УДК 517.91/94:519.3

*М. Г. Дмитриев, В. Н. Яньшин*

# Нелинейная периодическая задача оптимального управления для системы с малым параметром при части производных

Задачи периодической оптимизации представляют большой прикладной и теоретический интерес [1, 2]. Один из распространенных приемов определения периодических режимов связан с использованием малого параметра, поэтому представляет интерес изучение периодических задач оптимального управления асимптотическими методами. Метод осреднения применялся В. А. Плотниковым и его учениками [3]. Линейно-квадратичные задачи с сингулярно возмущенными связями изучались в [4, 5]. Простейший нелинейный неавтономный случай рассматривался в [6]. В настоящей статье рассматривается периодический аналог результатов из [7—9], обобщающий результаты из [6, 9]. Отметим при этом, что в работе [15] рассмотрена в линейной постановке аналогичная задача, но при более общих краевых условиях.

Рассмотрим следующую задачу: минимизировать функционал

$$J_\varepsilon(u) = \int_0^T F(z, u, t)\,dt \to \min \tag{1}$$

вдоль периодических траекторий системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, u, t), \quad x(0, \varepsilon) = x(T, \varepsilon), \quad x \in R^n, \\ \varepsilon\dot{y} &= g(x, y, u, t), \quad y(0, \varepsilon) = y(T, \varepsilon), \quad y \in R^m, \end{aligned} \tag{2}$$

где $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $u \in M$ — множество $r$-мерных $T$-периодических вектор-функций, $T$ — фиксированное положительное число. Введем следующее условие:

I. Все функции задачи (1), (2) $T$-периодичны и имеют непрерывные производные до четвертого порядка включительно.

Поставим задачу: построить асимптотическое приближение к экстремали задачи (1), (2) и выяснить вопрос о том, будет ли предел экстремали возмущенной задачи (1), (2) экстремалью задачи меньшей размерности, которую назовем предельной или вырожденной задачей $P_0$. Под размерностью задач оптимального управления будем понимать размерность фазового пространства.

Выпишем формально для оптимального управления соотношения принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\partial H/\partial x = -f'_x\psi_1 - g'_x\tilde{\psi}_2/\varepsilon + F_x, \quad \psi_1(T, \varepsilon) = \psi_1(0, \varepsilon), \\ \dot{\psi}_2 &= -\partial H/\partial y = -f'_y\psi_1 - g'_y\tilde{\psi}_2/\varepsilon + F_y, \quad \tilde{\psi}_2(T, \varepsilon) = \tilde{\psi}_2(0, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\partial H/\partial u = 0, \tag{4}$$

где $H = \psi'_1 f + \tilde{\psi}'_2 g/\varepsilon - F$, $\psi_1$ и $\tilde{\psi}_2$ — сопряженные переменные, штрих означает транспонирование. Условия периодичности на $\psi_1$, $\tilde{\psi}_2$ получены из условий трансверсальности. Предположим, что оптимальное управление не особое в смысле принципа максимума, тогда из (4) находим $u = \alpha(x, y, \psi_1, \tilde{\psi}_2/\varepsilon, t)$. Подставляя $u$ в (2), (3), приходим к формальной краевой задаче принципа максимума. Вводя функцию $\tilde{\psi}_2 = \varepsilon\psi_2$, приходим к задаче

$$\dot{X} = h(X, Y, t) = I_n H_X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\varepsilon \dot{Y} = q(X, Y, t) = I_m H_Y, \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

$$x(0, \varepsilon) = x(T, \varepsilon), \quad \psi_1(0, \varepsilon) = \psi_1(T, \varepsilon), \quad y(0, \varepsilon) = y(T, \varepsilon), \quad \psi_2(0, \varepsilon) = \psi_2(T, \varepsilon), \tag{6}$$

где $I_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$.

Асимптотическое разложение периодического решения задачи (5), (6) будем искать с помощью регулярного ряда метода пограничных функций [10, 11], т. е. ряда по целым степеням $\varepsilon$, с коэффициентами, зависящими от $t$, учитывая, что при наложенных ниже условиях погранфункции тождественно равны нулю. Итак

$$Z = \bar{Z}_0 + \varepsilon \bar{Z}_1 + \ldots, \quad Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Ограничимся построением первых двух членов в разложении (7). Подставляя (7) в (5) и (6), в нулевом приближении имеем

$$\begin{gathered} \dot{\bar{x}}_0 = f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \alpha(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{\psi}_{10}, \bar{\psi}_{20}, t), t) = \bar{f}_0, \\ \dot{\bar{\psi}}_{10} = -\partial \bar{H}/\partial x, \\ 0 = g(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \alpha(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{\psi}_{10}, \bar{\psi}_{20}, t), t) = \bar{g}_0, \\ 0 = -\partial \bar{H}/\partial y, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\bar{x}_0(0) = \bar{x}_0(T, x_0^0, \psi_{10}^0), \quad \bar{\psi}_{10}(0) = \bar{\psi}_{10}(T, x_0^0, \psi_{10}^0). \tag{9}$$

Здесь и далее чертой сверху обозначаются функции, вычисленные вдоль $(\bar{x}_0, \bar{\psi}_{10}, \bar{y}_0, \bar{\psi}_{20})$.

Решение задачи (8), (9) определяется как функция $t$ и неизвестных параметров $x_0^0$ и $\psi_{10}^0$: $(\psi_1^0 = \psi_1(0, \varepsilon) = \psi_{10}^0 + \varepsilon \psi_{11}^0 + \ldots;\ x^0 = x(0, \varepsilon) = x_0^0 + \varepsilon x_1^0 + \ldots)$. Из условия (6) получаем

$$R^1 = x_0^0 - \bar{x}_0(T, x_0^0, \psi_{10}^0) = 0, \quad R^2 = \psi_{10}^0 - \bar{\psi}_{10}(T, x_0^0, \psi_{10}^0) = 0. \tag{10}$$

Эта система является системой $2n$ уравнений для определения $2n$ неизвестных — компонентов векторов $\psi_{10}^0$ и $x_0^0$. Введем следующие условия.

IIа. Система $q(X, Y, t) = 0$ имеет решение $Y = L(X, t)$.

IIб. Система уравнений в вариациях

$$\frac{d}{dt} \Delta = \frac{d}{dx} h(X, L(X, t), t) \Big|_{\substack{x = \bar{x}_0 \\ y = \bar{u}_0 \\ \psi_1 = \bar{\psi}_{10} \\ \psi_2 = \bar{\psi}_{20}}} \Delta$$

не имеет нетривиальных решений с периодом $T$.

Заметим, что из условий II следует, что функциональный определитель $\Delta_0 = \begin{Vmatrix} \partial R^1/\partial \psi_{10}^0 & \partial R^1/\partial x_0^0 \\ \partial R^2/\partial \psi_{10}^0 & \partial R^2/\partial x_0^0 \end{Vmatrix} \neq 0$ и, таким образом, система (10) имеет единственное решение $(\psi_{10}^0, x_0^0)$. Действительно [12], наличие нетривиального решения с периодом $T$ означало бы, что матрица монодромии $A$ имеет инвариантный вектор и, следовательно, характеристическое уравнение $\det \| A - \lambda E \| = 0$ имеет корень $\lambda = 1$ (т. е. существует мультипликатор, равный единице). Но условие того, что (10) не имеет равных единице корней, равносильно условию $\Delta_0 \neq 0$ [12].

Введем вспомогательную задачу меньшей размерности:

$$\hat{J}(\hat{y}, \hat{u}) = \int_0^T F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, t)\, dt \to \min, \tag{11}$$

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, t), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}(T), \quad 0 = g(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, t), \tag{12}$$

где управлениями являются $\hat{y}$ и $\hat{u}$.

Предположим выполнение следующих условий.

IIIа. Оптимальное периодическое управление $(\hat{y}(t), \hat{u}(t))$ существует, единственно и является непрерывным, изолированным решением системы

$$\partial\hat{H}/\partial\hat{y} = 0, \quad \partial\hat{H}/\partial\hat{u} = 0, \tag{13}$$

где $\hat{H} = \hat{\psi}_1' f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, t) + \hat{\psi}_2' g(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, t) - F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, t)$, $\hat{\psi}_1$, $\hat{\psi}_2$ — сопряженные переменные принципа максимума для задачи (11), (12), для которых, по определению, справедливы соотношения

$$\dot{\hat{\psi}}_1' = -\partial\hat{H}/\partial\hat{x}, \quad \hat{\psi}_1(T) = \hat{\psi}_1(0). \tag{14}$$

IIIб. Решение краевой задачи (12) — (14), соответствующее $(\hat{y}, \hat{u})$, единственно.

IV. Вдоль решения задачи (11), (12) для всех $t \in [0, T]$ выполняется условие Лежандра — Клебша, т. е. матрица $\begin{pmatrix} \hat{H}_{\hat{y}\hat{y}} & \hat{H}_{\hat{y}\hat{u}} \\ \hat{H}_{\hat{u}\hat{y}} & \hat{H}_{\hat{u}\hat{u}} \end{pmatrix}$ является отрицательно полуопределенной, и при этом дополнительно предполагаем, что $\hat{H}_{\hat{y}\hat{y}} \leqslant 0$, $\hat{H}_{\hat{u}\hat{u}} < 0$.

Из условия IV следует, что $\hat{Q} = -\hat{H}_{\hat{y}\hat{y}} + \hat{H}_{\hat{y}\hat{u}}\hat{H}^{-1}_{\hat{u}\hat{u}}\hat{H}'_{\hat{y}\hat{u}} \geqslant 0$ и существует функция $\hat{u} = \hat{\alpha}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, t)$, удовлетворяющая системе $\hat{H}_{\hat{u}} = 0$. Подставляя $\hat{\alpha}$ в (12) — (14), приходим, как нетрудно видеть, к уравнениям (8).

Из условия III в силу единственности решения задачи (11), (12) имеем $\hat{x} = \bar{x}_0$, $\hat{y} = \bar{y}_0$, $\hat{u} = \hat{\alpha} = \bar{u}_0$, $\hat{\psi}_1 = \bar{\psi}_{10}$, $\hat{\psi}_2 = \bar{\psi}_{20}$.

Одно из основных требований метода пограничных функций — условие условной устойчивости — определяется спектром основной функциональной матрицы сингулярно возмущенной задачи (5), (6), вычисленной на вырожденном решении задачи, т. е. на решении задачи (11), (12). Эта матрица имеет вид

$$G = \left(\begin{array}{c|c} \bar{g}_y + \bar{g}_u \left(\dfrac{\overline{\partial\alpha}}{\partial y}\right)' & \dfrac{\overline{\partial g}}{\partial u}\left(\dfrac{\overline{\partial\alpha}}{\partial\psi_2}\right)' \\ \hline -\bar{H}_{yy} - \bar{H}_{yu}\left(\dfrac{\overline{\partial\alpha}}{\partial y}\right)' & -(\bar{g}_y)' - \bar{H}_{yu}\left(\dfrac{\overline{\partial\alpha}}{\partial\psi_2}\right)' \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \bar{A} + \bar{B}\left(\dfrac{\overline{\partial\alpha}}{\partial y}\right)' & \bar{B}\left(\dfrac{\overline{\partial\alpha}}{\partial\psi_2}\right)' \\ \hline -\bar{H}_{yy} - \bar{H}_{yu}\left(\dfrac{\overline{\partial\alpha}}{\partial y}\right)' & -\bar{A}' - \bar{H}_{yu}\left(\dfrac{\overline{\partial\alpha}}{\partial\psi_2}\right)' \end{array}\right),$$

где $A = g_y$, а $B = g_u$. Далее, учитывая, что $\bar{H}_{uy} + \bar{H}_{uu}\left(\dfrac{\overline{\partial\alpha}}{\partial y}\right)' = 0$ и $\bar{H}_{u\psi_2} + \bar{H}_{uu}\left(\dfrac{\overline{\partial\alpha}}{\partial\psi_2}\right)' = 0$ или $\bar{B}' + \bar{H}_{uu}\left(\dfrac{\overline{\partial\alpha}}{\partial\psi_2}\right)' = 0$, при условии III имеем

$$G = \left(\begin{array}{c|c} \bar{A} - \bar{B}\bar{H}^{-1}_{uu}\bar{H}_{uy} & -\bar{B}\bar{H}^{-1}_{uu}\bar{B}' \\ \hline -\bar{H}_{yy} + \bar{H}_{yu}\bar{H}^{-1}_{uu}\bar{H}'_{yu} & -\bar{A}' + \bar{H}_{yu}\bar{H}^{-1}_{uu}\bar{B}' \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \tilde{A} & S \\ \tilde{Q} & -\tilde{A}' \end{pmatrix},$$

так как $\bar{H}_{uy} = (\bar{H}_{yu})'$, $S = -\bar{B}\bar{H}^{-1}_{uu}\bar{B}' \geqslant 0$.

Введем следующее условие.

V. Пара матриц $\{\bar{A}(t), \bar{B}(t)\}$ вполне управляема для каждого $t \in [0, T]$, а пара $\{\bar{C}(t), \bar{A}(t)\}$ вполне наблюдаема для каждого $t \in [0, T]$, где $\bar{C}'\bar{C} = \tilde{Q}(t)$.

Лемма 1. *В условиях* III — V *имеем:*

а) *спектр матрицы $G$ состоит из двух групп собственных значений; в первой группе находятся $\lambda_i(G)$ такие, что $\operatorname{Re}\lambda_i(G) < 0$, $i = \overline{1, n}$, а во второй — те $n$ собственных значений матрицы $G$, для которых $\operatorname{Re}\lambda_i(G) > 0$, $i = \overline{n+1, 2n}$;*

б) *существует преобразование подобия*

$$D(t) = \begin{pmatrix} E & E \\ -M_1(t) & -M_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}, \quad D(T) = D(0),$$

*такое, что*

$$D^{-1}(t)\, G(t)\, D(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) & 0 \\ 0 & \beta_2(t) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\det D_{11}(0) \neq 0, \quad \det D_{22}(T) \neq 0, \quad \operatorname{Re}\lambda(\beta_1) < 0, \quad \operatorname{Re}\lambda(\beta_2) > 0.$$

*Здесь $\beta_1 = \tilde{A} - SM_1$, $\beta_2 = \hat{A} - SM_2$, а $M_1$ и $M_2$ — положительно определенное и отрицательно определенное решение уравнения Риккати*

$$-M\tilde{A}(t) - \tilde{A}'(t)M + MS(t)M - \tilde{Q} = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{16}$$

Доказательство проводится так же, как и в работе [8]. Свойства (15) матрицы $D(t)$ проверяются непосредственно.

Заметим, что в силу леммы 1 условие IIа выполняется и, следовательно, его можно теперь опустить. Таким образом, наложенные нами условия III—V приводят к выполнению условной устойчивости в сингулярно возмущенной краевой задаче (5), (6) и существованию преобразования подобия матрицы $G$ с требуемыми свойствами [10, 11].

Перейдем к построению первого приближения. Имеем

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{f}_x(t)\bar{x}_1 + \bar{f}_y(t)\bar{y}_1 + \bar{f}_u(t)\bar{u}_1,$$

$$\dot{\bar{\psi}}_{11} = -\bar{H}_{xx}(t)\bar{x}_1 - \bar{H}_{x\psi_1}(t)\bar{\psi}_{11} - \bar{H}_{xy}(t)\bar{y}_1 - \bar{H}_{x\psi_2}(t)\psi_{21} - \bar{H}_{xu}(t)\bar{u}_1, \tag{17}$$

$$\dot{\bar{y}}_0 = \bar{g}_x(t)\bar{x}_1 + \bar{g}_y(t)\bar{y}_1 + \bar{g}_u(t)\bar{u}_1,$$

$$\dot{\bar{\psi}}_{21} = -\bar{H}_{yx}(t)\bar{x}_1 - \bar{H}_{y\psi_1}(t)\bar{\psi}_{11} - \bar{H}_{yy}(t)\bar{y}_1 - \bar{H}_{y\psi_2}(t)\bar{\psi}_{21} - \bar{H}_{yu}(t)\bar{u}_1,$$

$$0 = \bar{H}_{ux}(t)\bar{x}_1 + \bar{H}_{u\psi_1}(t)\bar{\psi}_{11} + \bar{H}_{uy}(t)\bar{y}_1 + \bar{H}_{u\psi_2}(t)\bar{\psi}_{21} + \bar{H}_{uu}(t)\bar{u}_1. \tag{18}$$

Здесь $\bar{u}_1 = \overline{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}}\bar{x}_1 + \overline{\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}}\bar{y}_1 + \overline{\dfrac{\partial\alpha}{\partial\psi_1}}\bar{\psi}_{11} + \overline{\dfrac{\partial\alpha}{\partial\psi_2}}\bar{\psi}_{21}$.

Из (6) для первого приближения имеем

$$\bar{x}_1(0) = \bar{x}_1(T, x_1^0, \psi_{11}^0), \quad \bar{\psi}_{11}(0) = \bar{\psi}_{11}(T, x_1^0, \psi_{11}^0). \tag{19}$$

Решения первых двух уравнений из (17) являются функциями пока еще неизвестных параметров $x_1^0$ и $\psi_{11}^0$. Поэтому (19) представляет собой систему для определения $2n$ неизвестных — компонентов векторов $\psi_{11}^0$ и $x_1^0$.

Нетрудно проверить, дифференцируя (8) и (17) по $x_0^0$ и $x_1^0$, что $\Delta_0 \equiv \Delta_1$.

Преобразуем (17). Имеем, учитывая (18) и $\bar{H}_{u\psi_1} = \bar{f}_u$, $\bar{H}_{u\psi_2} = \bar{g}_u$,

$$\dot{\bar{x}}_1 = A_1(t)\bar{x}_1 + A_2(t)\bar{y}_1 + S_1(t)\bar{\psi}_{11} + S_2(t)\bar{\psi}_{21},$$

$$\dot{\bar{\psi}}_{11} = Q_1(t)\,\bar{x}_1 + Q_2(t)\,\bar{y}_1 - A_1'(t)\,\bar{\psi}_{11} - A_3'(t)\,\bar{\psi}_{21},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{y}}_0 \\ \dot{\bar{\psi}}_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3(t)\,\bar{x}_1 + A_4(t)\,\bar{y}_1 + S_2'(t)\,\bar{\psi}_{11} + S_3(t)\,\bar{\psi}_{21} \\ Q_2'(t)\,\bar{x}_1 + Q_3(t)\,\bar{y}_1 - A_2'(t)\,\bar{\psi}_{11} - A_4'(t)\,\bar{\psi}_{21} \end{pmatrix} = \tag{20}$$

$$= \begin{pmatrix} A_3 & S_2' \\ Q_2' & -A_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{\psi}_{11} \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{\psi}_{21} \end{pmatrix},$$

где

$$A_1 = \bar{f}_x - \bar{f}_u \bar{H}_{uu}^{-1} \bar{H}_{ux}, \quad A_2 = \bar{f}_y - \bar{f}_u \bar{H}_{uu}^{-1} \bar{H}_{uy}, \quad A_3 = \bar{g}_x - \bar{g}_u \bar{H}_{uu}^{-1} \bar{H}_{ux},$$

$$A_4 = \bar{g}_y - \bar{g}_u \bar{H}_{uu}^{-1} \bar{H}_{uy}, \quad S_1 = B_1 R^{-1} B_1', \quad S_2 = B_1 R^{-1} B_2', \quad S_3 = B_2 R^{-1} B_2'$$

$$(B_1 = \bar{f}_u, \; R = -\bar{H}_{uu}, \; B_2 = \bar{g}_u = \bar{B}), \quad Q_1 = -\bar{H}_{xx} + \bar{H}_{xu} \bar{H}_{uu}^{-1} \bar{H}_{ux},$$

$$Q_2 = -\bar{H}_{xy} + \bar{H}_{xu} \bar{H}_{uu}^{-1} \bar{H}_{uy}, \quad Q_3 = -\bar{H}_{yy} + \bar{H}_{yu} \bar{H}_{uu}^{-1} \bar{H}_{uy} = \tilde{Q}.$$

Положим $\bar{y}_0 \equiv 0$, $\bar{\psi}_{20} \equiv 0$, тогда $\bar{y}_1 = -\alpha^{-1}(A_3 + S_3 E_2')\,\bar{x}_1 - \alpha^{-1}(S_2' + S_3 E_1')\,\bar{\psi}_{11}$, $\bar{\psi}_{21} = -\bar{K}_3 \bar{y}_1 + E_2' \bar{x}_1 + E_1' \bar{\psi}_{11}$ $(\alpha = A_4 - S_3 \bar{K}_3,\; E_2 = (A_3' \bar{K}_3 + Q_2)\,\alpha^{-1},\; E_1 = (S_2 \bar{K}_3 - A_2)\,\alpha^{-1},\; \bar{K}_3 = M_1$ — положительно определенное решение уравнения (16)) будут решением системы конечных уравнений. Это можно проверить непосредственной подстановкой в (20). Следовательно, решение конечных уравнений запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{\psi}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^{-1}(A_3 + S_3 E_2')\,\bar{x}_1 - \alpha^{-1}(S_2' + S_3 E_1')\,\bar{\psi}_{11} \\ \bar{K}_3 \alpha^{-1}(A_3 + S_3 E_2')\,\bar{x}_1 + K_3 \alpha^{-1}(S_2' + S_3 E_1')\,\bar{\psi}_{11} + E_2' \bar{x}_1 + E_1' \bar{\psi}_{11} \end{pmatrix} +$$

$$+ G^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\bar{y}}_0 \\ \dot{\bar{\psi}}_{20} \end{pmatrix}.$$

После преобразований получим уравнение

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{\psi}}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} R^{-1} \hat{B}' \\ \hat{Q} & -\hat{A}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{\psi}_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 & S_2 \\ Q_2 & -A_3' \end{pmatrix} G^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\bar{y}}_0 \\ \dot{\bar{\psi}}_{20} \end{pmatrix} =$$

$$= \tilde{A} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{\psi}_{11} \end{pmatrix} + \tilde{f}(t) \tag{20'}$$

с условием (19). Здесь $\hat{A} = A_1 + E_1 A_3 + E_1 S_3 E_2' + S_2 E_2'$, $\hat{B} = E_1 B_2 + B_1$, $\hat{Q} = Q_1 - A_3' E_2' - E_2 A_3 - E_2 S_3 E_2'$.

Рассмотрим теперь однородную задачу, соответствующую задаче (20′), (19).

Введем условие.

VI. Пара матриц $(\hat{A}, \hat{B})$ стабилизируема, а пара матриц $(\hat{Q}^{1/2}, \hat{A})$ детектируема в смысле [13].

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Линейная неоднородная периодическая система* (20′), (19) *при условии* VI *имеет единственное периодическое решение периода* $T$, *т. е. задача (17) — (19) однозначно разрешима.*

Доказательство. При условии VI согласно [13] имеем, что мультипликаторы системы (20′) не лежат на единичной окружности. Отсюда и из [14] следует, что однородная задача, соответствующая задаче (20′), (19), не имеет нетривиальных периодических решений. Теперь, согласно [14], система (20′), (19) имеет единственное периодическое решение периода $T$.

Заметим, что в силу леммы 2 условие IIб теперь выполнено.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При выполнении условий* I, III—VI *найдутся постоянные* $\varepsilon_0 > 0$, $c > 0$ *такие, что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *в некоторой окрестности решения задачи* (11), (12) *существует единственное решение краевой задачи* (5), (6) *и справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]} (\| X(t, \varepsilon) - X_1(t, \varepsilon) \|, \; \| Y(t, \varepsilon) - Y_1(t, \varepsilon) \|) \leqslant c\varepsilon^2,$$

*где* $X_1$, $Y_1$ — *частичные суммы первого порядка разложения* (7).

Доказательство проводим по схеме для непериодического случая [8, 9]. Согласно лемме 1 выполняется условие условной устойчивости. Там же построено преобразование подобия $D(t)$ (15) основной функциональной матрицы $G$ задачи (5), (6), приводящее $G$ к блочно-диагональному виду, при этом $\det D_{11}(0) \neq 0$, $\det D_{22}(T) \neq 0$. По лемме 2 уравнения первого приближения (17)—(19) однозначно разрешимы. Кроме того, выше показано, что $\Delta_0 \equiv \Delta_1 \neq 0$. Теперь мы находимся в условиях теоремы из [10, 11] по условно устойчивому случаю, откуда и следует утверждение теоремы. Отсутствие пограничных функций доказывается так же, как в [10], для периодической условно устойчивой краевой задачи.

В заключение сформулируем теорему, которую можно доказать аналогично [8, 9] для непериодического случая. Введем $u_0(t, \varepsilon) = \hat{u}(t)$, где $\hat{u}(t)$ определено выше и $u_1(t, \varepsilon) = u_0(t, \varepsilon) + \varepsilon\bar{u}_1(t)$, где $\bar{u}_1(t) = -\bar{H}^{-1}(\bar{H}_{ux}\bar{x}_1 + \bar{H}_{u\psi_1}\bar{\psi}_{11} + \bar{H}_{uy}\bar{y}_1 + \bar{H}_{u\psi_2}\bar{\psi}_{21})$.

Решение краевой задачи (5), (6) определяет экстремальное управление в исходной задаче

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* I, III — VI *и, кроме того,* $\operatorname{Re}\lambda(\bar{A}(t)) < 0$; $t \in [0, T]$. *Тогда существуют постоянные* $\varepsilon_0 > 0$, $c > 0$, *такие, что:*

1) $\max\limits_{t\in[0,T]} \| u(t, \varepsilon) - u_0(t, \varepsilon) \| \leqslant c\varepsilon$, $\max\limits_{t\in[0,T]} \| u(t, \varepsilon) - u_1(t, \varepsilon) \| \leqslant c\varepsilon^2$;

2) $| J_\varepsilon(u(t, \varepsilon)) - J_\varepsilon(u_0) | \leqslant c\varepsilon^2$, $| J_\varepsilon(u(t, \varepsilon)) - J_\varepsilon(u_1) | \leqslant c\varepsilon^4$;

3) *если* $u(t, \varepsilon)$ — *оптимальное периодическое управление, то* $J_\varepsilon(u_0) - J_\varepsilon^* \leqslant c\varepsilon^2$, $J_\varepsilon(u_1) - J_\varepsilon^* \leqslant c\varepsilon^4$.


1. *Тонков Е. Л.* Оптимальные периодические движения управляемой системы // Мат. физика.— 1977.— Вып. 21.— С. 45—59.
2. *Тонков Е. Л.* Некоторые вопросы управления периодическими движениями // Динамика управляемых систем.— Новосибирск : Наука, 1979.— С. 286—293.
3. *Плотников В. А.* Асимптотические методы в задачах оптимального управления : Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Л., 1980.— 31 с.
4. *Дмитриев М. Г.* О сингулярных возмущениях в линейной периодической задаче оптимального управления с квадратичным функционалом // Proc. ... Int. Conf. Nonlinear Oscillat., Prague, 1978.— Prague : Academia, Publishing of the Czechoslovak Academy of Sciences.— 1979.— 2.— P. 861—866.
5. *Дмитриев М. Г., Мурадова Н. Д.* Обоснование идеализации математической модели одной задачи периодической оптимизации // Изв. АН ТССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук.— 1980.— № 3.— С. 6—12.
6. *Дмитриев М. Г., Мурадова Н. Д.* Регуляризация периодических задач оптимального управления // IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Приложения методов теории нелинейн. колебаний в механике, физике, электротехнике, биологии.— Киев : Наук. думка, 1984.— Т. 3.— С. 96—99.
7. *Васильева А. Б., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки. Мат. анализ / ВИНИТИ.— 1982.— 20.— С. 3—77.
8. *Дмитриев М. Г.* Пограничный слой в задачах оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1983.— № 4.— С. 63—69.
9. *Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления : Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— М., 1984.— 24 с.
10. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М. : Наука, 1973.— 242 с.
11. *Васильева А. Б., Есипова В. А.* Условно устойчивые сингулярно возмущенные системы // Докл. АН СССР.— 1974.— 216, № 1.— С. 17—20.
12. *Васильева А. Б.* Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Успехи мат. наук.— 1963.— 18, вып. 3.— С. 15—86.

13. *Kano H., Nishimura T.* Periodic solutions of matrix Riccati equations with detectability and stabilizability // Intern. J. Control.— 1979.— 29, N 3.— P. 471—487.
14. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 472 с.
15. *Алиев Ф. А.* Выбор программы движения шагающего аппарата с почти невесомыми ногами // Системы навигации и управления.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 85—97.

ВЦ СО АН СССР, Красноярск

Получено 11.05.85