УДК 517.53

А. Э. Еременко

О множестве дефектных значений целой функции конечного порядка

Известно, что множество дефектных значений мероморфной в конечной плоскости $\mathbb{C}$ функции не более, чем счетно [1—3]. Н. У. Аракелян получил следующий результат: для любого счетного множества $A \subset \mathbb{C}$ и любого $\rho > 1/2$ существует целая функция порядка ρ, множество дефектных значений которой содержит A [4—6]. Этой теоремой Н. У. Аракелян опроверг гипотезу Р. Неванлинны. Возникает естественный вопрос о том, существует ли целая функция конечного порядка, множество дефектных значений которой совпадает с наперед заданным счетным множеством.

Теорема. *Пусть $A \subset \mathbb{C}$ — не более чем счетное множество и задано число $\rho > 1/2$. Тогда существует целая функция f порядка ρ такая, что $\delta(a, f) > 0$ тогда и только тогда, когда $a \in A$ или $a = \infty$.*

Ограничение $\rho > 1/2$ существенно, так как целые функции порядка $\rho \leqslant 1/2$ не могут иметь конечных дефектных значений [3, с. 269]

Доказательство. Можно считать, что $\rho < \infty$ и множество A бесконечно. При $\rho = \infty$ теорема следует из результата В. Фукса и У. Хеймана [2, с. 125]. Для случая конечного множества A результат хорошо известен.

Выберем число $\mu < \pi(1-1/(2\rho))$. Положим $D_0 = \{z : |z| < 1\} \cup \{z : |z| < 2^3, \ 0 < \arg z < \mu\} \cup \{z : |z| > 2^6, \ -\mu < \arg z < 0\} \cup \{z : |z| > 2^9, \ 0 \leqslant \arg z < \mu\}$

Зафиксируем теперь произвольную последовательность $\mu = \theta_1 > \theta_1' > \theta_2 > \theta_2' > \ldots > \theta_n > \theta_n' > \ldots \to 0$ и рассмотрим области $D_k^+ = \{z : 2^4 < |z| < 2^8, \ \theta_k' < \arg z < \theta_k\}$, $D_k^- = \{z : 2 < |z| < 2^5, \ -\theta_k < \arg z < -\theta_k'\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Положим $D_k = D_k^+ \cup D_k^-$, $D = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$.

Построим субгармоническую функцию w порядка ρ, положительную в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, равную 0 в D_0 и отрицательную в D_k. Для этого рассмотрим сначала область $V = \{z : |z| < 1\} \cup \{z : |\arg z| < \mu\}$. Отобразим область $\mathbb{C} \setminus \overline{V}$ конформно и однолистно на правую полуплоскость $(\infty \mapsto \infty)$ и обозначим через v вещественную часть отображающей функции. Тогда v — положительная гармоническая функция в $\mathbb{C} \setminus \overline{V}$, равная 0 на границе. Легко видеть, что

$$B(r, v) = \max_{|z|=r} v(z) = v(-r) \sim \mathrm{const} \cdot r^{\lambda}, \quad r \to \infty, \tag{1}$$

где $\lambda = \pi/(2(\pi - \mu)) < \rho$. Обозначим через w решение задачи Дирихле для области $\{z : |z| < 2^9\} \setminus \overline{D}$ с граничными условиями $w(z) = v(z)$, $|z| = 2^9$; $w(z) = 0$, $z \in \partial D$. Продолжим функцию w нулем в D_0 и положим $w(z) = v(z)$, $|z| > 2^9$. Эта функция w положительная и субгармоническая в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ и равна 0 на границе $\partial(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$. Осталось определить функцию w в

D_k. Положим $\delta_k = (\theta_k - \theta'_k)/5$, $E_k^+ = \{z : 2^{4,1} \leqslant |z| \leqslant 2^{7,9},\ \theta'_k + \delta_k \leqslant \arg z \leqslant \leqslant \theta_k - \delta_k\}$, $E_k^- = \{z : 2^{1,1} \leqslant |z| \leqslant 2^{4,9},\ -\theta_k + \delta_k \leqslant \arg z \leqslant -\theta'_k - \delta_k\}$, $E_k = E_k^+ \cup E_k^-$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Пусть w_k — функция, непрерывная в $\bar{D}_k$, равная 0 на ∂D_k, равная $-x_k < 0$ на E'_k и гармоническая в $D_k \setminus \bar{E}'_k$. Здесь E'_k — некоторая окрестность множества E_k, $\bar{E}'_k \subset D_k$. Нетрудно показать, что если числа x_k достаточно малы и быстро убывают при $k \to \infty$, то функция w_k дает субгармоническое продолжение функции w в область D_k. Продолженная функция субгармоническая во всей плоскости и обладает такими свойствами:

$$w(z) > 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}, \tag{2}$$

$$w(z) = 0, \quad z \in \bar{D}_0, \tag{3}$$

$$w(z) < 0, \quad z \in D_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

$$w(z) = -x_k, \quad z \in E_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

$$B(r, w) \leqslant cr^\lambda, \quad c > 0, \quad \lambda < \rho. \tag{6}$$

Свойства (2) — (5) следуют из построения, а (6) — из (1). Риссовская мера функции w сосредоточена на множестве $X_0 = \partial D \cup \{z : |z| = 2^9\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \partial E'_k\right)$.

Положим $u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{6n\rho} w(2^{-6n} z)$. Из (3) следует, что при $|z| \leqslant 2^{6m}$ все члены ряда с номерами $n \geqslant m$ обращаются в 0. Поэтому функция u субгармоническая в $\mathbb{C}$. Оценим эту функцию сверху. Пусть $2^{6m} \leqslant |z| < < 2^{6(m+1)}$. В силу (2), (6) имеем

$$u(z) \leqslant c \sum_{n=1}^{m} 2^{6n\rho} \cdot 2^{-6n\lambda} |z|^\lambda \leqslant c \cdot 2^{6m(\rho-\lambda)} |z|^\lambda (1 + 2^{6(\lambda-\rho)} + 2^{12(\lambda-\rho)} + \ldots) \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \cdot 2^{6m(\rho-\lambda)} |z|^\lambda \leqslant c_1 |z|^\rho. \tag{7}$$

Для дальнейшего весьма важно следующее свойство функции:

$$\begin{aligned} u(2^{6n} z) &= 2^{6n\rho} u(z), \quad |\arg z| \leqslant \mu; \\ u(2^{6n} z) &\geqslant 2^{6n\rho} u(z), \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{8}$$

которое следует из (3), определения функции u и определения области D. Риссовская мера функции u сосредоточена на множестве $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} 2^{6n} X_0$.

По теореме В. С. Азарина [7] существует целая функция g такая, что

$$\log |g(z)| = u(z) + o(r^\rho), \quad r \to \infty, \tag{9}$$

вне некоторого множества кругов радиусов r_k с центрами в точках z_k, причем

$$\sum_{\{k : |z_k| < r\}} r_k = o(r), \quad r \to \infty. \tag{10}$$

Это исключительное множество обозначим через Z. Анализируя доказательство из [7], можно показать, что функция g может быть выбрана так, чтобы центры исключительных кругов лежали на множестве X (на котором сосредоточена риссовская мера).

Положим $E_{k,n} = 2^{6n} E_k$, $D_{k,n} = 2^{6n} D_k$, $E^{\pm}_{k,n} = 2^{6n} E^{\pm}_k$, $D^{\pm}_{k,n} = 2^{6n} D^{\pm}_k$. Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $B(\varepsilon)$ ε-окрестность множества B. Выберем числа ε_k так, чтобы множества $D_k(\varepsilon_k)$ попарно не пересекались, и рассмотрим замкнутые жордановы кривые $\Gamma^*_{k,n} = 2^{6n} \partial (D_k(\varepsilon_k))$. При фиксированном k в силу (8), (2) выполняется $\min\{u(z): z\in\Gamma^*_{k,n}\}\geqslant c_k 2^{6n\rho}$, $c_k>0$. Поэтому можно выбрать такие числа $\varepsilon_{k,n}\to 0$ при $n\to\infty$, $0<\varepsilon_{k,n}<\varepsilon_k$, что для кривых $\Gamma^{\pm}_{k,n}=2^{6n}\partial(D^{\pm}_k(\varepsilon_{k,n}))$ выполняется

$$\min\{u(z): z\in\Gamma^{\pm}_{k,n}\}\geqslant 2^{2n\rho},\quad n>n_0(k), \tag{11}$$

$$\Gamma^{\pm}_{k,n}\cap Z=\varnothing,\quad n>n_0(k). \tag{12}$$

Из (11), (12) и (9) следует

$$\min\{|g(z)|: z\in\Gamma^{\pm}_{k,n}\}>\exp 2^{n\rho}=R_n,\quad n>n_0(k). \tag{13}$$

Легко видеть, что $E_{k,n}\cap Z=\varnothing$ при $n>n_0(k)$, поэтому в силу (5), (8) и (9) выполняется

$$\log|g(z)|\leqslant(-x_k/2)\cdot 2^{6n\rho},\quad z\in E_{k,n},\quad n>n_0(k). \tag{14}$$

Лемма. *Пусть $a\in\mathbb{C}$, $|a|<R/4$. Тогда существует однолистное квазиконформное отображение α круга $\{z:|z|<R\}$ на себя такое, что $\alpha(z)=z$ при $|z|=R$ и $\alpha(z)=R^2(z+a)/(R^2+4\bar{a}z)$, $|z|<R/2$. Характеристика этого отображения отличается от 1 не более, чем на $64|a|/R$ всюду в круге $\{z:|z|<R\}$.*

Такое отображение можно указать в явном виде и вычислить его характеристику (ср. [3], гл. VII, § 2).

Пусть $A=\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество, заданное в условии теоремы. Воспользовавшись леммой, построим при достаточно больших $n>n_0(k)$ отображения $\alpha_{k,n}$ кругов $\{z:|z|<R_n\}$ в себя такие, что $\alpha_{k,n}(z)=z$, $|z|=R_n$;

$$\alpha_{k,n}(z)=R_n^2(z+a_k)/(R_n^2+4\bar{a}_k z),\quad |z|<R_n/2, \tag{15}$$

и характеристика этих отображений отличается от 1 не более, чем на $64|a_k|/R_n$. Рассмотрим компоненты $G^{\pm}_{k,n}$ множеств $\{z:|g(z)|<R_n\}$, содержащие $E^{\pm}_{k,n}$ соответственно. Такие компоненты непусты в силу (14). Из (13) следует, что области $G^{\pm}_{k,n}$ лежат внутри кривых $\Gamma^{\pm}_{k,n}$. Предположим, что числа $n_0(k)$ настолько велики, что при $n>n_0(k)$ области $G^{\pm}_{k,n}$ попарно не пересекаются, выполняются (13), (14), (15) и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=n_0(k)}^{\infty}|a_k|/R_n<\infty. \tag{16}$$

Рассмотрим функцию

$$g_1(z)=\begin{cases}(\alpha_{k,n}\circ g)(z), & z\in G^{\pm}_{k,n},\quad n>n_0(k),\\ g(z), & z\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty}(G^{+}_{k,n}\cup G^{-}_{k,n}).\end{cases}$$

Эта функция непрерывна, так как $\alpha_{k,n}(z)=z$ при $|z|=R_n$, и $|g(z)|=R_n$ при $z\in\partial G^{\pm}_{k,n}$. Функция g_1 является локально квазиконформным отображением всюду, кроме точек $z_n\to\infty$, в окрестности которых $g_1(z)=\varphi_m((z-z_m)^{p_m})$, где φ_m — квазиконформное отображение, $p_m\in\mathbb{N}$. Эта функция g_1 отображает плоскость $\mathbb{C}$ квазиконформно на некоторую односвязную риманову поверхность $\mathcal{F}$, не накрывающую точку ∞. Эта поверхность параболического типа, и существует целая функция f, конформно и однолистно отображающая $\mathbb{C}$ на $\mathcal{F}$. Суперпозиция

$$f^{-1}\circ g_1(z)=\Phi(z) \tag{17}$$

квазиконформно отображает плоскость на себя, причем характеристика $p(z)$ этого отображения удовлетворяет в силу (16) условию

$$\iint\limits_{\mathbb{C}}(p(z)-1)\,\frac{dxdy}{|z|^2}<\infty,\quad z=x+iy.$$

Отсюда по теореме О. Тейхмюллера — П. П. Белинского [8, с. 54] получаем

$$\Phi(z) \sim az, \quad z \to \infty, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{18}$$

Покажем, что построенная функция f обладает всеми нужными свойствами. В силу (7), (9), (17) и (18) выполняется

$$\log M(r, f) = O(r^\rho), \quad r \to \infty. \tag{19}$$

Из (14), (15) следует

$$\log |g_1(z) - a_k|^{-1} \geqslant \frac{x_k}{3} \cdot 2^{6n\rho}, \quad z \in E_{k,n}.$$

Отсюда получаем

$$\log |g_1(z) - a_k|^{-1} \geqslant x_k \cdot 2^{-12\rho} |z|^\rho, \quad z \in E_{k,n}, \tag{20}$$

потому что при $z \in E_{k,n}$ выполняется $|z| \leqslant 2^{8+6n}$.

Рассмотрим множества

$$T_k^+ = \{z : 2^{4,5} \leqslant |z| \leqslant 2^{7,5}, \ \theta_k' + 2\delta_k \leqslant \arg z \leqslant \theta_k - 2\delta_k\},$$

$$T_k^- = \{z : 2^{1,5} \leqslant |z| \leqslant 2^{4,5}, \ -\theta_k + 2\delta_k \leqslant \arg z \leqslant -\theta_k' - 2\delta_k\},$$

где θ_k и δ_k — числа, с помощью которых определены E_k. Положим $T_k = T_k^+ \cup T_k^-$, $T_k^* = \bigcup\limits_{n=n_0(k)}^{\infty} T_{k,n}$. В силу (17), (18) и (20) на множестве T_k^* выполняется $\log |f(z) - a_k|^{-1} \geqslant c_k |z|^\rho$. Поскольку множество T_k^* пересекается со всеми достаточно большими окружностями $\{z : |z| = r\}$ по дугам угловой меры не меньшей, чем δ_k, имеем $m(r, a_k, f) \geqslant (2\pi)^{-1} c_k \delta_k r^\rho$. Отсюда с учетом (19) следует $\delta(a_k, f) > 0$, и порядок функции f равен ρ. Кроме того, выполняется неравенство

$$T(2r, f) \leqslant C_0 T(r, f) \tag{21}$$

для некоторого $C_0 > 0$.

Докажем, что других дефектных значений нет. Для этого воспользуемся следующей теоремой А. Эдрея и В. Фукса (см., например, [3, с. 58]): для любого множества U на единичной окружности, мера которого не превышает ε, и для любого $a \in \mathbb{C}$ справедливо

$$\int\limits_U \log |f(re^{i\theta}) - a|^{-1} d\theta \leqslant C(\varepsilon) T(2r, f) + O(1), \quad r \to \infty,$$

где $C(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $\delta(a, f) > 0$ и $a \notin A$. Выберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось $(2\pi)^{-1} C_0 C(\varepsilon) < \delta(a, f)/2$, где C_0 — константа из (21). Пусть U — множество меры ε, состоящее из конечного числа открытых интервалов и содержащее все точки $0, \ \pm\theta_k, \ \pm\theta_k', \ k \in \mathbb{N}$. Дополнение к множеству U на $[0, 2\pi]$ состоит из конечного числа отрезков. На каждом из этих отрезков функция $f(2^{5,5+6n} e^{i\theta})$ равномерно стремится при $n \to \infty$ либо к одному из чисел $a_k \in A$, либо к ∞. Поэтому, если обозначить $r_n = 2^{5,5+6n}$, то $m(r_n, a, f) = (2\pi)^{-1} \int\limits_U \log^+ |f(r_n e^{i\theta}) - a|^{-1} d\theta + O(1) \leqslant (2\pi)^{-1} \times C_0 C(\varepsilon) T(r_n, f) < (\delta(a, f)/2) T(r_n, f)$ — противоречие. Теорема доказана.

1. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции.— М.; Л. : Гостехиздат, 1941.— 388 с.
2. *Хейман У.* Мероморфные функции.— М. : Мир, 1966.— 287 с.
3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 591 с.
4. *Аракелян Н. У.* Целые функции конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений // Докл. АН СССР.— 1966.— **170**, № 2.— С. 999—1002.
5. *Аракелян Н. У.* О проблеме Неванлинны // Мат. заметки.— 1968.— **3**, № 3.— С. 357—360.

6. *Аракелян Н. У.* Целые и аналитические функции ограниченного роста с бесконечным множеством дефектных значений // Изв. АН АрмССР. Математика.— 1970.— **5**, № 6.— С. 486—506.
7. *Азарин В. С.* О лучах вполне регулярного роста целой функции // Мат. сб.— 1969.— **79**, № 4.— С. 463—476.
8. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений.— Новосибирск : Наука, 1974.— 98 с.

Физ.-техн. ин-т низких температур
АН УССР, Харьков

Получено 23.05.85