УДК 513.83

М. М. Заричный

Монада суперрасширения и ее алгебры

Понятие суперрасширения в топологию ввел И. де Гроот [1]. Конструкция суперрасширения определяет эндофунктор на категории $\mathscr{C}$omp компактов и непрерывных отображений.

Несмотря на наличие обширной литературы, посвященной суперрасширениям (см. [2], а также обзор [3]), категорные свойства функтора суперрасширения практически не рассматривались.

В настоящей работе показано, что функтор суперрасширения определяет (единственную) монаду (в смысле Эйленберга—Мура [4]) на категории $\mathscr{C}$omp и дается характеризация категории алгебр этой монады. Приводится также категорная характеризация суперрасширений.

1. Предбазы и суперрасширения. Пространства и отображения, рассматриваемые в статье, берутся из категории $\mathscr{C}$omp; все предбазы предполагаются замкнутыми.

Напомним, что предбаза $\mathcal{S}$ пространства X называется бинарной, если любая ее сцепленная система имеет непустое пересечение (система множеств называется сцепленной, если любые два элемента этой системы имеют непустое пересечение); называется T_2-предбазой, если для любых $x_1, x_2 \in X$ существуют $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ такие, что $S_1 \cup S_2 = X$, $x_1 \notin S_1$, $x_2 \notin X_2$.

Назовем предбазу $\mathcal{S}$ почти нормальной, если для каждого $S \in \mathcal{S}$ и каждой окрестности OS множества S существует $S_1 \in \mathcal{S}$ такое, что $S \subset \operatorname{Int} S_1 \subset$

$\subset S_1 \subset OS$. Через $\exp(X)$ обозначим семейство непустых замкнутых подмножеств пространства X, рассматриваемое в топологии Вьеториса. Предбазу топологии Вьеториса образуют множества вида $\{A \in \exp(X) \mid A \subset B\}$ и $\{A \in \exp(X) \mid A \cap B \neq \varnothing\}$, где B пробегает $\exp(X)$.

Суперрасширением пространства X называется пространство $\lambda(X)$ максимальных (по включению) сцепленных систем (м. с. с.) замкнутых подмножеств пространства X, наделенное уолменовской топологией [1]. Предбазу этой топологии образуют множества вида $A^+ = \{\mathcal{M} \in \lambda(X) \mid M \subset A$ для некоторого $M \in \mathcal{M}\}$, где A пробегает $\exp(X)$.

Для отображения $f: X \to Y$ и м. с. с. $\mathcal{M} \in \lambda(X)$ сцепленная система $\{fM \mid M \in \mathcal{M}\}$ единственным образом дополняется до м. с. с. $\mathcal{N} \in \lambda(Y)$. Если положить $\mathcal{N} = \lambda(f)(\mathcal{M})$, то тем самым корректно определяется отображение $\lambda(f): \lambda(X) \to \lambda(Y)$.

Пусть S — предбаза в пространстве X. Для каждого $A \subset X$ положим $I_S(A) = \bigcap \{S \in S \mid A \subset S\}$. Обозначим через $q_S(X)$ замыкание множества $\{x \in X \mid x \in I_S(\{y, z\}) \Leftrightarrow x \in \{y, z\}\}$.

Пусть (X, S), (X', S') — пространства с фиксированными предбазами. Отображение $f: X \to X'$ называется выпуклым, если для каждого $S' \in S'$ множество $f^{-1}(S')$ является пересечением некоторого подсемейства предбазы S.

Лемма 1. *Для каждого выпуклого отображения* $f: (X, S) \to (X', S')$ *и каждого* $A \subset X$ $f(I_S(A)) \subset I_{S'}(fA)$.

Обозначим через $\mathcal{P}$ категорию, объектами которой являются всевозможные пары (X, S), где S — бинарная почти нормальная T_2-предбаза в X, а морфизмами — выпуклые отображения.

Лемма 2. *Пусть* (X, S) — *объект категории* $\mathcal{P}$. *Тогда для м. с. с.* $\mathcal{M} \in \lambda(X)$

$$|\bigcap \{I_S(M) \mid M \in \mathcal{M}\}| = 1.$$

Доказательство. Из бинарности предбазы S следует $\bigcap \{I_S(M) \mid M \in \mathcal{M}\} \neq \varnothing$. Предположим, что $x_1, x_2 \in \bigcap \{I_S(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$ и $x_1 \neq x_2$. Поскольку S — T_2-предбаза, то существуют множества $S_1, S_2 \in S$ такие, что $S_1 \cup S_2 = X$, $x_1 \notin S_1$, $x_2 \notin S_2$. В силу максимальности сцепленной системы $\mathcal{M}$ одно из множеств, например S_1, принадлежит $\mathcal{M}$. Но тогда $x_1 \notin S_1 = I_S(S_1) \supset \bigcap \{I_S(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$, и мы получаем противоречие. Лемма доказана.

Используя лемму 2 можно определить отображение $k_S: \lambda(X) \to X$, положив для каждой м. с. с. $\mathcal{M} \in \lambda(X)$, $k_S(\mathcal{M}) \in \bigcap \{I_S(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$.

Лемма 3. *Отображение* k_S *непрерывно*.

Доказательство. Пусть $x = k_S(\mathcal{M})$ и U — окрестность точки x в X. Для каждого $y \in X \setminus U$, используя почти нормальность предбазы S, выберем множества $S_y, S'_y \in S$ так, чтобы $S_y \in \mathcal{M}$, $S_y \subset \operatorname{Int} S'_y$ и $y \notin S'_y$. Тогда $\bigcap \{S'_y \mid y \in X \setminus U\} \subset U$ и существует конечное подмножество $\{y_1, \ldots, y_l\} \subset X \setminus U$, для которого $\bigcap \{S'_{y_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant l\} \subset X \setminus U$. Тогда $\mathcal{M} \in \bigcap \{(\operatorname{Int} S'_{y_i})^+ \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$ и $k_S(\bigcap \{(\operatorname{Int} S'_{y_i})^+ \mid 1 \leqslant i \leqslant l\} \subset \bigcap \{S'_{y_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant l\} \subset U$. Но $\bigcap \{(\operatorname{Int} S'_{y_i})^+ \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$ — окрестность точки $\mathcal{M}$ в $\lambda(X)$, что доказывает непрерывность отображения k_S.

2. Монада суперрасширения. Суперрасширение $\lambda(X)$ рассматривается вместе с канонической предбазой $\mathcal{L}(X) = \{A^+ \mid A \in \exp(X)\}$.

Лемма 4. *Предбаза* $\mathcal{L}(X)$ *является бинарной почти нормальной* T_2*-предбазой в* $\lambda(X)$.

Доказательство. Бинарность предбазы $\mathcal{L}(X)$ хорошо известна (см., например, [2]). Если $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \lambda(X)$ и $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$, то $M \cap N = \varnothing$ для некоторых $M \in \mathcal{M}$ и $N \in \mathcal{N}$. Существуют M_1, $N_1 \in \exp(X)$ такие, что $M_1 \cup N_1 = X$, $M_1 \cap N = \varnothing = M \cap N_1$. Тогда $M_1^+ \cup N_1^+ = \lambda(X)$ и $\mathcal{M} \notin N_1^+$, $\mathcal{N} \notin M_1^+$. Это доказывает, что $\mathcal{L}(X)$ — T_2-предбаза. Для доказательства почти нормальности отметим, что отображение $(-)^+: \exp(X) \to \exp(\lambda(X))$ непрерывно [5]. Пусть $A^+ \in \mathcal{L}(X)$ и V — окрестность множества A^+. Из непрерывности отображения $(-)^+$ следует, что для некоторого $B \in \exp(X)$, для которого $A \subset \operatorname{Int}(B)$, имеем $B^+ \subset V$. Но $\operatorname{Int}(B^+) = (\operatorname{Int} B)^+$, поэтому $A^+ \subset \operatorname{Int}(B^+) \subset B^+ \subset V$. Лемма доказана.

Отображение $k_{\mathscr{L}(X)} : \lambda^2(X) \to \lambda(X)$, определенное в п. 1, обозначим через μ_X.

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{M} \in \lambda^2(X)$. *Тогда* $\mu_X(\mathfrak{M}) = \{M \mid M \in \bigcap \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\}$.

Доказательство. Пусть $M \in \mu_X(\mathfrak{M})$. Тогда для каждого $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$ имеем $M^+ \cap I_{\mathscr{L}(X)}(\mathcal{A}) \neq \varnothing$. Это означает, что $M^+ \in \mathfrak{M}$. Но $M \in \bigcap M^+$ и, следовательно, $\mu_X(\mathfrak{M}) \subset \{M \mid M \in \bigcap \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\}$. Для доказательства обратного включения достаточно показать, что $\{M \mid M \in \bigcap \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\}$ — сцепленная система. Но если $M_i \in \bigcap \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i \in \mathfrak{M}$, то $\mathcal{A}_i \subset M_i^+$, $i = 1, 2$. Следовательно, $M_1^+, M_2^+ \in \mathfrak{M}$, $M_1^+ \cap M_2^+ \neq \varnothing$ и $M_1 \cap M_2 \neq \varnothing$. Лемма доказана.

Лемма 6. $\mu = \{\mu_X \mid X$ — *Компакт*$\}$ — *естественное преобразование функторов* λ^2 *и* λ.

Доказательство. Требуется установить коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\lambda^2(X) \arrow[r, "\lambda^2(f)"] \arrow[d, "\mu_X"'] & \lambda^2(Y) \arrow[d, "\mu_Y"] \\
\lambda(X) \arrow[r, "\lambda(f)"] & \lambda(Y)
\end{tikzcd}$$

для отображения $f : X \to Y$. Пусть $\mathfrak{M} \in \lambda^2(X)$. Тогда $\lambda(f)\mu_X(\mathfrak{M}) \in \lambda(f)(\bigcap \bigcap \{I_{\mathscr{L}(X)}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\}) = \bigcap \{I_{\mathscr{L}(Y)}(\lambda(f)(\mathcal{A})) \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\} \subset \bigcap \{I_{\mathscr{L}(Y)}(\mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in \lambda^2 \times (f)(\mathfrak{M})\} = \{\mu_Y \lambda^2(f)(\mathfrak{M})\}$, откуда следует требуемая (по поводу первого равенства см. [2]) коммутативность. Лемма доказана.

Для каждого X обозначим через $\eta_X : X \to \lambda(X)$ отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ м. с. с. $\{A \in \exp(X) \mid x \in A\} \in \lambda(X)$.

Лемма 7. $\eta = \{\eta_X\}$ — *Естественное преобразование тождественного функтора* Id *и функтора* λ.

Напомним, что монадой на категории $\mathscr{C}$ называется тройка $T = (F, \eta, \mu)$, где $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ — эндофунктор, $\eta : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \to F$ (единица) и $\mu : F^2 \to F$ (умножение) — естественные преобразования, причем для каждого объекта X категории $\mathscr{C}$ коммутативны следующие диаграммы, выражающие ассоциативность умножения и двусторонность единицы (более подробно см., например, [6]):

$$\begin{tikzcd}
F^3(X) \arrow[r, "F(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{F(X)}"'] & F^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\
F^2(X) \arrow[r, "\mu_X"] & F(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\eta_{F(X)}"] \arrow[dr, equal] & F^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] & F(X) \arrow[l, "F(\eta_X)"'] \arrow[dl, equal] \\
& F(X) &
\end{tikzcd}$$

Теорема 1. А. $\mathbf{L} = (\lambda, \eta, \mu)$ — *Монада на категории* $\mathscr{C}$omp;
Б. *Если* (λ, η', μ') — *монада на категории* $\mathscr{C}$omp, *то* $\eta = \eta'$ *и* $\mu = \mu'$.

Доказательство. А. По леммам 6 и 7 μ и η — естественные преобразования.

Проверим ассоциативность умножения μ. Требуется установить коммутативность следующей диаграммы (X — компакт):

$$\begin{tikzcd}
\lambda^3(X) \arrow[r, "\lambda(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{\lambda(X)}"'] & \lambda^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\
\lambda^2(X) \arrow[r, "\mu_X"] & \lambda(X)
\end{tikzcd}$$

Пусть $\mathfrak{M} \in \lambda^3(X)$. Тогда $\mu_X\mu_{\lambda(X)}(\mathfrak{M}) = \mu_X(\{M \mid M \in \bigcap \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\}) = \{N \mid N \in \bigcap M, M \in \bigcap \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\}$. С другой стороны, $\mu_X\lambda(\mu_X)(\mathfrak{M}) = \mu_X(\{\mu_X \times (\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\} = \{N \mid N \in \bigcap \mu_X(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\}$.

Пусть $N \in \mu_X\lambda(\mu_X)(\mathfrak{M})$. Тогда существует $\mathcal{A}_0 \in \mathfrak{M}$ такое, что $N \in \bigcap \mu_X(\mathcal{A}_0) = \bigcap \{\mu_X(\mathscr{M}) \mid \mathscr{M} \in \mathcal{A}_0\}$. Отсюда следует, что для всех $\mathscr{M} \in \mathcal{A}_0$ $\mu_X(\mathscr{M}) \in N^+$ и, значит, $N \in \{L \mid L \in \bigcap A, A \in \mathscr{M}\}$. Теперь для каждого $\mathscr{M} \in \mathcal{A}_0$ существует $A \in \mathscr{M}$ такое, что $A \subset N^+$, откуда $N^+ \in \mathscr{M}$ и $\mathscr{M} \in N^{++}$. Но тогда $\mathcal{A}_0 \subset N^{++}$ и, следовательно, $N^{++} \in \mathfrak{M}$.

Покажем, что отсюда следует $N \in \mu_X\mu_{\lambda(X)}(\mathfrak{M})$. Для всех $\mathscr{M} \in N^{++}$ имеем $N^+ \in \mathscr{M}$, поэтому $N^+ \in \bigcap N^{++}$. Но $N \in \bigcap N^+$, откуда $N \in \{L \mid L \in \bigcap M, M \in \bigcap A, A \in \mathfrak{M}\} = \mu_X\mu_{\lambda(X)}(\mathfrak{M})$.

Итак, доказано включение $\mu_X\mu_{\lambda(X)}(\mathfrak{M}) \supset \mu_X\lambda(\mu_X)(\mathfrak{M})$. Но включение между м. с. с. является равенством, что и доказывает требуемую коммутативность диаграммы.

Для проверки двусторонности единицы необходимо установить соотношения $\mu_X\eta_{\lambda(X)} = 1_{\lambda(X)} = \mu_X\lambda(\eta_X)$.

Пусть $\mathscr{M} \in \lambda(X)$. Тогда $\eta_{\lambda(X)}(\mathscr{M}) = \{\mathcal{A} \in \exp(\lambda(X)) \mid \mathscr{M} \in \mathcal{A}\}$ и $\mu_X\eta_{\lambda(X)}(\mathscr{M}) = \{M \mid M \in \bigcap \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \eta_{\lambda(X)}(\mathscr{M})\} \subset \{M \mid M \in \bigcap \{\mathscr{M}\}\} = \mathscr{M}$, т. е. $\mu_X\eta_{\lambda(X)}(\mathscr{M}) = \mathscr{M}$. В то же время $\lambda(\eta_X)(\mathscr{M}) = \{\mathcal{A} \in \exp(\lambda(X)) \mid A \supset \eta_X(\mathscr{M}), M \in \mathscr{M}\}$ и $\mu_X\lambda(\eta_X) \times (\mathscr{M}) = \{N \mid N \in \bigcap \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \lambda(\eta_X)(\mathscr{M})\} \subset \{N \mid N \in \bigcap \eta_X(M), M \in \mathscr{M}\} \subset \{N \mid N \in \mathscr{M}\} = \mathscr{M}$ (последнее включение выполняется, поскольку $M \in \bigcap \eta_X(M)$), т. е. $\mu_X\lambda(\eta_X)(\mathscr{M}) = \mathscr{M}$.

Б. Пусть $k: 1 \to X$ — отображение, переводящее одноточечное пространство 1 в точку $x \in X$. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{k} & X \\ {\scriptstyle \eta_1'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_X'} \\ \lambda(1) & \xrightarrow{\lambda(k)} & \lambda(X) \end{array}$$

(так как η' — естественное преобразование), и из того, что $\lambda(1) \cong 1$, следует $\eta_X'(x) = \{A \in \exp(X) \mid x \in A\} = \eta_X(x)$, откуда $\eta' = \eta$.

Предположим, что $\mu_X' \neq \mu_X$ для некоторого пространства X. Это означает, что существует $\mathfrak{M} \in \lambda^2(X)$ такое, что $\mu_X'(\mathfrak{M}) \neq \mu_X(\mathfrak{M})$, т. е. существует $A \in \mu_X(\mathfrak{M})$ такое, что $A \notin \mu_X'(\mathfrak{M})$. Тогда найдется $B \in \mu_X'(\mathfrak{M})$ такое, что $A \cap B = \varnothing$. Рассмотрим фактор-отображение $p: X \to Y = X/\{A, B\}$. Так как $A \in \mu_X(\mathfrak{M})$, то существует $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$ такое, что $A \in \bigcap \mathcal{A}$, т. е. $A \in \mathscr{M}$ для всех $\mathscr{M} \in \mathcal{A}$ и, следовательно, $\lambda^2(p)(\mathfrak{M}) = \eta_{\lambda(Y)}\eta_Y(pA)$. С другой стороны, $\lambda(p)\mu_X'(\mathfrak{M}) = \eta_Y(pB)$. Окончательно получаем $\mu_Y'\lambda^2(p)(\mathfrak{M}) = \mu_Y'\eta_{\lambda(Y)}\eta_Y(pA) = \eta_Y(pA) \neq \eta_Y(pB) = \lambda(p)\mu_X'(\mathfrak{M})$, что противоречит коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \lambda^2(X) & \xrightarrow{\lambda^2(p)} & \lambda^2(Y) \\ {\scriptstyle \mu_X'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_Y'} \\ \lambda(X) & \xrightarrow{\lambda(p)} & \lambda(Y). \end{array}$$

Полученное противоречие доказывает, что $\mu = \mu'$. Теорема доказана

3. Алгебры монады суперрасширения. Напомним, что T-алгеброй монады $T = (F, \eta, \mu)$ на категории $\mathscr{C}$ называется пара (X, ξ), где ξ — морфизм из $F(X)$ в X, для которого $\xi\eta_X = 1_X$ и $\xi\mu_X = \xi F(\xi)$.

Морфизмом T-алгебр (X, ξ) и (X', ξ) называется такой морфизм $f: X \to X'$, что $\xi' F(f) = f\xi$. T-Алгебры и их морфизмы образуют категорию, обозначаемую $\mathscr{C}^T$.

В этом пункте рассматривается категория $\mathscr{C}omp^{\mathbf{L}}$.

Лемма 8. *Если* (X, ξ) — **L**-*алгебра, то для каждого* $A \in \exp(X)$ $\xi(\xi(A^+)^+) = \xi(A^+)$.

Доказательство. Рассмотрим множество $A^{++} \subset \lambda^2(X)$. Имеем $\xi\lambda(\xi)(A^{++}) = \xi(\xi(A^+)^+)$. С другой стороны, $\xi\lambda(\xi)(A^{++}) = \xi\mu_X(A^{++})$ и остается только показать, что $\mu_X(A^{++}) = A^+$.

Если $\mathfrak{M} \in A^{++}$, то $A^+ \in \mathfrak{M}$, и поэтому $A \in \mu_X(\mathfrak{M})$, т. е. $\mu_X(\mathfrak{M}) \in A^+$. Обратно, если $\mathscr{M} \in A^+$, то $\eta_{\lambda(X)}(\mathscr{M}) \in A^{++}$ и $\mathscr{M} = \mu_X\eta_{\lambda(X)}(\mathscr{M}) \in \mu_X(A^{++})$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пара* (X, ξ) *является* **L**-*алгеброй тогда и только тогда, когда в* X *существует бинарная почти нормальная* T_2-*предбаза* S, *для которой* $\xi = k_S$.

Доказательство. Необходимость. Пусть (X, ξ) — **L**-алгебра. Положим $S = \{\xi(A^+) \mid A \in \exp(X)\}$. Очевидно, что S — предбаза пространства X. Покажем, почти нормальность предбазы S. Пусть $S = \xi(A^+) \in S$ и OS — окрестность множества S. Тогда по лемме 8 $S = \xi(S^+)$. Так как отображение $(—)^+ : \exp(X) \to \exp(\lambda(X))$ непрерывно и S принадлежит замыканию (в $\exp(X)$) множества $\{S' \in \exp(X) \mid S \subset \operatorname{Int} S'\}$, то существует $S' \in \exp(X)$ такое, что $\xi(S')^+ \subset OS$ и $S \subset \operatorname{Int} S'$. Тогда $S \subset \operatorname{Int}(\xi((S')^+)) \subset \xi((S')^+) \subset OS$.

Наконец, докажем, что S является T_2-предбазой. Для этого покажем, что для любой м. с. с. $\mathscr{M} \in \lambda(X)$ множество $K = \bigcap\{\xi(M^{++}) \mid M \in \mathscr{M}\}$ одноточечно. Действительно, выше по существу доказано, что $\xi(\mathscr{M}) \in K$. Предположим, что существует $x \in K$ такое, что $x \neq \xi(\mathscr{M})$. Для каждого $M \in \mathscr{M}$ выберем точку $p(\mathscr{M}) \in \xi^{-1}(x) \cap M^+$. Пусть $B = \overline{\{p(M) \mid M \in \mathscr{M}\}}$ и $\mathfrak{M} \in \lambda^2(X)$ — (единственная) м. с. с., содержащая сцепленную систему $\{B\} \cup \{\{\mathscr{M}, p(M)\} \mid M \in \mathscr{M}\}$. Тогда $\xi\lambda(\xi)(\mathfrak{M}) = \xi\eta_X(\xi(B)) = \xi\eta_X(x) = x$. В то же время $\xi\lambda(\xi)(\mathfrak{M}) = \xi\mu_X(\mathfrak{M}) \in \xi(\bigcap\{I_{\mathscr{L}(X)}(\{\mathscr{M}, p(M)\}) \mid M \in \mathscr{M}\} \cap I_{\mathscr{L}(X)}(B)) \subset \xi(\bigcap\{\tilde{M}^+ \mid M \in \mathscr{M}\}) = \{\xi(\mathscr{M})\}$ и мы получаем противоречие.

Пусть теперь существуют точки $x_1 \neq x_2$ пространства X, не разделяющиеся дополнениями до элементов предбазы S. Рассмотрим сцепленную систему $\mathscr{M} = \{\{x_1, x_2\}\} \cup \{\overline{X \setminus S} \mid \overline{X \setminus S} \cap \{x_1, x_2\} \mid = 1, S \in S\}$ и дополним $\mathscr{M}$ до м. с. с. $\mathscr{M}' \in \lambda(X)$. Покажем, что для каждого $M \in \mathscr{M}$ $I_S(M) \supset \{x_1, x_2\}$. Действительно, пусть для определенности $x_1 \in M$. Если $x_2 \notin I_S(M)$, то существует $S \in S$, для которого $M \subset S$ и $x_2 \notin S$. Выберем $S' \in S$ такое, что $S \subset \operatorname{Int}(S')$ и $x_2 \notin S$. Тогда $X \setminus \operatorname{Int}(S') \in \mathscr{M}$ и $M \cap (X \setminus \operatorname{Int}(S')) = \varnothing$, что противоречит сцепленности м. с. с. $\mathscr{M}$. Итак, для всех $M \in \mathscr{M}$ $I_S(M) \supset \{x_1, x_2\}$. Заметим, что $I_S(M) \subset \xi(M^+)$. Поэтому $\{x_1, x_2\} \subset \bigcap\{I_S(M) \mid M \in \mathscr{M}\} \subset \bigcap\{\xi(M^+) \mid M \in \mathscr{M}\}$, что противоречит доказанному выше. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\mathbf{S}$ — бинарная почти нормальная T_2-предбаза пространства X и $\xi = k_S : \lambda(X) \to X$. Тогда, очевидно, $\xi\eta_X = 1_X$. Чтобы доказать, что (X, ξ) — **L**-алгебра, остается показать, что $\xi\lambda(\xi) = \xi\mu_X$.

Пусть $\mathfrak{M} \in \lambda^2(X)$. Тогда $\xi\mu_X(\mathfrak{M}) = \xi(\{M \mid M \in \bigcap \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\}) = \bigcap\{I_S \times (M) \mid M \in \bigcap \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\}$. С другой стороны, $\xi\lambda(\xi)(\mathfrak{M}) = \xi(\{\xi A \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\}) \in \bigcap\{I_S(\xi\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\}$.

Из бинарности предбазы $\mathbf{S}$ следует, что для доказательства равенства $\xi\mu_X(\mathfrak{M}) = \xi\lambda(\xi)(\mathfrak{M})$ достаточно показать, что для всех $M, \mathcal{A}, \mathcal{A}'$, где $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in \mathfrak{M}$, $M \in \bigcap \mathcal{A}$, имеем $I_S(M) \cap I_S(\xi\mathcal{A}') \neq \varnothing$. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что $I_S(M) \cap \xi\mathcal{A}' \neq \varnothing$. Пусть $\mathscr{M} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$. Тогда $\xi(\mathscr{M}) \in \xi(\mathcal{A}')$ и $\xi(\mathscr{M}) \in \bigcap\{I_S(N) \mid N \in \mathscr{M}\} \subset I_S(M)$, поскольку $M \in \mathscr{M}$. Теорема доказана.

В дальнейшем для **L**-алгебр будем использовать также обозначение (X, k_S), где S — предбаза, существование которой утверждается в теореме 2.

Теорема 3. *Отображение* $f : X \to X'$ *является морфизмом* **L**-*алгебр*

(X, k_S) и $(X', k_{S'})$ *тогда и только тогда, когда* $f:(X, S) \to (X', S')$ — *выпуклое отображение.*

Доказательство. Достаточность Пусть $\mathscr{M} \in \lambda(X)$. Тогда $fk_S(\mathscr{M}) \in f(\bigcap\{I_S(M) \mid M \in \mathscr{M}\})$ и $k_{S'}\lambda(f)(\mathscr{M}) \in \bigcap\{I_{S'}(N) \mid N \in \lambda(f)(\mathscr{M})\} = \bigcap\{I_{S'} \times \times (fM) \mid M \in \mathscr{M}\} \supset \bigcap\{fI_S(M) \mid M \in \mathscr{M}\} \supset f(\bigcap\{I_S(M) \mid M \in \mathscr{M}\}) = \{fk_S(\mathscr{M})\}$, откуда $k_{S'}\lambda(f) = fk_S$, т. е. f — морфизм монад.

Необходимость. Пусть отображение f не выпукло. Это означает, что существует $M \in \mathbf{S}'$, для которого множество $f^{-1}(M)$ не является пересечением никакого подсемейства предбазы S, т. е. $f^{-1}(M) \neq I_S(f^{-1}(M))$. Пусть $x \in I_S(f^{-1}(M)) \setminus f^{-1}(M)$. Существует м. с. с. $\mathscr{M} \in \lambda(X)$, содержащая сцепленную систему $\{f^{-1}(M)\} \cup \{\{x, y\} \mid y \in f^{-1}(M)\}$. Тогда $k_S(\mathscr{M}) \in \bigcap\{I_S(A) | A \in \in \mathscr{M}\} \supset \{x\}$ и, значит, $k_S(\mathscr{M}) = \{x\}$. С другой стороны, $k_{S'}\lambda(f)(\mathscr{M}) \in \in I_S(ff^{-1}(M)) \subset I_{S'}(M) = M$. Но $fk_S(\mathscr{M}) = f(x) \notin \mathscr{M}$ и мы получаем противоречие. Теорема доказана.

Следствие 1. *Категории* $\mathscr{C}\mathrm{omp}^{\mathbf{L}}$ *и* $\mathscr{P}$ *изоморфны.*

4. Характеризация суперрасширений в категории $\mathbf{L}$-алгебр. Суперрасширением называется $\mathbf{L}$-алгебра вида $(\lambda(X), \mu_X)$.

Лемма 9. *Для каждого* X $q_{\mathscr{L}(X)}(\lambda(X)) = \eta_X(X)$.

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $\eta_X(x) \in I_{\mathscr{L}(X)}(\{\mathscr{M}, \mathscr{N}\})$ для некоторых $\mathscr{M}, \mathscr{N} \in \lambda(X)$. Тогда $\{x\} \in \mathscr{M} \cap \mathscr{N}$, а значит, $\mathscr{M} = \mathscr{N} = \eta_X(x)$ и $\eta_X(X) \subset \subset q_{\mathscr{L}(X)}(\lambda(X))$. Обратно, если $\mathscr{M} \in \lambda(X) \setminus \eta_X(X)$, то существует минимальный по включению элемент $M \in \mathscr{M}$ такой, что $|M| \geqslant 2$. Пусть $N_1, N_2 \in \in \exp(X)$ такие, что $N_1 \cup N_2 = M$ и $N_1 \neq M \neq N_2$.

Как показано в [7], существует единственная м. с. с. $\mathscr{N}_i$, содержащая сцепленную систему $\{N_i\} \cup \{M \in \mathscr{M} \mid M \cap N_i \neq \varnothing\}$, $i = 1, 2$. Тогда, очевидно, $|\{\mathscr{N}_1, \mathscr{N}_2, \mathscr{M}\}| = 3$. Кроме того, $I_{\mathscr{L}(X)}(\{\mathscr{N}_1, \mathscr{N}_2\}) = \bigcap\{A^+ \mid A \in \exp(X),\ A \in \mathscr{N}_1 \cap \cap \mathscr{N}_2\}$. Отсюда и из замкнутости $\eta_X(X)$ в $\lambda(X)$ и следует утверждение леммы.

Теорема 4. *Пусть* (X, ξ) (*или* (X, S), *где* $\xi = k_S$) — $\mathbf{L}$-*алгебра. Следующие условия эквивалентны*:

1) (X, ξ) — *суперрасширение*;

2) (X, ξ) — *свободная* $\mathbf{L}$-*алгебра*;

3) (X, ξ) *свободно порождается множеством* $q_S(X)$;

4) (X, ξ) *изоморфна* $(\lambda(q_S(X)), \mu_{q_S}(X))$.

Доказательство. 4) $\Rightarrow$ 1) по определению, 1) $\Rightarrow$ 2) — хорошо известные общие результаты (см. [6]).

Докажем, что из условия 2 следует условие 3. Пусть пара (Z, i), где $i: Z \to X$ — некоторое отображение, свободно порождает $\mathbf{L}$-алгебру (X, ξ). Это означает, что для каждой $\mathbf{L}$-алгебры (X', ξ') и каждого отображения $f: Z \to X'$ существует единственный морфизм $\mathbf{L}$-алгебр $g:(X, \xi) \to (X', \xi')$ такой, что $f = gi$. Рассмотрим $\mathbf{L}$-алгебру $(\lambda(Z), \mu_Z)$. Так как пара (Z, η_Z) свободно порождает эту алгебру, то существует единственный морфизм $\mathbf{L}$-алгебр $h:(\lambda(Z), \mu_Z) \to (X, \xi)$ такой, что $i = h\eta_Z$. С другой стороны, существует единственный морфизм $\mathbf{L}$-алгебр $k:(X, \xi) \to (\lambda(Z), \mu_Z)$, для которого $\eta_Z = = ki$. Отсюда следует, что k и h — гомеоморфизмы. И мы сразу же получаем, что i — вложение. По теореме 3 k и h — выпуклые отображения. Покажем, что $i(Z) = q_S(X)$. Пусть $z \in Z$ и $i(z) \notin q_S(X)$. Тогда найдутся $x, y \in \in X$ такие, что $i(z) \notin \{x, y\}$ и $i(z) \in I_S(\{x, y\})$. Тогда $\eta_Z(z) \notin \{k(x), k(y)\}$. Но по лемме 1 $k(I_S(\{x, y\})) \subset I_{\mathscr{L}(Z)}(\{k(x), k(y)\})$, откуда $\eta_Z(z) = ki(z) \in I_{\mathscr{L}(Z)} \times \times (\{k(x), k(y)\})$, что противоречит лемме 9. Итак, $i(Z) \subset q_S(X)$. Обратное включение доказывается аналогично. Значит $\mathbf{L}$-алгебра (X, ξ) свободно порождается множеством $q_S(X)$.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) доказывается с помощью небольшой модификации предыдущих рассуждений. Теорема доказана.

1. *De Groot J*. Supercompactness and superextensions // Proc. I Intern. Symp. Ext. Theory Topological Structures and its Appl.— Berlin : Deutsch. Verl. Wiss., 1967.— P. 89—90.
2. *Van Mill J*. Supercompactness and Wallman spaces // Math. Cent. Tracts. —Amsterdam, 1977.—85.
3. *Федорчук В. В*. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов // Успехи мат. наук.— 1984.— **39**, вып. 5.— С. 169—208.
4. *Eilenberg S., Moore J. C*. Adjoint functors and triples // Ill. J. Math.— 1965.— **9**, N 3.— P. 381—398.
5. *Van Mill J., van de Vel M*. On superextensions and huperspaces, Topological Structures II // Math. Cent. Tracts.— 1979.— **115**.— P. 169—180.
6. *MacLane S*. Categories for the working mathematician.— Berlin : Springer, 1971.— 262 p.
7. *Van de Vel M*. Superextensions and Lefschetz fixed poind structures // Fund. math.— 1979.— **104**, N 1.— P. 27—42.

Львов. ун-т

Получено 24.05.85