УДК 517.948:513.77+519.4

В. А. Лискевич, Ю. А. Семенов

Самосопряженность эллиптических операторов с бесконечным числом переменных

В настоящей работе установлены теоремы о существенной самосопряженности эллиптических операторов второго порядка с переменными коэффициентами в пространстве функций бесконечного числа переменных. Для таких операторов, возмущенных потенциалами, впервые задача о существенной самосопряженности рассматривалась в работах по квантовой теории поля (см. [1]). Позднее в близкой ситуации эта проблема изучалась в работах [2—4]. Для общего эллиптического оператора второго порядка в случае гладких коэффициентов существенная самосопряженность впервые исследовалась в [3].

Здесь при условии цилиндричности коэффициентов получена теорема, позволяющая свести задачу о существенной самосопряженности оператора с бесконечным числом переменных к аналогичной задаче для оператора с конечным числом переменных. Решение последней задачи приведено в дополнении к данной работе.

1. Основные результаты. Рассмотрим последовательность комплексных гильбертовых пространств $\mathscr{H}_k = L^2(\mathbb{R}^1, d\mu_k(x_k))$, $d\mu_k(x_k) = \Phi_k^2(x_k)\,dx_k$, dx_k — мера Лебега на $\mathbb{R}^1$, $\{\Phi_k(t)\}$ — фиксированная последовательность функций, удовлетворяющих условиям

$$0 < \Phi_k \in C^1(\mathbb{R}^1), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_k^2(t)\,dt = 1. \tag{1}$$

Пусть $\mathscr{H}$ — сепарабельное подпространство полного неймановского произведения $\mathscr{H} = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{H}_k = L^2(\mathbb{R}^\infty, d\mu)$, $\mathbb{R}^\infty \ni x = (x_1, x_2, \ldots)$, $x_k \in \mathbb{R}^1$, $d\mu = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} d\mu_k$. Обозначим через $C_{\text{ц}0}^\infty(\mathbb{R}^\infty)$ линейную оболочку множества $\{\Phi_{i_1}^{-1}(x_{i_1}) \ldots \ldots \Phi_{i_n}^{-1}(x_{i_n})\, u(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) : u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ i_1, \ldots, i_n, n = 1, 2, \ldots\}$. Рассмотрим формальное дифференциальное выражение $A = 1 - \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} (\nabla_i + 2\beta_i)\, a_{ij} \nabla_j$ ($\nabla_j = \partial/\partial x_j$, $\beta_i = \nabla_i \Phi_i(x_i)/\Phi_i(x_i)$).

Будем предполагать выполненными следующие условия:

$$\begin{gathered} a_{ij} \in \operatorname{Re} L^1(\mathbb{R}^\infty, d\mu) \ \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, \\ a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \ \forall\, i, j = 1, 2, \ldots \text{ и } \mu\text{-почти всех (п. в.) } x \in \mathbb{R}^\infty, \\ \|\xi\|_{l^2}^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}(x)\, \xi_i \bar{\xi}_j \ \forall\, \xi \in l_0^2 \text{ и } \mu\text{-п. в. } x \in \mathbb{R}^\infty. \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть форма $a(x)[\xi, \eta] = \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}(x)\, \xi_i \bar{\eta}_j$, $\xi, \eta \in l_0^2$ замыкаема в l^2 для п. в. $x \in \mathbb{R}^\infty$, где l_0^2 — множество всех финитных последовательностей из l^2. Кроме того, предположим

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n) \Rightarrow (a_{ij}(x) = a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)), \ \forall\, n \in N, \\ &\text{б)} \quad \lim_{n\to\infty} \Big\| \operatorname*{ess\,sup}_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=n+1}^{\infty} \beta_i a_{ij} \beta_j \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^\infty, d\mu)} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1) — (3). *Рассмотрим в* $\mathscr{H}$ *последовательность полуторалинейных форм* $a_n[u,v] = \langle u, v\rangle + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_i u,$

$a_{ij}^{(n)}\nabla_j v\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$, $u, v \in C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty})$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — *скалярное произведение в* $\mathcal{H}$, $a_{ij}^{(n)} = a_{ij}$, *если* $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *и* 0 — *в противном случае. Форма* a_n *замыкаема. Пусть* A_n — *оператор, ассоциированный с ее замыканием. Если оператор* $A_n \restriction C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty})$ *самосопряжен в существенном* $\forall n \in N$, *то оператор* $\hat{A} \equiv 1 - \sum_{i,j=1}^{\infty} (\nabla_i + 2\beta_i) a_{ij} \nabla_j \restriction C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty})$ *также самосопряжен в существенном.*

Замечания. 1. Оператор $\hat{A}$ есть аналог эллиптического оператора с конечным числом переменных в дивергентной форме. Легко видеть, что $\langle \hat{A}u, v\rangle = \langle u, v\rangle + \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle \nabla_i u, a_{ij} \nabla_j v\rangle$, $u, v \in C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty})$. Кроме того, для $u, v \in C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty})$ в случае гладких a_{ij} справедливо равенство

$$\hat{A}u = \sum_{i,j=1}^{\infty} (D_i a_{ij} D_j - (D_i a_{ij} D_j 1))\, u, \quad D_k = i\Phi_k^{-1}(x_k)\, \nabla_k \Phi_k(x_k).$$

2. Значение теоремы 1 состоит в том, что она при условии цилиндричности коэффициентов позволяет свести задачу о существенной самосопряженности оператора с бесконечным числом переменных к той же задаче для оператора с конечным числом переменных.

Теорема 2. *Пусть* n_0 — *фиксированное натуральное число. В условиях* (1) — (3) *дополнительно предположим, что для каждого* $n \geqslant n_0$

1) $a_{ij} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ — *равномерно непрерывные функции на* $\mathbb{R}^n$ $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$ *и* $\sum_{i=1}^{n} (\nabla_i a_{ij}) \in L^{2+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$ *и* $\forall j = 1, 2, \ldots$;

2) $Q \equiv \sum_{i,j=1}^{n} (\beta_i a_{ij} \beta_j + (\nabla_i a_{ij})\, \beta_j) \in L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_n)$, $d\mu_n = \bigotimes_{k=1}^{n} d\mu_k$ *или*

2′) $Q \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *и для достаточно больших* λ *оператор* $(-\Delta_n + \lambda)^{-1/2} \times Q^{-}(-\Delta_n + \lambda)^{-1/2}$ *является ограниченным в* $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ *с нормой меньше единицы, где* $Q^{-}(x) \equiv \max\{0, -Q(x)\}$, $\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \nabla_i^2$. *Тогда* 1) $A_n \restriction C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty})$ *самосопряжен в существенном* $\forall n \geqslant n_0$; 2) $A \restriction C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty})$ *самосопряжен в существенном.*

Теорема 3. *Пусть* $0 \leqslant V \in L^2(\mathbb{R}^{\infty}, d\mu)$ *и выполнены условия теоремы 2. Тогда оператор* $(A + V) \restriction C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty})$ *самосопряжен в существенном.*

2. Построение самосопряженных операторов с бесконечным числом переменных. 1. Пусть задана последовательность комплексных гильбертовых пространств $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$, и в каждом $\mathcal{H}_k$ действует замкнутый плотно определенный оператор A_k. Пусть $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k$ — сепарабельное подпространство полного неймановского тензорного произведения пространств $\mathcal{H}_k$ (см., например, [3]). С помощью оператора A_k определим оператор $\mathcal{A}_k'$ в $\mathcal{H}$ равенствами $\mathcal{A}_k' = \underbrace{1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1}_{k-1} \otimes A_k \otimes 1 \otimes \ldots$, $\mathcal{D}(\mathcal{A}_k') =$ л. о. $\{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{k-1} \otimes \mathcal{D}(A_k) \otimes \mathcal{H}_{k+1} \otimes \ldots\}$ (л. о. — линейная оболочка множества). Очевидно, $\mathcal{A}_k'$ замыкаем с $\mathcal{D}(\mathcal{A}_k')$. Обозначим через $\mathcal{A}_k$ его замыкание. Построенное семейство операторов $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$ является коммутирующим (см. [3]).

Определение. *Вектор* $e = \bigotimes_{k=1}^{\infty} e_k \in \mathcal{H}$, *где* $\{e_k\}$ — *стабилизирующая последовательность в* $\mathcal{H}$, *назовем вектором форм-сходимости для семей-*

ства $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$, *если* $e_k \in \mathcal{D}(A_k)$ *для каждого* k *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathcal{A}_k e, \mathcal{A}_k e\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_k e_k, A_k e_k\rangle_k < \infty \qquad (4)$$

($\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ — *скалярное произведение в* $\mathcal{H}_k$).

Рассмотрим в $\mathcal{H}$ последовательность полуторалинейных форм

$$t_N[u, v] = \langle u, v\rangle + \sum_{k=1}^{N} \langle \mathcal{A}_k u, \mathcal{A}_k v\rangle, \quad \mathcal{D}(t_N) = \bigcap_{1\leqslant k\leqslant N} \mathcal{D}(\mathcal{A}_k), \quad N = 1, 2, \ldots .$$

По построению форма t_N замкнута, положительна, симметрична и, следовательно, ассоциирует положительный самосопряженный оператор T_N.

Определим форму $t[u, v] = \lim\limits_N t_N[u, v]$, $\mathcal{D}(t) = \Big\{u \in \bigcap\limits_N \mathcal{D}(t_N) :$ $: \sup\limits_N t_N[u] < \infty\Big\}$. В силу (4) форма t плотно определена и так как $1 \leqslant t_1 \leqslant$ $\leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant \ldots$, то согласно теореме о монотонной сходимости форм (см. [5]) форма t замкнута; последовательность операторов $\{T_N\}$ сходится в сильном резольвентном смысле к оператору T, ассоциированному с формой t ($T = R - \mathcal{H} - \lim\limits_N T_N$). Оператор T назовем бесконечной форм-суммой операторов 1, $\mathcal{A}_1^*\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2^*\mathcal{A}_2, \ldots$; T не зависит от выбора вектора e в силу единственности резольвентного предела.

Определение [3]. *Вектор* $e = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} e_k \in \mathcal{H}$, *где* $\{e_k\}$ — *стабилизирующая последовательность, называется вектором сильной сходимости для семейства коммутирующих самосопряженных операторов* $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$, *действующих в* $\{\mathcal{H}_k\}$, *если при каждом* $k = 1, 2, \ldots$ $e_k \in \mathcal{D}^e(B_k)$, *где* $\mathcal{D}^e(B_k)$ — *область существенной самосопряженности оператора* B_k *и сильный предел в* $\mathcal{H}$ $s - \mathcal{H} - \lim\limits_N \sum\limits_{k=1}^{N} \mathcal{B}_k e$ *существует. (Здесь* $\mathcal{B}_k =$ $= \underbrace{1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1}_{k-1} \otimes B_k \otimes 1 \otimes \ldots$.)

Пусть e — вектор сильной сходимости. Определим $\mathcal{D}_e =$ л. о. $\{f = \otimes f_k :$ $: f_k \in \mathcal{D}^e(B_k)$, $f_k = e_k$ для всех k за исключением конечного их числа$\}$. Очевидно, $\mathcal{D}_e$ — плотное подпространство в $\mathcal{H}$ и $\sum\limits_{k=1}^{N} \mathcal{B}_k$ сильно сходится на $\mathcal{D}_e$ при $N \to \infty$ Обозначим этот предел через $\mathcal{B}_e$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Оператор* $\mathcal{B}_e$ *самосопряжен в существенном на* $\mathcal{D}_e$. *Пусть* $\varphi \neq e$ — *вектор сильной сходимости. Тогда* $\tilde{\mathcal{B}_e} = \tilde{\mathcal{B}_\varphi}$ ($\sim$ — *знак замыкания*).

Доказательство см. в [4, 6].

2. Рассмотрим теперь конкретную ситуацию, следуя [2]. Пусть $\mathcal{H}_k = L^2(\mathbb{R}^1, d\mu_k)$, $d\mu_k = \Phi_k^2 dx_k$, $\mathcal{H} = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k = L^2(\mathbb{R}^{\infty}, d\mu)$, $d\mu = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} d\mu_k$ и выполнено условие (1). В качестве оператора A_k возьмем оператор $Д_k$:

$$(Д_k u)(x) = i\Phi_k^{-1}(x_k) \nabla_k (\Phi_k(x_k) u(x_k)), \quad i \equiv \sqrt{-1},$$
$$\mathcal{D}(Д_k) = \{\Phi_k^{-1}(x_k) v(x_k) : v \in W_2^1(\mathbb{R}^1, dx_k)\},$$

где $W_2^1(\mathbb{R}^1, dx_k)$ — соболевское пространство. Через D_k обозначим оператор в $\mathcal{H}$, построенный по $Д_k$ так же, как $\mathcal{A}_k$ по A_k. На веса $\{\Phi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ будем налагать условия двух типов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Д_k 1, Д_k 1\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \| \nabla_k \Phi_k(x_k) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^1, dx_k)} < \infty \qquad (5)$$

или

$$0 < \Phi_k \in W_2^2(\mathbb{R}^1, dt), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \| Д_k^2 1 \|_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \Phi_k(x_k) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^1, dx_k)} < \infty. \tag{6}$$

В условиях (5) вектор $1 = \bigotimes_{k=1}^{\infty} 1$ является вектором форм-сходимости для семейства $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $T_N = \dot{\sum_{k=1}^{N}} D_k^2$ ($\dot{\Sigma}$ — знак форм-суммы). Тогда R—$\mathscr{H}$—$\lim_N T_N$ существует и равен $T = 1 + \dot{\sum_{k=1}^{\infty}} D_k^2$.

Если же веса удовлетворяют условиям (6), то, очевидно, $1 = \bigotimes_{k=1}^{\infty} 1$ является вектором сильной сходимости для $\{Д_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, и оператор $\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 \restriction C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty})\right)^*$ совпадает с T, поскольку $(6) \Rightarrow (5)$.

Наряду с D_k^2 будем изучать операторы $\mathcal{A}_k = D_k^2 - D_k^2 1$. Для семейства $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$ вектор $1 = \bigotimes_{k=1}^{\infty} 1$, очевидно, является вектором сильной сходимости. Согласно утверждению 1 теоремы 2, доказанному в дополнении, оператор $\mathcal{A}_k = [D_k^2 - D_k^2 1 \restriction \Phi_k^{-1} C_0^{\infty}(\mathbb{R}^1)]$ самосопряжен в существенном, поэтому в силу теоремы 4 оператор $\mathrm{T} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (D_k^2 - D_k^2 1) \restriction C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty})\right]^{\sim}$ самосопряжен.

Пусть $b_k = (\nabla_k \restriction \Phi_k^{-1} C_0^{\infty}(\mathbb{R}^1))^{\sim}_{L^2(\mathbb{R}^1, d\mu_k) \to L^2(\mathbb{R}^1, d\mu_k)}$. Определим в $\mathscr{H}$ оператор $B_k' = \underbrace{1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1}_{k-1} \otimes b_k \otimes 1 \otimes \ldots$. Пусть B_k — замыкание B_k'. Рассмотрим в $\mathscr{H}$ последовательность форм $\tau_N[u, v] = \sum_{k=1}^{N} \langle B_k u, B_k v\rangle + \langle u, v\rangle$, $u, v \in \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant N} \mathscr{D}(B_k)$; τ_N — замкнутая, положительная симметрическая форма в $\mathscr{H}$, и, очевидно, $\tau_N \leqslant \tau_{N+1}$. Положим $\tau[u] = \lim_N \tau_N[u]$, $\mathscr{D}(\tau) = \left\{u \in \bigcap_N \mathscr{D}(\tau_N) : \sup_N \tau_N[u] < \infty\right\}$, $\mathscr{D}(\tau) \supset C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty})$, так что τ плотно определена, а из [5] τ замкнута. Легко проверить, что для $u, v \in C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty})$

$$\tau[u, v] = \langle \mathrm{T}\, u, v\rangle. \tag{7}$$

3. Рассмотрим формальное дифференциальное выражение

$$\hat{A} = 1 + \sum_{i,j=1}^{\infty} (D_i a_{ij} D_j - (D_i a_{ij} D_j 1))$$

и при подходящих условиях на веса и коэффициенты построим его самосопряженную реализацию Пусть выполнены условия (1), (2).

Рассмотрим в $\mathscr{H}$ форму

$$a[u, v] = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle \nabla_i u, a_{ij} \nabla_j v\rangle + \langle u, v\rangle, \mathscr{D}(\hat{a}) = C_{\text{ц}0}^{\infty}(\mathbb{R}^{\infty}). \tag{8}$$

Форма (8) корректно определена и формально $\hat{a}[u, v] = \langle \hat{A} u, v\rangle$. Теперь в пространстве l^2 определим форму $a[\xi, \eta] = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}(x) \xi_i \overline{\eta}_j$. По условию (2) она замыкаема с l_0^2. Пусть a_n — усечение формы $(a \restriction l_0^2)^{\sim}_{l^2 \to l^2}$. Ясно, что a_n — ограниченная замкнутая форма в l^2.

Определим форму $a^{(n)}$, действующую в $\mathscr{H}$, положив $a^{(n)}[u, v] = \langle 1, a_n[\nabla u, \nabla v]\rangle + \langle u, v\rangle$, $\mathscr{D}(a^{(n)}) = \mathscr{D}(\tau)$, τ — форма, построенная в п. 2., $(\nabla u)(x) = ((B_1 u)(x), (B_2 u)(x), \ldots)$. По построению формы $a^{(n)}$ очевидно неравенство $\tau[u] \leqslant a^{(n)}[u] \leqslant n\tau[u]$, $u \in \mathscr{D}(a^{(n)}) = \mathscr{D}(\tau)$, так что форма $a^{(n)}$ замкнута, кроме того, $a^{(n)} \leqslant a^{(n+1)}$. Поэтому $a[u] = \lim_n a^{(n)}[u]$, $\mathscr{D}(a) = \{u \in \mathscr{D}(\tau) : \sup_n a^{(n)}[u] < \infty\}$ — замкнутая плотно определенная форма ($\mathscr{D}(a) \supset C^{\infty}_{\text{ц}0}(\mathbb{R}^{\infty})$) и $\mathcal{A} = R - \mathscr{H} = \lim_n \mathcal{A}_n$, где $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}$ — операторы, ассоциированные с формами $a^{(n)}$, a соответственно. Ясно также, что форма a — замкнутое расширение формы $\hat{a}$. Отсюда следует замыкаемость формы $\hat{a}$.

Замечание. Оператор $\mathcal{A}$ — самосопряженная реализация формального выражения $\hat{A}$; в случае гладких весов и коэффициентов $\mathcal{A} \supset \hat{A}$.

3. Доказательство теорем. Доказательство теоремы 1. Пусть A — оператор, ассоциированный с замыканием формы $\hat{a}$ (см. п. 2. 3). Определим оператор Λ_n, положив $\Lambda_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \beta_i a_{ij} \nabla_j$, $\mathscr{D}(\Lambda_n) = C^{\infty}_{\text{ц}0}(\mathbb{R}^{\infty})$. Очевидно, $A\varphi = A_n\varphi - 2\Lambda_n\varphi$ для каждой функции $\varphi \in C^{\infty}_{\text{ц}0}(\mathbb{R}^{\infty})$ такой, что $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_l)$, $l \leqslant n$. Пусть $\psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_l)$ — фиксированная вещественная функция из $\mathscr{H} \cap$ Ц. (Ц — множество цилиндрических функций). Пусть $u = A^{-1}\psi$, так что $u = \operatorname{Re} u$. Для доказательства достаточно построить последовательность функций из $C^{\infty}_{\text{ц}0}(\mathbb{R}^{\infty})$, сильно сходящуюся к u в норме графика оператора A.

Пусть $u_n = A_n^{-1}\psi$. Отметим, что по определению оператора A_n $u_n(x) = u_n(x_1, \ldots, x_n)$ при $l \leqslant n$. Кроме того, для u_n существует последовательность функций $\{u_{n,k}\} \subset C^{\infty}_{\text{ц}0}(\mathbb{R}^{\infty})$, сильно сходящаяся к u_n в норме графика оператора A_n такая, что при каждом $k = 1, 2, \ldots$ $u_{n,k}(x) = u_{n,k}(x_1, \ldots, x_n)$. Действительно, если $\{\varphi_k\} \subset C^{\infty}_{\text{ц}0}(\mathbb{R}^{\infty})$ и $\|A_n(u_n - \varphi_k)\|_{\mathscr{H}} \to 0$, $k \to \infty$, то пользуясь теоремой Фубини—Йессена (см. [7, с. 226]), легко видеть, что тем же свойством обладает и последовательность $\{\varphi_k^{(n)}\}$, где $\varphi_k^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}^{\infty}} \varphi_k(x)\, d\mu_n^{\perp}(x)$, $d\mu_n^{\perp}(x) = \bigotimes_{k=n+1}^{\infty} d\mu_k(x_k)$. Поэтому $Au_{n,k} = A_n u_{n,k} - 2\Lambda_n u_{n,k}$ и $s - \mathscr{H} - \lim_k A_n u_{n,k} = A_n u_n \equiv \psi$.

Докажем теперь, что $s - \mathscr{H} - \lim_k \Lambda_n u_{n,k} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \beta_i a_{ij} B_j u_n \equiv \tilde{\Lambda_n} u_n$, где операторы B_j определены в п. 2. 3. Воспользуемся неравенством Коши в форме $\left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \beta_i a_{ij} B_j (u_n - u_{n,k}) \right| \leqslant \left(\sum_{i,j=n+1}^{\infty} \beta_i a_{ij} \beta_j \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} (B_i(u_n - u_{n,k})) \times a_{ij}(B_j(u_n - u_{n,k})) \right)^{1/2} \Bigg|$. Тогда

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \beta_i a_{ij} B_j (u_n - u_{n,k}) \right\|^2_{\mathscr{H}} \leqslant \left\| \left(\sum_{i,j=n+1}^{\infty} \beta_i a_{ij} \beta_j \right) \times \left(\sum_{i,j=1}^{n} (B_i(u_n - u_{n,k}))\, a_{ij}\, (B_j(u_n - u_{n,k})) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^{\infty}, d\mu)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \operatorname*{ess\,sup}_{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \sum_{i,j=n+1}^{\infty} \beta_i a_{ij} \beta_j \right\|_{L^1(\mathbb{R}^{\infty}, d\mu_n^{\perp})} \|(A_n - 1)^{1/2}(u_n - u_{n,k})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_n)} =$$

$$= \varepsilon(n) \|(A_n - 1)^{1/2}(u_n - u_{n,k})\|^2_{\mathscr{H}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Таким образом, $s - \mathscr{H} - \lim_k Au_{n,k} = \psi - 2\Lambda_n^{\sim} u_n$. Ввиду замкнутости оператора A $u_n \in \mathscr{D}(A)$ и $Au_n = \psi - 2\Lambda_n^{\sim} u_n$. Поскольку $\| \Lambda_n^{\sim} u_n \|_{\mathscr{H}} \leqslant \sqrt{\varepsilon(n)} \| \psi \|_{\mathscr{H}}$ и согласно (3б) $\lim_n \varepsilon(n) = 0$, то $s - \mathscr{H} - \lim_n Au_n = \psi \equiv Au$, т. е. $C_{\text{ц}0}^\infty(\mathbb{R}^\infty)$ — ядро оператора A.

Доказательство теоремы 2. Утверждение 1 доказано в дополнении, утверждение 2 следует теперь из теоремы 1.

Доказательство теоремы 3. Определим оператор V_n, положив $V_n(x) = \int_{\mathbb{R}^\infty} V(x)\, d\mu_n^{\perp}(x)$. Определим далее операторы $C_n = [(A_n + V_n) \upharpoonright C_{\text{ц}0}^\infty(\mathbb{R}^\infty)]^*$, $C = A + V$ (форм-сумма). Отметим, что $C_n = C_n^*$. Кроме того, если $\psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_l)$, $\psi \in L^\infty \cap \text{Ц}$ и $u_n = C_n^{-1}\psi$, то для u_n существует последовательность $\{u_{n,k}\} \subset C_{\text{ц}0}^\infty(\mathbb{R}^\infty)$ такая, что а) $u_{n,k}(x) = u_{n,k}(x_1, \ldots, x_n)$ $\forall\, k = 1, 2, \ldots$; б) $u_{n,k} \to u_n$, $k \to \infty$, сильно в норме графика оператора C_n; в) $\sup_{n,k} \| u_{n,k} \|_\infty \leqslant \sup_n \| u_n \|_\infty \leqslant \| \psi \|_\infty$; г) если $\psi = \operatorname{Re}\psi$, то $u_n = \operatorname{Re} u_n$, $u_{n,k} = \operatorname{Re} u_{n,k}$ (см. дополнение).

Будем считать, что $\psi = \operatorname{Re}\psi$. Пусть $u = C^{-1}\psi$. Очевидно, $Cu_{n,k} = C_n u_{n,k} - 2\Lambda_n u_{n,k} + (V - V_n) u_{n,k}$, $s - \mathscr{H} - \lim_k C_n u_{n,k} = C_n u_n \equiv \psi$, $s - \mathscr{H} - \lim_k (V - V_n) \times u_{n,k} = (V - V_n) u_n$ (так как $\| u_{n,k} \|_\infty \leqslant \| \psi \|_\infty$) и поскольку $A_n \leqslant C_n$, то (см. доказательство теоремы 1) $\Lambda_n^{\sim} u_n = s - \mathscr{H} - \lim_k \Lambda_n u_{n,k}$. Следовательно, $u_n \in \mathscr{D}(C)$, $Cu_n = \psi - 2\Lambda_n^{\sim} u_n + (V - V_n) u_n$. Так как $\lim_n \| \Lambda_n^{\sim} u_n \| = 0$, $\| (V - V_n) u_n \|_{\mathscr{H}} \leqslant \| V - V_n \|_{\mathscr{H}} \| \psi \|_\infty \to 0$, $n \to \infty$, то $u_n \to u$ сильно в норме графика оператора C.

Дополнение. Пусть $n \geqslant 1$ и $\mathbb{R}^n \ni x \to a_{ij}(x) \in \mathbb{R}^1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Пусть матрица $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ удовлетворяет условиям

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \quad \forall\, (\xi) \in \mathbb{R}^n. \tag{1A}$$

Относительно $\Phi(x)$ будем предполагать

$$0 < \Phi \in W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n),\ \Phi^{-1}\vec{\nabla}\Phi,\ \Phi^{-1}\Delta\Phi \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n),\ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi^2(x)\, dx = 1. \tag{2A}$$

Теорема А. *Пусть выполнены условия* (1А), (2А) *а также условия* 1 *и* 2 *или* 1 *и* 2′ *теоремы* 2 *с* $d\mu_n(x) = \Phi^2(x)\, dx$. *Определим операторы* $T = 1 - \sum_{i,j=1}^n \nabla_i a_{ij} \nabla_j$, $\mathscr{L} = T + Q$ в $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, $\mathscr{D}(\mathscr{L}) = \mathscr{D}(T) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Тогда оператор* $\mathscr{L}$ *самосопряжен в существенном.*

Доказательство. Докажем вначале теорему для более простой ситуации: $T = -\Delta$, $Q = V \equiv \Phi^{-1}\Delta\Phi$. В пространстве $\mathscr{H}_\Phi = L^2(\mathbb{R}^n, \Phi^2 dx)$ определим оператор $\hat{H}$: $\hat{H}u = (-\Phi^{-1}\Delta\Phi + V)u$, $\mathscr{D}(\hat{H}) = \Phi^{-1}C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Интегрированием по частям убеждаемся, что

$$\langle \hat{H}u, u \rangle_{\mathscr{H}_\Phi} = \| \vec{\nabla} u \|_{\mathscr{H}_\Phi}^2, \quad u \in \mathscr{D}(\hat{H}). \tag{3A}$$

Пусть H_F — расширение по Фридрихсу оператора $\hat{H}$; в силу (3А) оно существует. Покажем, что полугруппа $(\exp(-sH_F),\ s > 0)$ сохраняет положительность. Пусть V_k^- — усечение V^-. Поскольку $V^+ - V_k^- \geqslant -$ Λ $V^+ - V_k^- \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$, то оператор $[-\Delta + V^+ - V_k^- \upharpoonright C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^*$ и его унитарный образ $H_k = [-\Phi^{-1}\Delta\Phi + V^+ - V_k^- \upharpoonright \Phi^{-1} C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^*$ самосопряжены. Пусть

t_k, t_F — формы, соответствующие операторам H_k, H_F:

$$t_k[u, v] = \langle H_k^{1/2} u, H_k^{1/2} v\rangle_{\mathscr{H}_\Phi}, \mathscr{D}(t_k) = \mathscr{D}(H_k^{1/2}) = E = \mathscr{D}(([-\Phi^{-1}\Delta\Phi + V^+ \restriction \Phi^{-1}C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^*)^{1/2}), t_F[u, v] = \langle H_F^{1/2} u, H_F^{1/2} v\rangle_{\mathscr{H}_\Phi}, \mathscr{D}(t_F) = \mathscr{D}(H_F^{1/2}).$$

Из замкнутости формы t_F легко видеть, что $\mathscr{D}(t_k) \subset \mathscr{D}(t_F)$. По построению $0 \leqslant H_{k+1} \leqslant H_k$ и форма t, определяемая равенством $t[u] = \lim_k t_k[u]$, $\mathscr{D}(t) = \bigcup_k \mathscr{D}(t_k) = \mathscr{E}$ замыкаема, и ее замыкание совпадает с t_F, так как $t_F \supset t$. Следовательно, по монотонной теореме (см. [8], гл. VIII) $R - \mathscr{H}_\Phi - \lim_k H_k = H_F$. Отсюда следует, что полугруппа $(\exp(-sH_F), s > 0)$ сохраняет положительность.

Покажем теперь, что $1 \in \mathscr{D}(H_F)$ и $H_F 1 = 0$. При условии (2) это очевидно. Пусть выполнено (2′). Тогда корректно определена форм-сумма $H_0 \dot{+} V$ и $H = H_F$ [9], где $H = \Phi^{-1}(H_0 \dot{+} V)\Phi$, $H_0 = [-\Delta \restriction C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^\sim$. С другой стороны, $H_0 \dot{+} V$ совпадает с оператором $\vec{S}^* \vec{S}$, где $\vec{S} = \left[\left(\vec{\nabla} - \frac{\vec{\nabla}\Phi}{\Phi}\right) \restriction C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\right]^\sim$, что очевидно, поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — ядро для $(H_0 \dot{+} V)^{1/2}$ (см. [9]), а формы $\langle \vec{S}u, \vec{S}v\rangle$ и $\langle (H_0 + V)^{1/2} u, (H_0 + V)^{1/2} v\rangle$ совпадают на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отсюда следуют оценки

$$\| \vec{S}(1 + H_0 \dot{+} V)^{-1/2} \|_{\mathscr{L}(L^2)} \leqslant 1, \ \| \vec{\nabla}(1 + H_0 \dot{+} V)^{-1/2} \|_{\mathscr{L}(L^2)} = a < \infty$$

($\mathscr{L}(L^2)$ — норма в пространстве ограниченных в L^2 операторов), которых вполне достаточно, чтобы заключить, что $1 \in \mathscr{D}(H_F)$, $H_F 1 = 0$.

Таким образом, $(\exp(-sH_F), s > 0) - L^p(\mathbb{R}^n, \Phi^2 dx)$ — сжимающая полугруппа при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Пусть выполнено условие (2). Определим $\mathscr{D} = (1 + H_F)^{-1} L^\infty$. Так как $\| V \|_{\mathscr{H}_\Phi} = \| \Delta\Phi \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$, то $\mathscr{D} \subset L^\infty \subset \mathscr{D}(V_\Phi)$ и, очевидно, $\mathscr{D}$ — ядро H_F. Покажем, что $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}(D^2)$, где $D^2 = \Phi^{-1}H_0\Phi$. Пусть $u \in \mathscr{D}$, $v \in \Phi^{-1}C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда $t_F[u, v] = \langle H_F u, v\rangle_{\mathscr{H}_\Phi} = \langle u, D^2 v\rangle_{\mathscr{H}_\Phi} + \langle Vu, v\rangle_{\mathscr{H}_\Phi}$, или $\langle (H_F - V)u, v\rangle_{\mathscr{H}_\Phi} = \langle u, D^2 v\rangle_{\mathscr{H}_\Phi}$. Отсюда $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}([D^2 \restriction \Phi^{-1}C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^*) = \mathscr{D}(D^2)$ и $H_F u = D^2 u + Vu$, $u \in \mathscr{D}$. Таким образом, операторная сумма $D^2 + V$ в существенном самосопряжена на $\mathscr{D}$. Ясно также, что $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}(H^+)$, $H^+ = [D^2 + V^+ \restriction \Phi^{-1} C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^*$.

Покажем теперь, что операторная сумма $D^2 + V$ существенно самосопряжена на $\mathscr{D}_+ = \bigcup_{t>0} \exp(-tH^+)\mathscr{D}$. Ввиду сохранения положительности $e^{-tH^+}|f| \leqslant e^{-tH_F}|f|$, $t > 0$, поточечно для μ_n п. в. $x \in \mathbb{R}^n$, так что $\mathscr{D}_+ \subset \mathscr{D}(V_\Phi)$. Легко видеть, что $\mathscr{D}_+ \subset \mathscr{D}(D^2)$ и $D^2 u = H^+ u - V^+ u$, $u \in \mathscr{D}_+$.

Итак, $\mathscr{D}_+ \subset \mathscr{D}(D^2) \cap \mathscr{D}(V_\Phi) \subset \mathscr{D}(H_F)$ и $H_F u = H^+ u - V^- u = D^2 u + Vu$, $u \in \mathscr{D}_+$. Пусть $u_t = \exp(-tH^+) f$, $f \in \mathscr{D}$. Очевидно при $t \downarrow 0$ $H_F u_t = e^{-tH^+} H^+ f - V^- e^{-tH^+} f$ сильно сходится к $H_F f$, т. е. $\mathscr{D}_+$ — ядро для H_F.

Из соображений унитарности операторная сумма $H_0 + V$ в существенном самосопряжена на $\Phi\mathscr{D}_+ \subset \mathscr{D}(H_0) \cap \mathscr{D}(V)$. Более того, $\Phi\mathscr{D}_+ \subset L^\infty$, поскольку при любом $t > 0$

$$\Phi e^{-tH^+}\mathscr{D} = e^{-t(H_0 + V^+)^\sim}\Phi\mathscr{D} \subset e^{-t(H_0 + V^+)^\sim} L^2 \subset L^\infty.$$

Самосопряженность оператора $[-\Delta + V \restriction C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^*$ теперь очевидна.

Пусть теперь выполнено условие 2′. Тогда $H_F = H$, где $H = \Phi^{-1}(H_0 \dot{+} V)\Phi$. Известно (см., например, [9]), что если $\mathscr{E}$ — некоторое ядро форм-суммы $H_0 \dot{+} V$, то $\{\omega u : u \in \mathscr{E}, \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ — также ее ядро. Поэтому из соображений унитарности множество $\mathscr{D}_0 = \{\omega u : u = (1+H)^{-1}\mathscr{H}_\Phi,\ \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ есть ядро оператора H и, следовательно, $\mathscr{D} = \{\omega u : u = (1+H)^{-1}L^\infty(\mathbb{R}^n, \Phi^2 dx),\ \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ — также ядро оператора H. Теперь остается дословно повторить рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы в предположении (2).

Доказательство общего результата полностью повторяет описанную схему. Отметим лишь следующие моменты. Условие (1) обеспечивает существенную самосопряженность оператора T (см. [10]). Вложение $e^{-tT}L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ для любого $t > 0$ в случае ограниченных a_{ij} хорошо известно. Переход от ядра $\Phi\mathscr{D}_+$ к ядру $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ возможен благодаря вложению $\Phi\mathscr{D}_+ \subset \mathscr{D}(T) \cap L^\infty$ и следующему обстоятельству: если $u \in \mathscr{D}(T) \cap L^\infty$, то существует последовательность $\{u_k\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, сильно сходящаяся к u в норме графика оператора T такая, что $\sup_k \|u_k\|_\infty < \infty$ (см. [10]).

Утверждение 1 теоремы 2 следует теперь из теоремы A и унитарной эквивалентности операторов $\mathscr{L}$ и A_n', где $A_n' = \Phi_1^{-1} \ldots \Phi_n^{-1}\mathscr{L}^*\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, так что $A_n = (A_n' \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots)^\sim$.

1. *Саймон Б*. Модель $P(\varphi)_2$-эвклидовой квантовой теории поля.— М. : Мир, 1976.— 360 с.
2. *Березанский Ю. М*. Самосопряженность эллиптических операторов с бесконечным числом переменных // Укр. мат. журн.— 1975.— 27, № 6.— С. 729—742.
3. *Березанский Ю. М*. Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
4. *Перельмутер М. А*., *Семенов Ю. А*. Самосопряженность эллиптических операторов с конечным и бесконечным числом переменных // Функцион. анализ и его прил.— 1980.— **14**, № 1.— С. 81—82.
5. *Simon B*. A canonical decomposition for quadratic forms with applications to monotone theorems // J. Funct. Anal.— 1978.— 28, N 3.— P. 377—385.
6. *Reed M*. On self-adjointness in infinite tensor product spaces // Ibid.— 1970.— **5**, N 1.— P. 94—124.
7. *Данфорд Н*., *Шварц Дж. Т*. Линейные операторы. Общая теория.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 895 с.
8. *Като Т*. Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
9. *Коваленко В. Ф*., *Семенов Ю. А*. Некоторые вопросы разложения по обобщенным собственным функциям оператора Шредингера с сильно сингулярными потенциалами // Успехи мат. наук.— 1978.— 33, № 4.— С. 107—140.
10. *Семенов Ю. А*. Гладкость обобщенных решений уравнения $(\lambda - \sum_{ij} \nabla_i a_{ij} \nabla_j) u = f$ с непрерывными коэффициентами // Мат. сб.— 1982.— **118**, № 3.— С. 399—410.

Киев. политехн. ин-т

Получено 27.05.85,
после доработки — 16.10.85