УДК 517.948+512.13

Л. П. Кучко

Локальная разрешимость линейных функциональных уравнений

В работе устанавливается существование локального C^∞-решения функционального уравнения

$$\varphi(Fx) - Q(x)\varphi(x) = \gamma(x), \tag{1}$$

где $F:(\mathbb{R}^1, 0) \to (\mathbb{R}^1, 0)$, $Q:\mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^{m^2}$, $\gamma:\mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^m$ — заданные C^∞-отображения. Уравнения вида (1) при линейном (но многомерном) отображении F подробно исследованы в работе [1]. Если $F'(0) = 1$, $F^{(k)}(0) \neq 0$ при некотором $k < \infty$, то уравнение (1) является дискретным аналогом вырождающейся системы дифференциальных уравнений, изученной в работе [2].

Для C^∞-разрешимости уравнения (1) в какой-нибудь окрестности начала координат необходима его формальная разрешимость, т. е. существование такого формального отображения $\hat\varphi:\mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^m$, для которого $\hat\varphi(\hat F x) - \hat Q(x)\hat\varphi(x) = \hat\gamma(x)$, где $\hat F$, $\hat Q$, $\hat\gamma$ — формальные ряды Тейлора в нуле. Формальной разрешимости уравнения (1), однако, не достаточно для его локальной C^∞-разрешимости.

Пусть F — конечно определенный (относительно сопряженности) C^∞-диффеоморфизм, т. е. F удовлетворяет одному из следующих условий: 1) F гиперболичен ($|F'(0)| \neq 1$); 2) F негиперболичен ($|F'(0)| = 1$) и $F^2(x) = x + f(x)$, $\hat f \neq 0$. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть F — локальный конечно определенный C^∞-диффеоморфизм. Тогда любое формальное решение $\hat\varphi$ уравнения* (1) *восстанавливается до его локального C^∞-решения* (*т. е. существует такое локальное C^∞-решение φ уравнения* (1), *ряд Тейлора которого в начале координат равен $\hat\varphi$*).

Поскольку утверждение теоремы равносильно существованию при любом плоском в нуле отображении γ ($\hat\gamma = 0$) локального плоского в нуле решения φ уравнения (1), в дальнейшем будем считать, что в уравнении (1) отображения φ и γ являются плоскими в нуле.

Доказательство теоремы использует принцип неподвижной точки, а также приведение матрицы $Q(x)$ к той или иной нормальной форме.

Лемма 1. *Пусть F—локальный конечно определенный C^∞-диффеоморфизм. Существует C^∞-преобразование $\varphi(x) = T(x)\tilde{\varphi}(x)$, приводящее уравнение* (1) *к уравнению того же вида с блочно-треугольной матрицей* $\tilde{Q}(x) = (T(Fx))^{-1}Q(x)T(x)$ *с диагональными блоками $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, где матрица $Q_1(0)$ невырождена, а матрица $Q_2(0)$ нильпотентна.*

Лемма 1 сводит доказательство теоремы к рассмотрению двух уравнений вида (1) с невырожденной в нуле и нильпотентной в нуле матрицей $Q(x)$.

В негиперболической ситуации при невырожденной в нуле матрице $Q(x)$ требуется дополнительная нормализация $Q(x)$. Заметим вначале, что если $F'(0) = -1$, а $\varphi_0(x)$ — плоское в нуле C^∞-решение уравнения $\varphi(F^2x) = Q(Fx)Q(x)\varphi(x) + Q(Fx)\gamma(x) + \gamma(Fx)$, то отображение

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \geqslant 0, \\ Q(F^{-1}x)\varphi_0(F^{-1}x) + \gamma(F^{-1}x), & x < 0 \end{cases}$$

является плоским в нуле C^∞-решением уравнения (1). Поэтому в негиперболической ситуации будем рассматривать только случай $F'(0) = 1$.Заметим также, что поскольку мы ищем плоское в нуле C^∞-решение уравнения (1), достаточно отдельно рассматривать это уравнение в правой и левой полуокрестностях начала координат.

Лемма 2. *Пусть $F(x) = x + \alpha x^{k+1} + \ldots$, $\alpha \neq 0$, $\det Q(0) \neq 0$, $x \geqslant 0$. Существует допустимое преобразование $\varphi(x) = T(x)\tilde{\varphi}(x)$, приводящее уравнение* (1) *к уравнению того же вида с треугольной матрицей* $\tilde{Q}(x) = (T(Fx))^{-1}Q(x)T(x)$.

Под допустимым преобразованием понимается такое преобразование $T(x)$, которое становится гладким после замены $x \mapsto x^p$ и умножения на x^r с некоторыми $p, r \in \mathbb{R}$ (то же предполагается относительно обратной матрицы $T^{-1}(x)$). Такое преобразование является изоморфизмом пространства плоских в нуле C^∞-отображений.

Лемма 2 сводит доказательство теоремы в негиперболическом случае при $\det Q(0) \neq 0$ к рассмотрению одномерной ситуации ($m = 1$).

Доказательство теоремы Если $|F'(0)| \neq 1$, а матрица $Q(0)$ невырождена, то утверждение теоремы содержится в [3].

Пусть $|F'(0)| < 1$, а матрица $Q(0)$ нильпотентна. Преобразуем уравнение (1) к виду

$$\varphi(x) = Q(F^{-1}x)\varphi(F^{-1}x) + \gamma(F^{-1}x). \tag{2}$$

Предположим вначале, что $Q(0) = 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\mu_1|x| \leqslant |F^{-1}x| \leqslant \mu_2|x|, \quad |(F^{-1}x)'| \leqslant \mu_2, \quad |x| \leqslant \delta, \tag{3}$$

при некоторых $\mu_1, \mu_2 > 1$. Поскольку нас интересует локальная C^∞-разрешимость уравнения (2), можно считать, что $\gamma(x) = 0$ при $|x| > \delta$. Для каждой пары целых неотрицательных чисел s, ν выберем числа $\varepsilon_{s\nu} > 0$ так, чтобы $\varepsilon_{s\nu}\mu_2^{s+\nu} \leqslant \lambda < 1$. Далее, для каждой пары s, ν выберем $\delta_{s\nu} > 0$ так, чтобы $\|Q(x)\| \leqslant \varepsilon_{s\nu}$ при $|x| \leqslant \delta_{s\nu}$. Положим $m = \max\limits_{|x|\leqslant\delta}\|Q(x)\|$. Выберем числа $\alpha_{s\nu} > 0$ так, чтобы $\alpha_{s\nu} < \frac{1}{2} m^{-1}\delta_{s\nu}^{2\nu}\mu_1^{\nu}\mu_2^{-2\nu-s}$. Обозначим через K выпуклый компакт плоских в нуле C^∞-отображений $\varphi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^m$, определенный неравенствами

$$\|\varphi^{(s)}(x)\| \leqslant C_{s\nu}\theta_{s\nu}(x), \quad \nu \geqslant \nu_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где

$$\theta_{s\nu}(x) = \begin{cases} |x|^\nu, & |x| \leqslant \delta_{s\nu}, \\ \alpha_{s\nu}|x|^{-\nu}, & \delta_{s\nu} < |x| \leqslant \delta, \\ 0, & |x| > \delta. \end{cases}$$

Согласно принципу неподвижной точки, для доказательства локальной C^∞-разрешимости уравнения (2) достаточно указать такие константы $C_{s\nu}$ и ν_s, чтобы компакт K был инвариантен относительно оператора $(L\varphi)(x) = Q(F^{-1}x)\,\varphi(F^{-1}x) + \gamma(F^{-1}x)$, стоящего в правой части уравнения (2).

Пусть $\varphi \in K$. Рассмотрим три случая:

1°. $|F^{-1}x| \leqslant \delta_{s\nu}$. В силу (3), выбора $\varepsilon_{s\nu}$ и определения компакта (4), имеем

$$\|(L\varphi)^{(s)}(x)\| \leqslant C_{s\nu}|x|^\nu[\lambda + C_{s\nu}^{-1} f_{s\nu}(C_{0\nu}, \ldots, C_{s-1,\nu})], \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $f_{s\nu}$ — некоторая линейная функция с неотрицательными коэффициентами ($f_{0\nu} = \mathrm{const}$).

2°. $|x| \leqslant \delta_{s\nu} < |F^{-1}x|$. В силу (3), (4) имеем

$$\|(L\varphi)^{(s)}(x)\| \leqslant C_{s\nu}|x|^{-\nu} m\alpha_{s\nu}\mu_1^{-\nu}\mu_2^s + g_{s\nu}(C_{0\nu}, \ldots, C_{s-1,\nu})|x|^\nu,$$

где $g_{s\nu}$ — некоторая линейная функция с неотрицательными коэффициентами ($g_{0\nu} = \mathrm{const}$). Поскольку из условия $|F^{-1}x| > \delta_{s\nu}$ и оценок (3) вытекает $|x| > \mu_2^{-1}\delta_{s\nu}$, то в силу выбора чисел $\alpha_{s\nu}$ получаем

$$\|(L\varphi)^{(s)}(x)\| \leqslant C_{s\nu}|x|^\nu\left[\frac{1}{2} + C_{s\nu}^{-1} g_{s\nu}(C_{0\nu}, \ldots, C_{s-1,\nu})\right], \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

3°. $|x| > \delta_{s\nu}$. В силу (3), (4) имеем

$$\|(L\varphi)^{(s)}(x)\| \leqslant C_{s\nu}|x|^{-\nu} m\alpha_{s\nu}\mu_1^{-\nu}\mu_2^s + h_{s\nu}(C_{0\nu}, \ldots, C_{s-1,\nu})|x|^{-\nu},$$

где $h_{s\nu}$ — некоторая линейная функция с неотрицательными коэффициентами ($h_{0\nu} = \mathrm{const}$). Выберем числа ν_s так, чтобы $m\mu_1^{-\nu}\mu_2^s \leqslant \tilde{\lambda} < 1$ $\forall \nu \geqslant \nu_s$. Отсюда следует

$$\|(L\varphi)^{(s)}(x)\| \leqslant C_{s\nu}\alpha_{s\nu}|x|^{-\nu}[\tilde{\lambda} + \alpha_{s\nu}^{-1}C_{s\nu}^{-1}h_{s\nu}(C_{0\nu}, \ldots, C_{s-1,\nu})], \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Таким образом, в силу (5) — (7) $\forall \nu \geqslant \nu_s$

$$\|(L\varphi)^{(s)}(x)\| \leqslant C_{s\nu}\theta_{s\nu}(x)[\tilde{\tilde{\lambda}} + \alpha_{s\nu}^{-1}C_{s\nu}^{-1}\varkappa_{s\nu}(C_{0\nu}, \ldots, C_{s-1,\nu})], \quad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\tilde{\tilde{\lambda}} < 1$, а $\varkappa_{s\nu}$ — некоторая линейная функция с неотрицательными коэффициентами ($\varkappa_{0\nu} = \mathrm{const}$). Выбирая последовательно числа $C_{s\nu}$ так, чтобы $\tilde{\tilde{\lambda}} + \alpha_{s\nu}^{-1}C_{s\nu}^{-1}\varkappa_{s\nu}(C_{0\nu}, \ldots, C_{s-1,\nu}) < 1$, получаем, что оператор L переводит компакт (4) в себя. Следовательно, уравнение (2) имеет локальное C^∞-решение, плоское в нуле.

Пусть теперь $Q(0) \neq 0$ — нильпотентная жорданова матрица. В уравнении (1) проведем допустимое преобразование $\varphi(x) = T(x)\tilde{\varphi}(x)$, где $T(x) = \mathrm{diag}\{|x|^{p_1}, |x|^{p_2}, \ldots, |x|^{p_m}\}$, $0 < |p_i - p_j| < 1$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Подбором показателей p_i можно добиться того, чтобы $\tilde{Q}(0) = 0$. Тем самым ситуация сводится к рассмотренной ранее.

Если $|F'(0)| > 1$, а матрица $Q(0)$ нильпотентна, решение уравнения (2) ищется в компакте плоских в нуле C^∞-отображений $\varphi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^m$, удовлетворяющих неравенствам

$$\|\varphi^{(s)}(x)\| \leqslant C_{s\nu}|x|^\nu, \quad \nu \geqslant \nu_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Рассмотрим негиперболический случай. Пусть $F(x) = x + \alpha x^{k+1} + \ldots$, $\alpha \neq 0$. Если $\det Q(0) \neq 0$, рассмотрим одномерную ситуацию $m = 1$. Положим $|Q(x)| = q + \beta x^l + \ldots$, $q \neq 0$, $\beta \neq 0$, $l \leqslant \infty$. Достаточно рассмотреть уравнение (1) при $x \geqslant 0$ Уравнение (1) решается с помощью тех же методов, которые применялись в гиперболическом случае при нильпотентной в нуле матрице $Q(x)$. При этом в зависимости от динамики отображения F и значений q, l, k, α, β рассматриваются компакты того или иного типа. Например, если $\alpha < 0$ (т. е. F — квазисжатие), $q = 1$, $l \geqslant k$, используется компакт вида (8). Если $\alpha > 0$ (т. е. F — квазирастяжение), $q = 1$, $\beta > 0$ (т. е. $|Q(x)| \geqslant 1$) и $l < k$, решение уравнения (1) ищется в компакте вида (4).

Пусть, наконец, $F'(0) = 1$, а матрица $Q(0)$ нильпотентна. Если отображение F^{-1} является квазисжатием, решение уравнения (2) ищется в компакте типа (8), если квазирастяжением — в компакте типа (4).

Для завершения доказательства теоремы докажем леммы о нормализации матрицы $Q(x)$.

Доказательство леммы 1. Существует формальное преобразование $\hat{T}(x)$, которое приводит матрицу $\hat{Q}(x)$ к матрице $\tilde{\hat{Q}}(x)$, удовлетворяющей условию

$$\tilde{\hat{Q}}(\lambda x) D_0 = D_0 \tilde{\hat{Q}}(x), \tag{9}$$

где $\lambda = F'(0)$, а D_0 — полупростая часть матрицы $Q(0)$. Это, по существу, вариант теоремы Пуанкаре — Дюляка для формального отображения $\hat{\Phi}: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^1 \times \mathbb{C}^m$, определенного формулой $\hat{\Phi}(x, y) = (\hat{F}(x), \hat{Q}(x)\, y)$. Из (9) следует $\tilde{\hat{Q}}(x) = \operatorname{diag}\{\tilde{\hat{Q}}_1(x), \tilde{\hat{Q}}_2(x)\}$, где $\tilde{\hat{Q}}_1(0)$ невырождена, а $\tilde{\hat{Q}}_2(0)$ нильпотентна. Поэтому можно считать, что матрица $Q(x)$ имеет вид $Q(x) = \operatorname{diag}\{Q_1(x), Q_2(x)\} + q(x)$, где $Q_1(0)$ невырождена, $Q_2(0)$ нильпотентна, $\hat{q} = 0$. Будем искать локальное преобразование $T(x)$ матрицы $Q(x)$ в виде $T(x) = E + t(x)$, где $t(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t_{21}(x) & 0 \end{pmatrix}$ — нижняя блочно-треугольная матрица, а $t_{21}(x)$ — плоское в нуле C^∞-решение уравнения

$$\begin{aligned} t_{21}(Fx) = {} & [Q_2(x) + q_{22}(x)]\, t_{21}(x)\, [Q_1(x) + q_{11}(x) + q_{12}(x)\, t_{21}(x)]^{-1} + \\ & + q_{21}(x)\, [Q_1(x) + q_{11}(x) + q_{12}(x)\, t_{21}(x)]^{-1} \end{aligned} \tag{10}$$

($q_{ij}(x)$ — соответствующие блоки матрицы $q(x)$). Если уравнение (10) локально C^∞-разрешимо, то преобразование $T(x)$ приводит матрицу $Q(x)$ к нужному виду. Уравнение (10) является нелинейным вариантом уравнения (1) при нильпотентной в нуле матрице $Q(x)$. Доказательство разрешимости уравнения (10) проводится теми же методами, что и доказательство разрешимости уравнения (1). Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Докажем вначале приводимость к треугольному виду формальной матрицы $\hat{Q}(x)$. Непосредственно проверяется, что формальный диффеоморфизм $\hat{\Phi}(x, y) = (\hat{F}(x), \hat{Q}(x)\, y)$ включается в формальный поток $\hat{\Phi}^t(x, y) = (\hat{F}^t(x), \hat{A}^t(x)\, y)$, так что $\hat{F} = \hat{F}^t|_{t=1}$, $\hat{Q} = \hat{A}^t|_{t=1}$. Пусть $a(x) = \left.\dfrac{d\hat{A}^t(x)}{dt}\right|_{t=0}$, $v(x) = \left.\dfrac{d\hat{F}^t(x)}{dt}\right|_{t=0}$. Обозначим через P алгебраическое замыкание поля отношений кольца формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[x]]$. Согласно [2], существует такое обратимое над P преобразование $\hat{T}(x)$, что матрица $\tilde{\hat{a}}(x) = (\hat{T}(x))^{-1} \hat{a}(x)\, \hat{T}(x) - v(x)\, (\hat{T}(x))^{-1} (\hat{T}(x))'$ является жордановой матрицей над полем P. Но тогда матрица $\tilde{\hat{A}}^t(x) = (\hat{T}(\hat{F}^t x))^{-1} \hat{A}^t(x)\, \hat{T}(x)$ треугольна над P. Полагая $\tilde{\hat{Q}}(x) = \tilde{\hat{A}}^t(x)|_{t=1}$, получаем $\tilde{\hat{Q}}(x) = (\hat{T}(\hat{F}x))^{-1} \hat{Q}(x)\, \hat{T}(x)$. Матрица $\tilde{\hat{Q}}(x)$ треугольна над P, а ее диагональные элементы имеют вид $d_i(x) = \exp \xi_i(x^{1/n_i})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, где $\xi_i(u)$ — ряды из $\mathbb{C}[[x]]$, $n_i \geqslant 1$ — целые числа [2]. Остальные элементы этой матрицы — также формальные ряды от x^{1/n_i}.

Таким образом, можно считать, что $Q(x) = D(x) + N(x) + q(x)$, где $D(x) = \operatorname{diag}\{d_1(x), d_2(x), \ldots, d_m(x)\}$, $N(x)$ — верхняя нильтреугольная матрица, $\hat{q}=0$. Пусть сначала $\alpha>0$, т. е. F — квазирастяжение. Перенумеруем $d_i(x)$ так, чтобы при достаточно малых x выполнялись неравенства

$$|d_1(x)|\geqslant|d_2(x)|\geqslant\ldots\geqslant|d_m(x)|. \tag{11}$$

Преобразованием вида $T(x)=\operatorname{diag}\{1,x^{p_1},\ldots,x^{p_{m-1}}\}$, $p_i\in\mathbb{R}$, можно добиться того, чтобы $N(x)=o(x^r)$ при любом наперед заданном $r>0$. Выберем $r=k$ и будем в дальнейшем считать, что $N(x)=o(x^k)$. Тогда матрицу $Q(x)$ можно представить в виде $Q(x)=D(x)+x^kG(x)$. Будем искать дальнейшее преобразование в виде $T(x)=E+t(x)$, где $t(x)$ — нижнетреугольная C^∞-матрица, плоская в нуле. Тогда для элементов $t_{ij}(x)$ матрицы $t(x)$ получим систему

$$Q_{ij}(x)+\sum_{l=1}^{m}Q_{il}(x)\,t_{lj}(x)=\tilde{Q}_{ij}(x)+\sum_{l=1}^{m}t_{il}(Fx)\,\tilde{Q}_{lj}(x),\quad i,j=1,2,\ldots,m,$$

где $\tilde{Q}(x)=(\tilde{Q}_{ij}(x))$ — неизвестная верхнетреугольная матрица. Из этой системы последовательно находим столбцы $\bar{t}_j(x)$ с координатами $(0,\ldots,0,t_{jj}(x),\ldots,t_{mj}(x))$ матрицы $t(x)$ с учетом равенств $t_{ij}(x)=0$, $i<j$, $Q_{lj}(x)=0$, $l>j$, $\tilde{Q}_{jj}(x)=Q_{jj}(x)$. Если столбцы $\bar{t}_s(x)$, $s\leqslant j-1$, и элементы $\{\tilde{Q}_{is}(x)\}_{i=1}^m$, $s\leqslant j-1$, найдены, то элементы $\tilde{Q}_{ij}(x)$ при $i\leqslant j-1$ находим из равенств

$$Q_{ij}(x)+\sum_{l=1}^{m}Q_{il}(x)\,t_{lj}(x)=\tilde{Q}_{ij}(x)+\sum_{l=1}^{j}t_{il}(Fx)\,\tilde{Q}_{lj}(x), \tag{12}$$

в которых $t_{il}(x)$, $l\leqslant j-1$, известны. Найденные элементы $\tilde{Q}_{ij}(x)$, $i\leqslant j-1$, подставляем в (12) при $i\geqslant j$. Тогда для столбца $\bar{t}_j(x)$ получим уравнение вида

$$\bar{t}_j(Fx)=D(x)\,\bar{t}_j(x)\,Q_{jj}^{-1}(x)+x^kH(x)\,\bar{t}_j(x)+\tau(x), \tag{13}$$

где $\tau(x)$ — плоское в нуле C^∞-отображение. Положим $B(x)\bar{t}_j(x)=D(x)\,\bar{t}_j(x)\,Q_{jj}^{-1}(x)+x^kH(x)\,\bar{t}_j(x)$. В силу неравенств (11) $\|B(x)\|\leqslant 1+Cx^k$ при некотором $C>0$ и достаточно малых x. Уравнение (13) является уравнением вида (1). Его решение ищется в компакте вида (8) (после замены $x\mapsto F^{-1}x$).

Если $\alpha<0$, т. е. F — квазисжатие, диагональные элементы $d_i(x)$ матрицы $\hat{\tilde{Q}}(x)$ упорядочиваются по неубыванию модулей, и тогда $\|B^{-1}(x)\|\leqslant 1+C_1x^k$ при некотором $C_1>0$. Решение уравнения (13) также ищется в компакте вида (8) (после умножения обеих частей уравнения на $B^{-1}(x)$). Лемма 2 доказана. Тем самым завершено доказательство теоремы.

1. *Кучко Л. П.* Линейные функциональные уравнения // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1978.— **42**, № 2.— С. 379—395.
2. *Кузнецов А. Н.* О разрешимости вырождающихся дифференциальных уравнений // Функцион. анализ и его приложения.— 1972.— **6**, вып. 2.— С. 41—52.
3. *Белицкий Г. Р.* Функциональные уравнения и локальная сопряженность отображений класса C^∞ // Мат. сб. — 1973.— **91**, № 4.— С. 565—579.

Харьков. ун-т

Получено 23.05.85