УДК 517.5

П. В. Задерей

О многомерном аналоге одного результата Р. Боаса

1. Р. Боас [1] установил, что если $f(x)$ — 2π-периодическая интегрируемая функция и ряды Фурье функций $f(x)$ и $f(x)\operatorname{sign} x$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ абсолютно сходятся, то сходится интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (|f(x)|/x)\, dx$. С. А. Теляковский [2] уточнил этот результат, показав, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (|f(x)|/x)\, dx \leqslant C\left(|a_0|/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) + |\bar{a}_0|/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|\bar{a}_k| + |\bar{b}_k|)\right),$$

где a_k, b_k, $\bar{a}_k$, $\bar{b}_k$ — коэффициенты Фурье соответственно функций $f(x)$ и $f(x)\operatorname{sign} x$. Здесь и далее через C обозначена абсолютная постоянная, возможно, различная в разных формулах.

В настоящей работе предлагается один многомерный аналог результата Боаса—Теляковского.

2. Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $m \in N$, $m \geqslant 2$, $B_i = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$, $i = \overline{1, 2^m}$ ($j_k < j_l$, если $k < l$) — подмножества из M, пронумерованные произвольным образом; $T^m = [-\pi, \pi]^m$, $T_+^m = [0, \pi]^m$.

Функцию $f(x)$, заданную и непрерывную на T_+^m, продолжим по каждой переменной четным или нечетным образом. Получим 2^m функций $f_i(x)$, $i = \overline{1, 2^m}$, и пусть

$$s[f_i] = \sum_{k \geqslant 0} 2^{-\gamma_k} a_k(f_i) \prod_{j \in B_i} \cos k_j x_j \prod_{j \in C_M B_i} \sin k_j x_j \tag{1}$$

— их ряды Фурье. Здесь γ_k — число координат точки k, равных нулю $a_k(f_i) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^m \int\limits_{T_+^m} f_i(x) \prod\limits_{j \in B_i} \cos k_j x_j \prod\limits_{j \in C_M B_i} \sin k_j x_j dx$ — коэффициент Фурье функции $f_i(x)$, а $C_M B_i$ — дополнение множества B_i к M. Пусть также $(k, x)_l = \sum\limits_{i=l}^{m} k_i x_i$, $\zeta_k = (k_1\pi/n_1, k_2\pi/n_2, \ldots, k_m\pi/n_m)$.

Лемма 1. *Для любой непрерывной* на T_+^m *функции* $f(x)$ *справедливо неравенство*

$$\sup_n \pi^{-m} \int\limits_{T^m} \left| \sum_{k=0}^{n} 2^{-\gamma_k} f(\zeta_k)\, e^{i(k,x)_1} \right| dx \leqslant C \sum_{j=1}^{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f_j)|. \tag{2}$$

Доказательство. Предположим, что ряды (1) сходятся абсолютно (в противном случае лемма очевидна). Тогда, как легко видеть, при $i = 1, 2, \ldots, m$ $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \pi, x_{i+1}, \ldots, x_m) = 0$. Докажем лемму 1 путем m-кратного применения одномерного результата, полученного в работе [3].

Используя теорему Фубини, выражение $I = \pi^{-m} \int\limits_{T^m} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\, e^{i(k,x)_1} \right| dx$ представим в виде

$$I = \pi^{-m+1} \int\limits_{T^{m-1}} \left(\pi^{-1} \int\limits_{T} \left| \sum_{k_1=1}^{n_1} g\left(\frac{k_1\pi}{n_1}\right) e^{ik_1x_1} \right| dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_m,$$

где $g(t_1)=\sum_{k_2=1}^{n_2}\dots\sum_{k_m=1}^{n_m} f(t_1, k_2\pi/n_2, \dots, k_m\pi/n_m)\, e^{i(k,x)_2}$. В работе [3] доказано, что

$$\pi^{-1}\int_T\left|\sum_{k_1=1}^{n_1} g\left(\frac{k_1\pi}{n_1}\right)e^{ik_1x_1}\right|dx_1\leqslant C\left(\sum_{l_1=0}^{\infty}|a_{l_1}(g^+)|+\sum_{l_1=1}^{\infty}|b_{l_1}(g^-)|\right). \qquad (3)$$

Здесь $a_{l_1}(g^+)=\frac{2}{\pi}\int_{T_+} g^+(t_1)\cos l_1t_1dt_1$, $b_{l_1}(g^-)=\frac{2}{\pi}\int_{T_+} g^-(t_1)\sin l_1t_1dt_1$ — коэффициенты Фурье функций $g^+(t_1)$ и $g^-(t_1)$, которые являются продолжением $g(t_1)$ с T_+ на T соответственно четным и нечетным образом.

Поскольку $g^+(t_1)$ и $g^-(t_1)$ состоят из конечных сумм функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье, то эти функции также имеют абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Поэтому из (3) следует

$$I\leqslant C\Big(\sum_{k_1=0}^{\infty}\int_{T^{m-1}}\Big|\int_{T_+} g(t_1)\cos k_1t_1dt_1\Big|dt_2\dots dt_m+\sum_{k_1=1}^{\infty}\int_{T^{m-1}}\Big|\int_{T_+} g(t_1)\sin k_1t_1dt_1\Big|\times$$
$$\times\, dt_2\dots dt_m\Big)=I_1+I_2.$$

Оценим выражение I_1. Для этого используем результаты работы [3]:

$$\int_{T^{m-2}}\Big(\int_T\Big|\sum_{k_2=1}^{n_2}\int_{T_+}\sum_{k_3=1}^{n_3}\dots\sum_{k_m=1}^{n_m} f(t_1,k_2\pi/n_2,\dots,k_m\pi/n_m)\,e^{i(k,x)_3}\cos k_1t_1dt_1e^{ik_2x_2}\Big|dx_2\Big)\times$$
$$\times\, dx_3\dots dx_m\leqslant C\int_{T^{m-2}}\Big(\sum_{k_2=0}^{\infty}\Big|\int_{T^2_+}\sum_{k_3=1}^{n_3}\dots\sum_{k_m=1}^{n_m} f(t_1,t_2,k_3\pi/n_3,\dots,k_m\pi/n_m)\,e^{i(k,x)_3}\times$$
$$\times\cos k_1t_1\cos k_2t_2dt_1dt_2\Big|+\sum_{k_2=1}^{\infty}\Big|\int_{T^2_+}\sum_{k_3=1}^{n_3}\dots\sum_{k_m=1}^{n_m} f(t_1,t_2,k_3\pi/n_3,\dots,k_m\pi/n_m)\,e^{i(k,x)_3}\times$$
$$\times\cos k_1t_1\sin k_2t_2dt_1dt_2\Big|\Big)dx_3\dots dx_m.$$

Таким же образом оценивается интеграл, стоящий под знаком суммы в I_2. Далее применяя еще $m-2$ раза такие же рассуждения, как при оценке I, получаем соотношение

$$\int_{T^m}\Big|\sum_{k=0}^{n}2^{-\nu_k}f(\zeta_k)e^{i(k,x)_1}\Big|dx\leqslant C\sum_{j=1}^{2^m}\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(f_j)|.$$

Поскольку правая часть последнего неравенства не зависит от n, то отсюда следует утверждение леммы 1.

3. Пусть $\Delta^m=\{z=(z_1,\dots,z_m):|z_j|=|x_j+iy_j|<1,\ j=\overline{1,m}\}$, $z^k=z_1^{k_1}z_2^{k_2}\dots z_m^{k_m}$, $re^{it}=(r_1e^{it_1},r_2e^{it_2},\dots,r_me^{it_m})$, $0\leqslant r\leqslant 1$ $(0\leqslant r_i\leqslant 1,\ i=\overline{1,m})$, $r^k=r_1^{k_1}r_2^{k_2}\dots r_m^{k_m}$, а H_m^1 — класс регулярных функций $f(z)$, $z\in\Delta^m$, таких, что $\sup\limits_{0\leqslant r<1}\int_{T^m}|f(re^{it})|dt<\infty$.

Лемма 2. *Пусть* $\Phi(z)=\sum_{k\geqslant 0}b_kz^k\in H_m^1$. *Тогда*

$$\sum_{k\geqslant 0}|b_k|/\prod_{i=1}^{m}(k_i+1)\leqslant 2^{-m}\int_{T^m}|\Phi(e^{it})|dt<\infty. \qquad (4)$$

Доказательство проведем путем применения по каждой переменной одномерного результата Харди — Литлвуда [4, 5, с. 454].

Поскольку $\Phi(z)\in H_m^1$, то функция $\Phi(e^{it})$ существует почти всюду на $\Gamma_m=\{|z_i|=1,\ i=\overline{1,m}\}$, как предел $\Phi(re^{it})$ по некасательным направлениям [6, с. 476]. По теореме Фату [7, с. 204], примененной к интегралу $\int_{T^m} |\Phi(re^{it})|\, dt$ при $r_i \to 1$, $i = \overline{1, m}$, заключаем, что $\Phi(e^{it})$ суммируема на T^m.

В силу регулярности $\Phi(re^{it})$ при $0 \leqslant r < 1$ возможны перестановки членов степенного ряда $\sum_{k\geqslant 0} b_k r^k e^{i(k,t)_1} = \Phi(re^{it})$ и применение теоремы Фубини

$$2^{-m} \int_{T^m} |\Phi(re^{it})|\, dt = 2^{-m+1} \int_{T^{m-1}} 2^{-1} \int_T \left| \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} b_k r^k e^{i(k,t)_2} \right) e^{ik_1t_1} \right| dt_1 \Big) dt_2 \ldots dt_m.$$

Далее, используя теорему Харди — Литлвуда, находим

$$2^{-m} \int_{T^m} |\Phi(re^{it})|\, dt \geqslant 2^{-m+1} \int_{T^{m-1}} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{k_1+1} \left| \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} b_k r^k e^{i(k,t)_2} \right| \right) dt_2 \ldots dt_m.$$

Ряд, стоящий под знаком интеграла в правой части последнего неравенства, сходится абсолютно и равномерно, поэтому его можно почленно интегрировать. Тогда

$$2^{-m} \int_{T^m} |\Phi(re^{it})|\, dt \geqslant \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{k_1+1} \left(\frac{1}{2^{m-2}} \int_{T^{m-2}} \left(\frac{1}{2} \int_T \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\left| \sum_{k_3=0}^{\infty} \cdots \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} b_k r^k e^{i(k,t)_3} \right) e^{ik_2t_2} \right| dt_2 \right) dt_3 \ldots dt_m \right).$$

Так как функция $\Phi_{r_1}(z_2, z_3, \ldots, z_m) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_3=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} b_k r^k e^{i(k,t)_3} \right) e^{ik_2t_2}$ является регулярной по z_2 в замкнутой области $|z_2| \leqslant r_2 < 1$, то она принадлежит H_1^1 по z_2. Опять применяя теорему Харди — Литлвуда и почленно интегрируя ряд, получаем

$$2^{-m} \int_{T^m} |\Phi(re^{it})|\, dt \geqslant \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{k_1+1} \frac{1}{2^{m-2}} \int_{T^{m-2}} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{k_2+1} \left| \sum_{k_3=0}^{\infty} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} b_k r^k e^{i(k,t)_3} \right| dt_2 \ldots dt_m = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{(k_1+1)(k_2+1)} \int_{T^{m-2}} \left| \sum_{k_3=0}^{\infty} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} b_k r^k e^{i(k,t)_3} \right| dt_2 \ldots dt_m.$$

Продолжая этот процесс далее, находим

$$2^{-m} \int_{T^m} |\Phi(re^{it})|\, dt \geqslant \sum_{k\geqslant 0} \left(r^k |b_k| / \prod_{i=1}^{m} (k_i+1) \right).$$

Переходя к пределу при $r \to 1$, имеем

$$2^{-m} \lim_{r\to 1} \int_{T^m} |\Phi(re^{it})|\, dt \geqslant \lim_{r\to 1} \sum_{k\geqslant 0} \left(|b_k|\, r^k / \prod_{i=1}^{m} (k_i+1) \right) \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{r\to 1} \sum_{k=0}^{n} \left(|b_k|\, r^k / \prod_{i=1}^{m} (k_i+1) \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(|b_k| / \prod_{i=1}^{m} (k_i+1) \right), \quad n = (n_1, n_2, \ldots, n_m). \tag{5}$$

В силу неравенства [6, с. 495] $\int\limits_{T^m} |\Phi(re^{it})|\,dt \leqslant \int\limits_{T^m} |\Phi(e^{it})|\,dt$, справедливого для $\Phi(z) \in H_m^1$, имеем $2^{-m}\int\limits_{T^m} |\Phi(e^{it})|\,dt \geqslant \sum_{k=0}^{n} (|b_k|/\prod_{i=1}^{m}(k_i+1))$. Последнее соотношение справедливо при любом n, откуда и следует утверждение леммы 2.

4. Теорема. *Если функция $f(x)$ задана и непрерывна на T_+^m и ряды Фурье* (1) *функций $f_i(x)$ сходятся абсолютно, то справедливо неравенство*

$$\int\limits_{T_+^m} (|f(t)|/t_1t_2\ldots t_m)\,dt \leqslant C\sum_{j=1}^{2^m}\sum_{k\geqslant 0} |a_k(f_j)|.$$

Доказательство. Поскольку тригонометрический полином $\pi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,e^{i(k,x)_1}$ принадлежит классу H_m^1, то для него справедливо соотношение (4). Учитывая лемму 1, имеем

$$\sup_n \sum_{k=1}^{n}\Big(|f(\zeta_k)|/\prod_{i=1}^{m}(k_i+1)\Big) \leqslant C\sum_{j=1}^{2^m}\sum_{k\geqslant 0}|a_k(f_j)|. \qquad (6)$$

В левой части последнего неравенства под знаком sup стоит интегральная сумма для интеграла $\int\limits_{T_+^m} (|f(t)|/t_1t_2\ldots t_m)\,dt$. В силу непрерывности функции $f(t)$ на T_+^m из (6) следует утверждение теоремы.

Отметим, что справедливость леммы 1 может быть доказана с помощью теоремы 3.4 [8].

1. *Boas R. P.* Absolute convergence and integrability of trigonometric series // J. Rat. Mech. and Anal.— 1956.— 5, N 4.— P. 621—632.
2. *Теляковский С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1964.— 28, № 6.— С. 1209—1236.
3. *Белинский Э. С., Тригуб Р. М.* Об одном соотношении в теории рядов Фурье // Мат. заметки.— 1974.— 15, № 5.— С. 679—682.
4. *Hardy G., Littlewood J.* Some new properties of Fourier constants // Math. Ann.— 1926.— 97.— P. 159—209.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : В 2-х т.— М. : Мир, 1965.— Т. 1.— 615 с.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : В 2-х т.— М. : Мир, 1965.— Т. 2.— 537 с.
7. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной.— М. : Наука, 1973.— 350 с.
8. *Лифлянд И. Р.* Абсолютная сходимость и суммируемость кратных рядов и интегралов Фурье : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Донецк, 1982.— 15 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 05.11.85