УДК 512.544

Л. А. Курдаченко

Двуступенно нильпотенные FC-группы

В теории FC-групп двуступенно нильпотентные группы занимают особое место, о чем свидетельствуют многие результаты этой теории. Приведем некоторые из них. Ю. М. Горчаков показал, что фактор-группа FC-группы по второму гиперцентру вкладывается в прямое произведение конечных групп (см. [1], следствие II.3.8). Далее, всякая FC-группа включает в себя равномощную двуступенно нильпотентную подгруппу (Т Я. Семенова, см. [1], теорема III.1.8). В связи с этим отметим, что в работе [2] был построен пример экстраспециальной группы мощности $\aleph_{\beta+1}$, всякая абелева подгруппа которой имеет мощность, не превышающую $\aleph_\beta$. Наконец, Ю. М. Горчаков показал [3], что всякая локально нормальная группа G представима в виде $G = A \cdot B$, где A, $B \lhd G$, $A \in \mathfrak{N}_2$, $B \in QSD\mathfrak{F}$.

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы теории двуступенно нильпотентных FC-групп. Из полученных в работе результатов вытекают решения некоторых вопросов, отмеченных в книге М. Томкинсона [4].

Как и в книгах [1, 4] удобно пользоваться символикой Ф. Холла. Обозначим через $\mathfrak{F}$ класс конечных групп, через $\mathfrak{A}$ — класс абелевых групп, $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ — класс групп с конечным коммутантом, $\mathfrak{N}_2$ — класс нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше 2. Если $\mathfrak{X}$ — класс групп, $S\mathfrak{X}$ обозначает класс всех подгрупп $\mathfrak{X}$-групп, $Q\mathfrak{X}$ — класс всех фактор-групп $\mathfrak{X}$-групп, $D\mathfrak{X}$ — класс всех прямых произведений $\mathfrak{X}$-групп. Класс $\mathfrak{D}$ назовем прямым многообразием, если он замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений (см. [1], гл. 1, § 4). Если $\mathfrak{X}$ — класс групп, то прямое многообразие, порожденное классом $\mathfrak{X}$, совпадает с $QSD\mathfrak{X}$ (см. [1], лемма I.4.2). Если G — группа, то обозначим через $\zeta(G)$ ее центр. Пусть $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — семейство групп. Через $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ обозначим декартово произведение групп этого семейства, через $\mathop{\mathrm{X}}\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ — их прямое произведение. Положим $\mathop{\mathrm{Zr}}\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = \mathop{\mathrm{X}}\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \cdot \zeta\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right)$. Эту группу будем называть центральным прямым произведением групп G_λ. Понятие центрального прямого произведения ввел Ю. М. Горчаков [5]. И наконец, если группа G порождается подгруппами G_λ, $\lambda \in \Lambda$, $[G_\mu, G_\lambda] = \langle 1 \rangle$ при $\lambda \neq \mu$, то будем говорить, что G — центральное произведение подгрупп G_λ.

Лемма 1. *Пусть G — конечно порожденная FC-группа. Тогда* 1) $G/\zeta(G)$ *конечна*; 2) $[G, G]$ *конечен, в частности периодическая часть G конечна.*

Это утверждение содержится в следствии 1.5, теореме 1.2 и теореме 1.6 работы [4].

Лемма 2. *Пусть G—FC-группа, $K \geqslant [G, G]$ и в K существует семейство подгрупп $\{K_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ со следующими свойствами:* 1) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda = \langle 1 \rangle$; 2) $K_\lambda \lhd G$ *при любом* $\lambda \in \Lambda$; 3) *каждый элемент K не содержится только в конечном множестве подгрупп K_λ. Тогда $G \leqslant \mathop{\mathrm{Zr}}\limits_{\lambda\in\Lambda} G/K_\lambda$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi: G \to \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} G/K_\lambda$, ставящее в соответствие элементу $g \in G$ набор $(gK_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Так как $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda = \langle 1 \rangle$, то φ — вложение (теорема Рэмака, см., например, [1], теорема I.1.2). Пусть $x \in G$, $F = \langle x \rangle^G$. Подгруппа F конечно порождена и ввиду леммы 1 периодическая часть F конечна. Так как коммутант FC-группы периодический (см., например, [1], следствие II.1.5), то пересечение $L = F \cap [G, G]$ конечно. Из условия 3 получаем существование такого конечного подмножества индексов Λ_F, что $L \leqslant K_\lambda$ для $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_F$. В фактор-группе G/K_λ, $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_F$, подгруппа FK_λ/K_λ уже имеет единичное пересечение с коммутантом, а потому $FK_\lambda/K_\lambda \leqslant \zeta(G/K_\lambda)$. В частности, $xK_\lambda \in \zeta(G/K_\lambda)$ для $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_F$. Это означает, что $\varphi(G) \leqslant \mathop{\mathrm{Zr}}\limits_{\lambda\in\Lambda} G/K_\lambda$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть G — FC-группа, $G \in \mathfrak{N}_2$. Тогда $G \leqslant \mathop{\mathrm{Zr}}\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, где $G_\lambda \in \mathfrak{N}_2$ и $[G_\lambda, G_\lambda]$—циклическая или квазициклическая подгруппа, $\lambda \in \Lambda$.*

Доказательство. Пусть $K = [G, G]$. Тогда $K \leqslant \zeta(G)$. Подгруппа K абелева и периодическая, а потому $K \leqslant \mathop{\mathrm{X}}\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, где A_λ — квазициклическая группа, $\lambda \in \Lambda$ (см., например, [6], теоремы 24.1 и 23.1). Положим $K_\lambda = K \cap \mathop{\mathrm{X}}\limits_{\nu\neq\lambda} A_\nu$. Тогда K/K_λ изоморфна подгруппе A_λ, в частности K/K_λ — циклическая или квазициклическая группа, $\lambda \in \Lambda$. Далее, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \leqslant \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} (\mathop{\mathrm{X}}\limits_{\nu\neq\lambda} A_\nu) = \langle 1 \rangle$. Так как $K \leqslant \zeta(G)$, то $K_\lambda \lhd G$ при любом $\lambda \in \Lambda$. Пусть $x \in K$, $x = (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $\Lambda_x = \operatorname{supp} x$, т. е. $a_\lambda \neq 1$ для $\lambda \in \Lambda_x$ и $a_\nu = 1$ для $\nu \notin \Lambda_x$. Множество Λ_x конечно. Если $\nu \notin \Lambda_x$, то $x \in \mathop{\mathrm{X}}\limits_{\mu\neq\nu} A_\mu$, т. е. $x \in K_\nu$ для любого $\nu \in \Lambda \setminus \Lambda_x$. Следовательно, семейство $\{k_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ удовлетворяет всем условиям леммы 2, а потому $G \leqslant \mathop{\mathrm{Zr}}\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, где $G_\lambda = G/K_\lambda$. Следствие доказано.

Лемма 3. *Пусть $G \in \mathfrak{N}_2$, $K = [G, G]$ — циклическая p-подгруппа. Тогда $G \leqslant H$, где H — FC-группа, $H \in \mathfrak{N}_2$ и $[H, H]$ — квазициклическая p-подгруппа.*

Доказательство. Обозначим через F_n группу $(\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) \rtimes \langle c_n \rangle$, где $|a_n| = |b_n| = |c_n| = p^n$, $[a_n, c_n] = 1$, $[b_n, c_n] = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, и положим $F = \mathop{\mathrm{X}}\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Ясно, что F — FC-группа, $\zeta(F) = \mathop{\mathrm{X}}\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle a_n \rangle$. Пусть $L =$

$= \text{гр}\,(a_n a_{n+1}^{-p} \mid n \in \mathbb{N})$. Ясно, что $L \leqslant \zeta(F)$ и $\zeta(F)/L$ — квазициклическая. Поэтому $B = F/L$ имеет квазициклический коммутант $D = \text{гр}\,(d_n \mid d_1^p = 1,\ d_{n+1}^p = d_n,\ n \in \mathbb{N})$.

Пусть $K \langle y \rangle$, где $|y| = p^n$. Рассмотрим группу $G \times B$ и в ней подгруппу $U = \langle y d_n^{-1} \rangle$. Ясно, что $G \times B$ — FC-группа, $G \times B \in \mathfrak{N}_2$ и $U \leqslant \zeta\,(G \times B)$. Положим $H = (G \times B)/U$. Имеем $K \times D = U \times D$, так что $[H, H] \leqslant K \times D/U = U \times D/U \cong D$. Но $B \cap U = \langle 1 \rangle$, поэтому H включает в себя подгруппу $BU/U \cong B/B \cap U \cong B$, коммутант которой квазициклический. Отсюда следует, что $[H, H]$ — квазициклическая. Наконец, $G \cap U = \langle 1 \rangle$, поэтому H включает в себя $GU/U \cong G$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Класс нильпотентных FC-групп ступени нильпотентности не больше 2, порождается, как прямое многообразие, классом FC-групп с квазициклическими коммутантами.*

Доказательство. Пусть G — FC-группа, $G \in \mathfrak{N}_2$, $K = [G, G]$. Из следствия леммы 2 вытекает вложение $G \leqslant \underset{\lambda \in \Lambda}{\mathrm{Zr}}\, G_\lambda$, где $[G_\lambda, G_\lambda]$ — циклическая или квазициклическая подгруппа, G_λ — FC-группа и $G_\lambda \in \mathfrak{N}_2$, $\lambda \in \Lambda$. Если $[G_\lambda, G_\lambda]$ — циклическая, то, не ограничивая общности, можно считать, что она примарна. Из леммы 3 следует вложение $G_\lambda \leqslant L_\lambda$, где L_λ — FC-группа с квазициклическим коммутантом. Если же подгруппа $[G_\lambda, G_\lambda]$ квазициклическая, то полагаем $L_\lambda = G_\lambda$. Итак, $G \leqslant \underset{\lambda \in \Lambda}{\mathrm{X}}\, L_\lambda \cdot \zeta\Big(\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda\Big) = L$. Пусть $\psi\colon \underset{\lambda \in \Lambda}{\mathrm{X}}\, L_\lambda \times \zeta\Big(\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda\Big) \to L$ — отображение, для которого $(x, y)\,\psi = x \cdot y$, где $x \in \underset{\lambda \in \Lambda}{\mathrm{X}}\, L_\lambda$, $y \in \zeta\Big(\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda\Big)$. Очевидно, ψ — эпиморфизм. Поскольку $\zeta\Big(\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda\Big)$ — абелева группа, то $\underset{\lambda \in \Lambda}{\mathrm{X}}\, L_\lambda \times \zeta\,(\Pi L_\lambda)$, а значит, и ее гомоморфный образ L принадлежит прямому многообразию, порожденному FC-группами с квазициклическими коммутантами.

Наоборот, во всякой FC-группе центр включает в себя любую делимую подгруппу (см., например, [4], теорема 1.9), так что если G—FC-группа с квазициклическим коммутантом, то $G \in \mathfrak{N}_2$. Поэтому $\mathfrak{N}_2$ включает в себя прямое многообразие, порожденное классом FC-групп с квазициклическими коммутантами. Теорема доказана.

Лемма 4. *Если $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{A}$, то порядки элементов $G/\zeta\,(G)$ ограничены в совокупности.*

Доказательство. Пусть $F = [G, G]$. Рассмотрим сначала случай, когда $F \leqslant \zeta\,(G)$. Для любого $g \in G$ отображение $x \to [g, x]$, $x \in G$, будет эндоморфизмом, ядро которого совпадает с $C_G\,(g)$. Отсюда следует, что $|G/C_G\,(g)| \leqslant |F|$, и из вложения $G/\zeta\,(G) \leqslant \prod\limits_{g \in G} G/C_G\,(g)$ вытекает конечность периода $G/\zeta\,(G)$.

Рассмотрим теперь общий случай. Положим $H = C_G\,(F)$. Индекс $|G : H|$ конечен и $H \in \mathfrak{N}_2$. Из доказанного выше получаем, что $H/\zeta\,(H)$ имеет конечный период. Из конечности индекса $|G : H|$ следует конечность индекса $|G : G_G\,(\zeta\,(H))|$, и из леммы 3.10 работы [7] получаем конечность индекса $|\zeta\,(H) : \zeta\,(H) \cap \zeta\,(G)|$. Итак, G/H и $\zeta\,(H)/\zeta\,(H) \cap \zeta\,(G)$ конечны, а $H/\zeta\,(H)$ имеет конечный период, т. е. и $G/\zeta\,(H) \cap \zeta\,(G)$, а с ней и $G/\zeta\,(G)$, имеют конечный период. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $G \in QSD\,(\mathfrak{F}\mathfrak{A})$, причем $[G, G] = \zeta\,(G)$ — квазициклическая p-подгруппа. Тогда $G/\zeta\,(G) \in SD\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Так как $G \in QSD\,(\mathfrak{F}\mathfrak{A})$, то $G \cong H/K$, где $K \lhd H$, $H \leqslant \underset{\lambda \in \Lambda}{\mathrm{X}}\, H_\lambda$, $[H_\lambda, H_\lambda]$ конечен, причем можно считать, что $\mathrm{pr}_\lambda H = H_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.

Пусть $[G, G] = R/K$, $L_\mu = \underset{\lambda \neq \mu}{\mathrm{X}}\, H_\lambda$, $M_\mu = H \cap L_\mu$. Из условия $H_\lambda = pr_\lambda H$ получаем изоморфизм $H_\lambda \cong H/M_\tau$. В частности, $H/M_\lambda \in \mathfrak{F}\mathfrak{A}$, т. е. и $H/M_\lambda K \in \mathfrak{F}\mathfrak{A}$. Но H/K — группа с квазициклическим коммутантом, так что $H/M_\lambda K$ абелева, т. е. $RM_\lambda \leqslant KM_\lambda$, а значит, $R \leqslant \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} KM_\lambda$.

Положим $Z_\lambda/M_\lambda=\zeta(H/M_\lambda)$, $K_\lambda=pr_\lambda K$, $C_\lambda=\zeta(H_\lambda)$, $K_1=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda K$. Если $x=(h_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in K_1$, то, поскольку $Z_\lambda K/M_\lambda\cong K_\lambda C_\lambda$, имеем $h_\lambda=y_\lambda z_\lambda$, $y_\lambda\in K_\lambda$, $z_\lambda\in C_\lambda$, т. е. $K_1\leqslant H\cap \underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} K_\lambda C_\lambda$. Очевидно, имеет место и обратное включение, следовательно, $K_1=H\cap\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} K_\lambda C_\lambda$.

Обозначим через U нормальную подгруппу, порожденную K в $\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} H_\lambda$ и пусть $U_1=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} UC_\lambda L_\lambda$. Если $g\in\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} H_\lambda$, то $g=g_{\lambda_1}\dots g_{\lambda_k}$, где $g_{\lambda_i}\in H_{\lambda_i}$, $1\leqslant i\leqslant k$. Для любого $u\in U_1$ имеем равенства $[u,g]=[u,g_{\lambda_1}\dots g_{\lambda_k}]=[u,g_{\lambda_1}]\dots[u,g_{\lambda_k}]$. Далее, $u=u_1c_{\lambda_1}v_{\lambda_1}=\dots=u_kc_{\lambda_k}v_{\lambda_k}$, где $u_i\in U$, $c_{\lambda_i}\in C_{\lambda_i}$, $v_{\lambda_i}\in L_{\lambda_i}$, в частности $[c_{\lambda_i},g_{\lambda_i}]=[v_{\lambda_i},g_{\lambda_i}]=1$, $1\leqslant i\leqslant k$. Тогда

$$[u,g]=[u_1c_{\lambda_1}v_{\lambda_1},g_{\lambda_1}]\dots[u_kc_{\lambda_k}v_{\lambda_k},g_{\lambda_k}]=v_{\lambda_1}^{-1}[u_1,g_{\lambda_1}]v_{\lambda_1}\dots v_{\lambda_k}^{-1}[u_k,g_{\lambda_k}]v_{\lambda_k}\in U.$$

Итак, $[\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} H_\lambda,U_1]\leqslant U$.

Пусть теперь $h\in H$, $a\in K_1\leqslant U_1$. Тогда, с одной стороны, $[h,a]\in H$, с другой, — $[h,a]\in U$, т. е. $[h,a]\leqslant U\cap H=K$. Это и означает, что $K_1/K\leqslant\zeta(H/K)$. Но $\zeta(H/K)=R/K$, а как отмечалось выше, $R\leqslant\bigcap_{\lambda\in\Lambda}KM_\lambda\leqslant\bigcap_{\lambda\in\Lambda}KZ_\lambda=K_1$, т. е. $R/K=K_1/K$.

Рассмотрим фактор-группу $\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} H_\lambda/\underset{\tau\in\Lambda}{\mathrm{X}} C_\lambda K_\lambda\cong\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} H_\lambda/C_\lambda K_\lambda$. Из леммы 4 следует, что H_λ/C_λ имеет конечный период. Из включения $RM_\lambda\leqslant KM_\lambda$ следует, что H/KM_λ абелева, а так как $KM_\lambda\leqslant KZ_\lambda$, то $H/Z_\lambda K$ абелева. Но $H/Z_\lambda K\cong H_\lambda/C_\lambda K_\lambda$, т. е. $H_\lambda/C_\lambda K_\lambda$ — абелева группа конечного периода. Из первой теоремы Прюфера (см., например, [6], теорема 17.2) следует, что $H_\lambda/C_\lambda K_\lambda\in SD\mathfrak{F}$, а потому $\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} H_\lambda/\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} C_\lambda K_\lambda\in SD\mathfrak{F}$. Далее $H/K_1=H/H\cap\cap\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} C_\lambda K_\lambda=H(\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} C_\lambda K_\lambda)/\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} C_\lambda K_\lambda\leqslant\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} H_\lambda/\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} C_\lambda K_\lambda\in SD\mathfrak{F}$. Но $H/K_1=(H/K)/(K_1/K)=(H/K)/(R/K)=G/\zeta(G)$. Следовательно, $G/\zeta(G)\in SD\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $G\in\mathfrak{N}_2\cap QSD(\mathfrak{F}\mathfrak{A})$. *Тогда* $G/\zeta(G)\in SD\mathfrak{F}$.

Доказательство. Из следствия леммы 2 получаем вложение $G\leqslant\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Zr}}\, G_\lambda$, где $G_\lambda\in\mathfrak{N}_2$ и $[G_\lambda,G_\lambda]$ — циклическая или квазициклическая подгруппа. Можно считать, что $pr_\lambda G=G_\lambda$. Тогда $\zeta(G)\leqslant\zeta(\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Zr}}\, G_\lambda)=\zeta\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\right)$.

Если $[G_\lambda,G_\lambda]$ — квазициклическая подгруппа и $\zeta(G_\lambda)=[G_\lambda,G_\lambda]$, то $\zeta(G_\lambda)=[G_\lambda,G_\lambda]\times Z_\lambda$ (см., например, [6], теорема 21.2). Поэтому $G_\lambda\leqslant A_\lambda\times B_\lambda$, где $A_\lambda=G_\lambda/[G_\lambda,G_\lambda]$ — абелева группа, $B_\lambda=G_\lambda/Z_\lambda$ и $[B_\lambda,B_\lambda]=\zeta(B_\lambda)$ — квазициклическая. Из равенства $G_\lambda=pr_\lambda G$ следует, что G_λ — гомоморфный образ G, а значит, B_λ — гомоморфный образ G. Поэтому $B_\lambda\in QSD(\mathfrak{F}\mathfrak{U})$, и из леммы 5 получаем соотношение $B_\lambda/\zeta(B_\lambda)\in SD\mathfrak{F}$. Далее, $\zeta(G_\lambda)=G_\lambda\cap\cap(A_\lambda\times\zeta(B_\lambda))$, так что $G_\lambda/\zeta(G_\lambda)=G_\lambda/G_\lambda\cap(A_\lambda\times\zeta(B_\lambda))\cong G_\lambda(A_\lambda\times\zeta(B_\lambda))/(A_\lambda\times\zeta(B_\lambda))\leqslant(A_\lambda\times B_\lambda)/(A_\lambda\times\zeta(B_\lambda))\cong B_\lambda/\zeta(B_\lambda)$, т. е. $G_\lambda/\zeta(G_\lambda)\in SD\mathfrak{F}$.

Если же $[G_\lambda,G_\lambda]$ конечен, то из леммы 4 и первой теоремы Прюфера получаем соотношение $G_\lambda/\zeta(G_\lambda)\in SD\mathfrak{F}$.

Включение $\zeta(G)\leqslant\zeta(\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Zr}}\, G_\lambda)$ влечет за собой равенство $\zeta(G)=G\cap\cap\zeta(\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Zr}}\, G_\lambda)$. Поэтому

$$G/\zeta(G)=G/G\cap\zeta(\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Zr}}\, G_\lambda)\cong G\cdot\zeta(\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Zr}}\, G_\lambda)/\zeta(\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Zr}}\, G_\lambda)\leqslant\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} G_\lambda\times$$
$$\times\zeta\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\right)/\zeta\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\right)\cong\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} G_\lambda/\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} G_\lambda\cap\zeta\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\right)\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} G_\lambda/\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}}\zeta(G_\lambda)\cong$$
$$\cong\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} G_\lambda/\zeta(G_\lambda)\in SD\mathfrak{F},$$

т. е. $G/\zeta(G)\in SD\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

М. Томкинсон показал, что коммутант локально нормальной группы содержится в $QSD\mathfrak{F}$ ([4], теорема 3.6). В связи с этим возникает вопрос о том, содержится ли класс локально нормальных групп в $QSD\ (\mathfrak{F}\mathfrak{A})$ (см. [4], вопрос 3.H). Ю. М. Горчаков построил пример p-группы G, у которой $[G, G] = \zeta(G)$ — квазициклическая подгруппа, а $G/\zeta(G) \in QSD\mathfrak{F}$ ([1], пример II.2.11). Из теоремы 2 следует, что эта группа не содержится в классе $QSD\ (\mathfrak{F}\mathfrak{A})$, т. е. справедливо такое следствие.

Следствие. *Класс локально нормальных групп не содержится в прямом многообразии, порожденном группами с конечными коммутантами.*

Лемма 6. *Пусть $G \in \mathfrak{N}_2$, G — локально нормальная группа, $[G, G] = C$ — квазициклическая p-подгруппа, $p \neq 2$. Если $G/C \in SD\mathfrak{F}$, то $G \in QSD(\mathfrak{F}\mathfrak{A})$.*

Доказательство. Поскольку C — p-группа и $p \neq 2$, то для любого ее элемента c уравнение $x^2 = c$ имеет единственное решение. Обозначим это решение через $c^{1/2}$. Введем в G операцию сложения следующим образом: $x + y = xy\,[y, x]^{1/2}$.

Сложение ассоциативно:

$$(x + y) + z = (x + y)\,z\,[z, x + y]^{1/2} = xy\,[y, x]^{1/2} z\,[z, xy\,[y, x]^{1/2}]^{1/2} =$$
$$= (xy)\,z\,[y, x]^{1/2}\,[z, x]^{1/2}\,[z, y]^{1/2};$$
$$x + (y + z) = x\,(y + z)\,[y + z, x]^{1/2} = x\,(yz)\,[z, y]^{1/2}\,[yz\,[z, y]^{1/2}, x]^{1/2} =$$
$$= x\,(yz)\,[y, x]^{1/2}\,[z, x]^{1/2}\,[z, y]^{1/2}.$$

Сложение коммутативно:

$$x + y = xy\,[y, x]^{1/2}; \qquad y + x = yx\,[x, y]^{1/2} = xy\,[y, x]\,[x, y]^{1/2} =$$
$$= xy\,[y, x]\,[y, x]^{-1/2} = xy\,[y, x]^{1/2}.$$

Нулевым элементом будет, очевидно, единичный элемент G, а $-x = x^{-1}$. Для элементов $x, y \in C$ имеем $x + y = x \cdot y$. Далее, $[x + y, z] = [xy\,[y, x]^{1/2}, z] = [x, z]\,[y, z] = [x, z] + [y, z]$, и аналогично, $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$.

Таким образом, относительно сложения и коммутирования G является кольцом Ли (тождество Якоби выполняется очевидным образом). Так как C — квазициклическая, то $G = C \oplus A$. Очевидно, C — идеал лиева кольца G и $(x + C) + (y + C) = x + y + C = xy + C$, т. е. $A \cong G/C$, в частности A разлагается в прямую сумму циклических групп: $A = \bigoplus_{\alpha < \gamma} \langle a_\alpha \rangle$. Пусть $C = \mathrm{гр}\,(c_n / pc_1 = 0,\ pc_{n+1} = c_n,\ n \in \mathbb{N})$, $D = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \langle d_n \rangle$, где $|d_n| = p^n$, $F = \mathrm{гр}\,(pd_{n+1} - d_n \mid n \in \mathbb{N})$. Тогда гомоморфизм $\varphi : D \to C$, определяемый равенствами $d_n \varphi = c_n$, имеет ядром подгруппу F и $C \cong D/F$. Определим операцию $\circ$ для элементов абелевой аддитивной группы $G_1 = D \oplus A$ следующим образом: пусть $[a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}] = kc_n$, где $\alpha_1 < \alpha_2$ и $(k, p) = 1$. Положим $a_{\alpha_1} \circ a_{\alpha_2} = kd_n$ и расширим эту операцию на всю подгруппу A с помощью законов антикоммутативности и дистрибутивности, а затем и на всю группу G_1, полагая $x \circ y = 0$ для $x \in D$, $y \in G_1$. Относительно операций сложения и $\circ$ G_1 будет, очевидно, кольцом Ли. Отображение φ можно продолжить до отображения $\psi : G_1 \to G$, полагая $(u, v)\,\psi = (u\varphi, v)$, $u \in D$, $v \in A$. Из определения операции $\circ$ вытекает, что ψ будет гомоморфизмом лиева кольца G_1 на лиево кольцо G, причем $\mathrm{Ker}\,\psi = \mathrm{Ker}\,\varphi = F$. Введем теперь в G_1 операцию умножения, полагая $x \cdot y = x + y + \frac{1}{2}(x \circ y)$. Нетрудно показать, что относительно этой операции G_1 будет группой. Кроме того, $[x, y] = x \circ y$, так что $D \leqslant \zeta(G_1)$ и $u \cdot v = u + v$ для любых $u, v \in D$. Вводя аналогичным образом умножения в G, приходим к первоначальной операции, заданной в G. Гомоморфизм ψ становится групповым гомоморфизмом, т. е. $G \cong G_1/F$. Покажем, что G_1 — FC-группа. Для любого элемента a_α имеем $[G, a_\alpha] \leqslant \langle c_n \rangle$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $G_1 \circ a_\alpha \leqslant \bigoplus_{k \leqslant n} \langle d_k \rangle$, в частности в группе G_1 имеем $|[G_1, a_\alpha]| < \infty$, т. е. $\langle a_\alpha \rangle^{G_1}$ конечна при любом $\alpha < \gamma$. Отсюда и получаем, что G_1 — FC-группа.

Из леммы 2 получаем вложение $G_1 \leqslant \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Zr}}\ G/K_n$, где $K_n = \underset{t\neq n}{\mathrm{X}}\ \langle d_t\rangle$, в частности, $G/K_n \in \mathfrak{F}\mathfrak{A}$. Отсюда следует, что $G_1 \in QSD(\mathfrak{F}\mathfrak{A})$, а потому и $G \in QSD(\mathfrak{F}\mathfrak{A})$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть G — FC-группа $G \in \mathfrak{N}_2$ и $[G, G]$ не содержит элементов порядка 2. Если $G/\zeta(G) \in SD\mathfrak{F}$, то $G \in QSD(\mathfrak{F}\mathfrak{A})$.*

Доказательство. Пусть сначала G — периодическая группа, $Z = \zeta(G)$. Рассуждая, как и в доказательстве следствия леммы 2, выделим в Z такое семейство подгрупп $\{Z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, что Z/Z_λ циклическая или квазициклическая и $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda = \langle 1\rangle$. Из леммы 2 получаем тогда вложение $G \leqslant \underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Zr}}\ G_\lambda$, где $G_\lambda = G/Z_\lambda$. Имеем $[G_\lambda, G_\lambda] \leqslant Z/Z_\lambda$. Если $[G_\lambda, G_\lambda]$ конечна, то $G_\lambda \in \mathfrak{F}\mathfrak{A}$. Пусть $[G_\lambda, G_\lambda]$ бесконечна. Тогда $[G_\lambda, G_\lambda] = Z/Z_\lambda$ и Z/Z_λ — квазициклическая p-подгруппа, $p \neq 2$. Из леммы 6 получаем $G_\lambda \in QSD(\mathfrak{F}\mathfrak{A})$. Но тогда $\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Zr}}\ G_\lambda \in QSD(\mathfrak{F}\mathfrak{A})$, а потому и $G \in QSD(\mathfrak{F}\mathfrak{A})$.

Если G непериодическая, то пусть A — максимальная абелева подгруппа без кручения из Z. Тогда G/A — периодическая, причем $\zeta(G/A) = Z/A$ и $[G, G]A/A = [G/A, G/A]$. Из доказанного выше следует, что $G/A \in QSD(\mathfrak{F}\mathfrak{A})$. Но $G \leqslant G/A \times G/[G, G]$, а потому и $G \in QSD(\mathfrak{F}\mathfrak{A})$. Теорема доказана.

Группу G назовем экстраспециальной, если $\zeta(G) = [G, G]$ — подгруппа порядка p, а $G/\zeta(G)$ — элементарная абелева p-группа, p — простое число.

Теорема 4. *Пусть G — экстраспециальная p-группа, p-простое число. Если $G \in QSD\mathfrak{F}$, то $G \leqslant H$, где H — центральное произведение неабелевых групп порядка p^3.*

Доказательство. Из теоремы I.4.3 работы [1] следует, что $G \cong L/K$, где $L \leqslant \underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}}\ F_\lambda$, $K \leqslant \zeta(L)$, F_λ — счетная группа, $\lambda \in \Lambda$. Не ограничивая общности, можно считать, что $F_\lambda = pr_\lambda L$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Пусть $K_\lambda = pr_\lambda K$, $\lambda \in \Lambda$. Из равенства $F_\lambda = pr_\lambda L$ следует включение $K_\lambda \leqslant \zeta(F_\lambda)$. Так как $K \leqslant \underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}}\ K_\lambda \leqslant \underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}}\ \zeta(F_\lambda) \leqslant \zeta(\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}}\ F_\lambda)$, то $K \leqslant \zeta(\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}}\ F_\lambda)$. Рассмотрим фактор-группу $(\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}}\ F_\lambda)/K$. Она порождается подгруппами $F_\lambda K/K$, которые взаимно поэлементно перестановочны. Из равенства $F_\lambda = pr_\lambda L$ следует, что F_λ — гомоморфный образ группы L. Но тогда $F_\lambda K/K$ — гомоморфный образ группы $L/K \cong G$. Это означает, в частности, что $F_\lambda K/K$ — счетная экстраспециальная или элементарная абелева p-группа, $\lambda \in \Lambda$. Обозначим через P, P_1 неабелевы группы порядка p^3. Из следствия 3.10 работы [4] получаем включение $F_\lambda K/K \in QSD(P, P_1)$ при любом $\lambda \in \Lambda$. Далее, группа $(\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}}\ F_\lambda)/K$ — центральное произведение групп $F_\lambda K/K$, в частности, эта группа является гомоморфным образом прямого произведения $\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}}\ (F_\lambda K/K)$. Это означает, что $(\mathrm{X} F_\lambda)/K \in QSD(P, P_1)$, т. е. и $G \cong L/K \in QSD(P, P_1)$. Из теоремы $E(1)$ работы [8] следует, что $G \leqslant H$, где H — центральное произведение неабелевых групп порядка p^3. Теорема доказана.

Теорема 4 дает утвердительный ответ на вопрос 3G работы [4].

Группу G назовем $\mathfrak{Z}$-группой, если для всякой бесконечной мощности $\mathfrak{m}$ и всякого подмножества $S \subset G$ такого, что $|S| < \mathfrak{m}$ имеет место $|G : C_G(S)| < \mathfrak{m}$ (см. [4], раздел 3). Ясно, что всякая $\mathfrak{Z}$-группа является FC-группой. Этот класс групп появился еще в работе Ф. Холла [9]. Класс периодических $\mathfrak{Z}$-групп включает в себя прямое многообразие, порожденное классом конечных групп [9], и до сих пор не было установлено, совпадают ли эти классы (см [4], вопрос 3F). М. Томкинсон построил пример экстраспециальной $\mathfrak{Z}$-группы, которая не вкладывается в центральное произведение неабелевых групп порядка p^3 (см. [4], пример 3.16). Из теоремы 4 следует, что эта группа не может содержаться в классе $QSD\mathfrak{F}$, т. е. справедливо такое следствие.

Следствие. *Класс $QSD\mathfrak{F}$ и класс периодических $\mathfrak{Z}$-групп не совпадают.*

1. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов.— М. :Наука, 1978.— 120 с.
2. *Ehrenfeucht A., Faber V.* Do infinite nilpotent groups alvaus have equipotent abelian subgroups? // Kon. Nederl. Akad. Wet.— 1972.— 34, N 3.— P. 202—209.
3. *Горчаков Ю. М.* О структуре групп с конечными классами сопряженных элементов // XV Всесоюз. алгебр. конф. : Тез. докл.—Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1979.— Ч. 1.— С. 44.
4. *Tomkinson M. J.* *FC*-groups.— Boston, London, Melbourne : Pitman Advanced Publishing Program, 1984.— 171 p.
5. *Горчаков Ю. М.* О локально нормальных группах // Мат. сб.— 1965.— 67, № 2.— С. 244—254.
6. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы : В 2-х т.— М. : Мир, 1974.— Т. 1.— 335 с.
7. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
8. *Tomkinson M. J.* Extraspecial section of periodic *FC*-groups // Compos. math.— 1975.— 31, N 3.— P. 285—302.
9. *Hall Ph.* Periodic *FC*-groups // *J.* London Math. Soc.— 1959.— 34.— P. 289—304.

Днепропетр. ун-т

Получено 03.06.85