1/2}, \quad \tilde{r}_4 = -i\left(\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - c}\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим далее случай, когда коэффициент $k(t)$ является положительным при всех $t \in T$. Для этих значений $k$ и $t$ получаем две последовательности собственных функций:

а) при $c > 0,\ k^2 > 4c$:

$$y_1(t, x) = C_1(t)\sin r_1 x + C_2(t)\cos r_1 x + C_3(t)\sin r_2 x + C_4(t)\cos r_2 x, \quad (45)$$

где величины

$$r_{1,2} = \left(\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - c}\right)^{1/2},$$

как следует из (44), удовлетворяют условию

$$(r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2)\sin r_1 \sin r_2 = 0; \quad (46)$$

б) при $c < 0,\ k^2 > 4c$:

$$y_1(t, x) = C_1(t)\sin r_1 x + C_2(t)\cos r_1 x + C_3(t)\operatorname{sh} r_2 x + C_4(t)\operatorname{ch} r_2 x, \quad (47)$$

где величины

$$r_{1,2} = \left(\pm\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} - c}\right)^{1/2},$$

согласно условию (44), удовлетворяют уравнению

$$(r_1^4 + r_2^4 + 2r_1^2 r_2^2)\sin r_1 \operatorname{sh} r_2 = 0. \quad (48)$$

Из условий этой задачи на собственные значения следует, что существует бесконечное дискретное множество собственных значений $\lambda_n$, при которых соответствующие пары чисел $(k_n, c_n)$ будут удовлетворять условиям (46), либо (48).

Для максимального собственного значения $\lambda_{\max}(t)$ при каждом $t \in T$ имеем

$$\lambda_{\max}(t) = \max_{k_n}\left\{-\beta - \frac{\dot\gamma(t)}{2[k_n - \gamma(t)]} + \left[\left(\frac{\dot\gamma(t)}{2[k_n - \gamma(t)]}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2[f(t) - \gamma(t)](\alpha_1 + \beta/2)}{k_n - \gamma(t)} + \frac{[f(t) - \gamma(t)]^2}{1 - \gamma(t)/k_n}\right]^{1/2}\right\}, \quad (49)$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Величина (49) становится неограниченной, когда $k_n = \gamma(t)$ $(\gamma(t) > 0)$ при некотором целом $n$. В этом случае из (44) и (43) следует равенство

$$c_n(\lambda+\beta)^2 - \frac{4c_n}{\gamma^2(t)}\left(\alpha_1 + \frac{\beta^2}{4}\right)^2 = \alpha_1(\lambda+\beta)^2 - \left(\alpha_1 + \frac{\beta^2}{4}\right)^2,$$

из которого необходимо следует

$$\gamma^2(t) = 4c_n, \quad c_n = \alpha_1 \tag{50}$$

при указанном $n$. Отсюда и $k_n^2 = 4c_n$.

Следовательно, собственное значение будет неограниченным тогда, когда пара $(k_n, c_n) = (\gamma, \alpha_1)$ удовлетворяет одному из условий (46) или (48). Но это невозможно ибо, как следует из (50), это противоречит условиям а) и, тем более, условиям б). Следовательно, условия исходной задачи, в том числе условия положительной определенности (38) функционала (36), обеспечивают ограниченность собственных значений задачи для оператора (39), порожденной линейным процессом (25), (22), (23).

Мы убедились, что при любом целом $n$ $k_n \neq \gamma$ при всех $t \in T$. Поэтому все $k_n$, $n = 1, 2, \ldots$, как следует из условий (38), должны удовлетворять неравенству

$$k_n > (1-\tilde{\mu})4\pi^2 - (\tilde{\mu}+\varepsilon), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{51}$$

при каждом $t \in T$ совместно с условиями (46) или (48). Кроме того, при каждом фиксированном $t \in T$ величины $k_n$ можно расположить в порядке их возрастания: $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n < \ldots$. Поэтому для каждого фиксированного момента времени $t$, как следует из (49), максимум $\lambda$ достигается либо при $k = k_1$, либо при $k = k_\infty$ в зависимости от значения $t$.

Если $k_n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_\infty = -\beta + [f(t) - \gamma(t)].$$

Следовательно, имеет смысл величина

$$\mathfrak{M} = \sup_{t\in T} |\lambda_{\max}(t)|,$$

которая, очевидно, зависит от условий (46) или (48) и (51).

Теперь можем сформулировать достаточные условия технической устойчивости исходного процесса (21) – (23). Вычислим производную по времени от функционала $V[u, t]$ вдоль решения задачи (26) – (31). Обозначим

$$M(t, x, \mu) = [1 - w^2(t, x, \mu)]\left(\frac{\partial w(t, x, \mu)}{\partial t}\right)^3 w(t, x, \mu),$$

$$\xi(t, x, \mu) = V[\tilde{u}(t, x), t] - V[u(t, x, \mu), t],$$

$$|\xi(t, x, \mu)| \leq \tilde{k} = \mathrm{const} > 0,$$

$$\tilde{M}_1(t, x) = [1 - w^2(t, x)]\left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial t}\right)^3 w(t, x),$$

где $\tilde{u}(t, x)$ — решение линейной задачи (32), (30), (31); $\tilde{k}$ — заданная постоянная величина.

Тогда производная по времени от функционала $V[u, t]$ вдоль решения задачи (26) – (31) имеет в области $\Omega$ следующую оценку:

$$\frac{dV[u(t,x,\mu),t]}{dt} \le \lambda_{\max}(t)\, V[u(t,x,\mu),t] + \tilde{\mu}\tilde{f}_1(t) + R,$$

$$\tilde{f}_1(t) = \left(1+\frac{\beta}{2}\right)\|\tilde{M}_1(t)\|_2,$$

где постоянная

$$R = (|\mu+\tilde{\mu}| + 2\tilde{\mu})\left(\frac{\beta}{2}+1\right)(1+b_1^2)\, b_1 b_2^3 + \mathfrak{M}\tilde{k}.$$

Рассмотрим при $t \in [0, \tilde{L}\tilde{\mu}^{-1}] \equiv T_1$ уравнение сравнения

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_{\max}(t)[z + \sigma(t,\tilde{\mu})], \tag{52}$$

$$z(0) = z_0, \quad z_0 \ge V[u_0(x), 0], \tag{53}$$

$$\sigma(t,\tilde{\mu}) = \int_0^t \left[\tilde{\mu}\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\|M_1(\tau)\|_2 + R\right]d\tau. \tag{54}$$

Согласно известной из [16] теореме о дифференциальных неравенствах, для функционала Ляпунова (36) вдоль решения исходной задачи (21) – (23) с помощью решения $\bar{z}(t) = \bar{z}(t, t_0, z_0)$ скалярной задачи (53), (54) получаем оценку

$$V\left[w(t,x,\mu), \frac{\partial w(t,x,\mu)}{\partial t}, t\right] \le$$

$$\le \exp\left[\int_0^t \lambda_{\max}(\tau)\,d\tau\right]\left\{z_0 + \int_0^t (\tilde{\mu}\tilde{f}_1(\tau) + R)\exp\left[\int_0^\tau -\lambda_{\max}(s)\,ds\right]\right\}d\tau \equiv$$

$$\equiv P(t,\mu), \quad t \in \bar{T} = [0, \tilde{L}\mu^{-1}] \cap [0, \tilde{L}\tilde{\mu}^{-1}]. \tag{55}$$

Следовательно, окончательно в области $\Omega$ при $t \in \bar{T}$ имеем неравенство

$$V\left[w(t,x,\mu), \frac{\partial w(t,x,\mu)}{\partial t}, t\right] \le K, \quad t \in \bar{T},$$

$$K = \exp(2\mathfrak{M}\tilde{L}\bar{\mu}^{-1})\left\{\exp[-\mathfrak{M}\bar{L}\bar{\mu}^{-1}]z + \tilde{L}\bar{\mu}^{-1}\left[\tilde{\mu}\left(1+\frac{\beta}{2}\right)(b_1+b_1^3)\,b_2^3 + R\right]\right\}, \tag{56}$$

$$\bar{\mu}^{-1} = \min\{\mu^{-1}, \tilde{\mu}^{-1}\}.$$

Таким образом, из (55), (56) следует техническая устойчивость относительно меры $\rho(u, 0)$ исходной системы (21) – (23) на конечном промежутке времени $\bar{T} = [0, \tilde{L}\bar{\mu}^{-1}]$ при указанных выше условиях на ее параметры. Если оценки (55), (56) выполняются при всех $\bar{T} \subseteq I$, то исходные процессы (21) – (23), заданные при всех $\bar{T} \subseteq I$, технически устойчивы на бесконечном промежутке времени $I$. Достаточное условие асимптотической технической устойчивости будет выполнено, если дополнительно выполняется условие $\bar{z}(t) + \sigma(t,\tilde{\mu}) \to 0$ при $t \to +\infty$, $\mu \in (0, 1)$.

1. *Абгарян К. А.* Устойчивость движения на конечном интервале времени // Итоги науки и техники. Общая механика. – М.: ВИНИТИ, 1976. – Т. 3. – С. 43 – 127.

2. *Байрамов Ф. Д.* О технической устойчивости систем с распределенными параметрами при постоянно действующих возмущениях // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1974. – Вып. 2. – С. 5–11.
3. *Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф.* Исследование задач по практической устойчивости и стабилизации движения // Механика твердого тела. – 1975. – № 6. – С. 15–24.
4. *Карачаров К. А., Пилютик А. Г.* Введение в техническую теорию устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1962. – 243 с.
5. *Зубов В. И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. – Л.: Ленингр. ун-т, 1957. – 241 с.
6. *Каменков Г. В.* Об устойчивости на конечном интервале времени // Прикл. математика и механика. – 1953. – **17**, вып. 5. – С. 529–540.
7. *Кириченко Н. Ф.* Введение в теорию стабилизации движения. – Киев: Выща шк., 1978. – 184 с.
8. *Матвийчук К. С.* О методе сравнения для дифференциальных уравнений, близких к гиперболическим // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 11. – С. 2009–2011.
9. *Матвийчук К. С.* О технической устойчивости движения панели в газовом потоке // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1988. – № 6 (172). – С. 93–99.
10. *Матвийчук К. С.* Техническая теория параметрически возбуждаемых панелей в газовом потоке // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 4. – С. 122–131.
11. *Diaz J. B., Metcalf F. T.* A functional equation for Rayleigh quotient eigenvalues and some application // J. Math. and Mech. – 1968. – **17**, № 7. – P. 623–630.
12. *Hsu C. S., Lee T. H.* A stability study of continuous systems under parametrics excitations via Liapunov's direct method // IUTAM Symp. Instab. Contin. Syst. (West Germany, 1969). – Berlin: Springer, 1971. – P. 112–118.
13. *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. – Казань: Изд-во Казан. авиац. ин-та, 1971. – 180 с.
14. *Скоробагатько В. Н.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1980. – 243 с.
15. *Parks P. C.* A stability criterion for panel flutter via the second method of Liapunov // AIAA Journal. – 1966. – **4**, № 1. – P. 175–177.
16. *Szarski J.* Differential inequalities. – Warszawa: PWN, 1967. – 256 p.
17. *Валеев В. П., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1981. – 412 с.
18. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
19. *Иосида К. Ф.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

Получено 15.01.97