УДК 517.956

Ю. Е. Бохонов

О линейных параболических и эллиптических системах с конечномерным и бесконечномерным аргументом

В настоящей работе рассматривается задача Коши для линейной параболической системы второго порядка для функции, зависящей от конечномерного, а впоследствии бесконечномерного аргумента, причем количество уравнений в системе может быть как конечным, так и бесконечным. С помощью результатов, которые получены для параболической системы, исследована эллиптическая система, заданная на всем пространстве изменения аргумента. Подобные системы в более общем случае, но при предположениях большей гладкости коэффициентов, рассматривались в [1—3]. В предлагаемой работе при минимальных условиях гладкости некоторых коэффициентов системы с конечномерным аргументом, имеющей более специальный вид, чем в [1—3], удается получить оценки, не зависящие от размерности аргумента, не только для решений и их производных, но также для их гельдеровских норм. Это позволяет понизить требования гладкости некоторых коэффициентов системы с бесконечномерным аргументом по сравнению с [1—3] для установления корректности задачи Коши для параболической системы или разрешимости эллиптической системы и доказать соответствующие оценки для их решений.

С помощью приема, описанного в [1—4], параболическая система приводится к параболическому уравнению относительно скалярной функции, которое исследуется путем проектирования (по аргументу) в конечномерные подпространства с последующим предельным переходом (аналогично исследуется эллиптическая система). Этот прием позволяет доказать упомянутые оценки.

В координатном представлении параболическая система имеет вид

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = (\mathfrak{A}u)_s \equiv \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} v_{rj}v_{rk}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial u_s}{\partial x_k} +$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{k,r=1}^{n} \alpha_{r\sigma}^{s}(x)\, v_{jk}\frac{\partial u_\sigma}{\partial x_k} + \sum_{\sigma=1}^{m} c_{s\sigma}(x)\, u_\sigma, \quad u_s(x, 0) = u_{0,s}(x),$$

$$s = 1, \ldots, m, \quad m, n \leqslant \infty. \tag{1}$$

Пусть $H_\alpha \leqslant H_0 \leqslant H_{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, — шкала гильбертовых пространств, Y — гильбертово пространство (все они предполагаются вещественными и сепарабельными), $L_n(H_{-\alpha}\times\ldots\times H_{-\alpha}, Y)$ — пространство n линейных операторов из $H_{-\alpha}\times\ldots\times H_{-\alpha}$ в Y (при $n=1$ используем обозначение $L(H_{-\alpha}, Y)$), $L_{n,2}(H_{-\alpha}\times\ldots\times H_{-\alpha}, Y)$ — пространство операторов Гильберта — Шмидта с нормой $\sigma_2(\cdot)$. Если $u: H_{-\alpha} \to Y$ — гладкая функция, то $u^{(n)}(x) \in L_n(H_{-\alpha}\times\ldots\times H_{-\alpha}, Y)$ (производная в смысле Фреше). Используя обозначение $\nabla u(x) = u'(x)$ и считая, что коэффициенты системы при $x \in H_{-\alpha}$ принадлежат пространствам

$$A \equiv V^*V,\ V \in L_{1,2}(H_\alpha, H_0),\ a \in H_\alpha,\ \alpha(x) \in L_{2,2}(H_0 \times Y, Y),$$

$$c(x) \in L(Y, Y), \tag{2}$$

представим систему (1) в следующем виде:

$$\partial u/\partial t = \mathfrak{A}u \equiv \left(\frac{1}{2}(A\nabla, \nabla) + (a, \nabla) + \alpha(x)(V\nabla;\ \cdot) + c(x)\right)u,$$
$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{3}$$

Оператор $\mathfrak{A}$ естественно назвать эллиптическим, так как $A = V^*V \geqslant 0$. Заметим, что A и a предполагаются не зависящими от x. Наряду с (3) удобно рассматривать так называемую ассоциированную задачу Коши для скалярной функции $\tilde{u} : (\tilde{x}, t) \equiv (x, y, t) \in H_{-\alpha} \times Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\partial\tilde{u}/\partial t = \tilde{\mathfrak{A}}\tilde{u} \equiv \left\{\left[\frac{1}{2}(A\nabla_x, \nabla_x)_{H_0} + \alpha_y(x)(V\nabla_x; \nabla_y) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}(\alpha_y(x)\alpha_y^*(x)\nabla_y, \nabla_y)_Y\right] + [(a, \nabla_x)_{H_0} + (c^*(x)y, \nabla_y)_Y]\right\}\tilde{u} \equiv$$
$$\equiv \left(\frac{1}{2}(\tilde{A}(\tilde{x})\nabla, \nabla) + (\tilde{a}(\tilde{x}), \nabla)\right)\tilde{u},\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) = (u_0(x), y), \tag{4}$$

где $\nabla = \nabla_x \oplus \nabla_y$, $\alpha_y = (y, \alpha)_Y$.

Из (4) следует, что $\tilde{\mathfrak{A}}$ — эллиптический оператор. Между $\mathfrak{A}$ и $\tilde{\mathfrak{A}}$ существует связь

$$\tilde{\mathfrak{A}}(u, y)_Y = (\mathfrak{A}u, y)_Y, \tag{5}$$

в результате чего появляется возможность распространять различные результаты, полученные для одного уравнения, на случай систем (см., например, [4]).

В дальнейшем под $C^r(H_{-\alpha}, L_n(Z, Y))$ будем понимать пространство функций, непрерывных и ограниченных на любом ограниченном в $H_{-\alpha}$ множестве, принимающих значения в банаховом пространстве $L_n(Z, Y)$, имеющих непрерывные и ограниченные на всем $H_{-\alpha}$ производные по x вплоть до порядка r, причем производные в каждой точке $x \in H_{-\alpha}$ являются операторами Гильберта — Шмидта в соответствующих пространствах; пространство функций с ограниченными гельдеровскими нормами $\langle\cdot\rangle_x^\gamma$ r-й производной по x обозначим через $C^{r+\gamma}(H_{-\alpha}, L_n(Z, Y))$. Здесь

$$\langle u\rangle_x^\gamma = \sup_{h=(h_1, h_2, \ldots)\in H_{-\alpha}} \left(\sum_i \left\|\frac{u(x+h_i) - u(x)}{h_i^\gamma}\right\|^2\right)^{1/2}, \quad \gamma \in (0, 1].$$

Пусть коэффициенты системы принадлежат пространствам $C^r(H_{-\alpha}, L_n(Z, Y))$, где для каждого коэффициента пространство Z определено в (2) (будем говорить, что система принадлежит классу C^r), $u_0 \in C^2(H_{-\alpha}, Y)$ и выполняется условие

$$\sigma_2^2(\alpha_y(x)) + (c(x)y, y) \leqslant \omega\|y\|^2. \tag{6}$$

Тогда при $r = 2$ доказано (см., например, [1]), что задача Коши (3) корректна, ее решение порождается σ-аддитивной операторной мерой $\mu_{x,t}$ (в случае (4) — вероятностной мерой $\tilde{\mu}_{\tilde{x},t}$) по формуле

$$u(x, t) = \int_{H_{-\alpha}} u_0(x')\mu_{x,t}(dx') \equiv \langle u_0, \mu_{x,t}\rangle. \tag{7}$$

При этом справедливы следующие оценки:

$$\int_{H_{-\alpha}\times Y} \|\tilde{x}'\|^2\tilde{\mu}_{\tilde{x},t}(d\tilde{x}') \leqslant (\|\tilde{x}\|^2 + Kt)\exp\omega t, \tag{8}$$

$$\int_{H_{-\alpha}\times Y} \|y'\|^2\tilde{\mu}_{\tilde{x},t}(d\tilde{x}') \leqslant \|y\|^2\exp\omega t, \tag{8a}$$

$$\sup_x \| u(x, t) \| \leqslant \sup_x \| u_0(x) \| \exp \omega t, \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{r} \sup_x \sigma_2^2 (u^{(k)}(x, t)) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \sup_x \sigma_2^2 (u_0^{(k)}(x)) \exp \omega_k t. \tag{10}$$

Коэффициенты в правых частях (8), (9) зависят от коэффициентов в правой части (6), в (10) — от производных коэффициентов (3).

Легко видеть, что (9) следует из (8а):

$$\| u \|^2 = \sup_{\|y\|=1} | (u, y)_Y |^2 = \sup_{\|y\|=1} | \langle (u_0, y'), \tilde{\mu}_{\tilde{x},t} \rangle |^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x \| u_0(x) \|^2 \sup_{\|y\|=1} \langle \| y' \|^2, \tilde{\mu}_{\tilde{x},t} \rangle.$$

Аналогично доказывается (10). Следует только заметить, что после дифференцирования обеих частей (3) по x и объединения результата с (3), получается система такого же вида, как и (3); такая же ситуация имеет место при дальнейших дифференцированиях.

Оценим гельдеровские нормы решения системы (3) и его производных. Введем обозначения:

$$\bar{h}_i = (0, \ldots, 0, h_i, 0, \ldots, 0), \qquad i \leqslant n < \infty,$$

$$g^{h_i^\gamma}(x) = \frac{g(x + \bar{h}_i) - g(x)}{h_i^\gamma}, \ g^{h^\gamma} = (g^{h_1^\gamma}, \ldots, g^{h_n^\gamma}), \qquad \gamma \in (0, 1]. \tag{11}$$

Теперь, следуя [5, с. 96], исходя из (1), получаем систему, которой удовлетворяют функции $u^{h_i^\gamma}$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\partial u^{h_i^\gamma} / \partial t = \mathfrak{A} u^{h_i^\gamma} + \alpha^{h_i^\gamma}(x) (V\nabla; u) + h_i^\gamma \alpha^{h_i^\gamma} (V\nabla; u^{h_i^\gamma} +$$

$$+ c^{h_i^\gamma}(x) u + h_i^\gamma c^{h_i^\gamma} u^{h_i^\gamma}, \ u^{h_i^\gamma}(x, 0) = u_0^{h_i^\gamma}. \tag{12}$$

Объединение (3) и (12) дает систему вида (3), поэтому справедлива оценка

$$\sup_x \| u(x, t) \|^2 + \sup_x (\langle u(x, t) \rangle_x^\gamma)^2 \leqslant \sup_x \| u_0(x) \|^2 \exp \omega t +$$

$$+ \sup_x (\langle u_0 \rangle_x^\gamma)^2 \exp \omega_1 t, \tag{13}$$

где константы в правой части зависят от коэффициентов в (6) и гельдеровских норм коэффициентов системы. В случае системы класса $C^{r+\gamma}$ можно получить следующие оценки:

$$\sum_{k=1}^{r} \sup_x \sigma_2^2 (u^{(k)}(x, t)) + (\langle u^{(r)}(x, t) \rangle_x^\gamma)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{r} \sup_x \sigma_2 (u_0^{(k)}(x)) \exp \omega_k t + \sup_x (\langle u_0^{(r)}(x) \rangle_x^\gamma)^2. \tag{14}$$

Как только получены оценки (8)—(10), (14), не зависящие от размерности аргумента, исследование системы с бесконечномерным аргументом проходит по схеме, изложенной в [1, 2], причем оценка (14) при $r = 2$ позволяет понизить требование гладкости коэффициентов системы с постоянными коэффициентами A и a по сравнению с требованиями в [1, 2].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* (3) — *система класса* $C^{2+\gamma}$, *удовлетворяющая условиям* (6), *с коэффициентами* A *и* a, *не зависящими от* x. *Тогда задача Коши* (3) *корректна в классе* $C^2(H_{-\alpha}, y)$, *ее решение дается формулой* (7); *где* $\mu_{x,t}$ — σ-*аддитивная операторная мера, сосредоточенная в* $H_{-\alpha}$. *Это решение является пределом решений систем, получающихся из* (3) *проекти-*

рованием (по x) в конечномерные подпространства. Для него справедливы оценки (9)—(10), (14) *при* $r = 2$.

Сформулированный результат можно использовать при исследовании эллиптической системы

$$(\mathfrak{A} - \lambda E)\, w = f, \tag{15}$$

получающейся из (3) преобразованием Лапласа. Применяя преобразования Лапласа к оценкам для решений систем (3) с конечномерным аргументом; получаем следующие оценки для решений эллиптических систем:

$$\sup_x \| w(x, \lambda) \|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega} \sup_x \| f(x) \|^2, \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{r} \sup_x \sigma_2^2 (w^{(k)}(x, \lambda)) + \sup_x (\langle u^{(r)}(x, \lambda)\rangle_x^{\gamma})^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\lambda - \omega_k} \sup_x \sigma_2^2 (f^{(k)}(x)) + \sup_x (\langle f^{(2)}(x)\rangle_x^{\gamma})^2. \tag{17}$$

Дальнейшие рассуждения близки к рассуждениям [3]. Равномерная относительно размерности аргумента оценка (17) позволяет понизить требование гладкости коэффициентов по сравнению с [3].

Теорема 2. *Пусть* (15) — *система класса* $C^{2+\gamma}$ *с коэффициентами* A *и* a, *не зависящими от* x. *Тогда при выполнении условия* (6) *и любом* $\lambda > \max(\omega, \omega_1, \omega_2)$ *она имеет единственное решение, непрерывно зависящее от правой части* $f \in C^2(H_{-\alpha}, Y)$; *решение представимо с помощью* σ-*аддитивной операторной меры* $\theta_{x,\lambda}$, *сосредоточенной в* $H_{-\alpha}$, *формулой*

$$w(x, \lambda) = \int_{H_{-\alpha}} f(x')\, \theta_{x,\lambda}(dx') \tag{18}$$

и является пределом решений систем, полученных из (15) *путем проектирования в конечномерные подпространства.*

1. *Бохонов Ю. Е., Далецкий Ю. Л.* О задаче Коши для линейной параболической системы с бесконечномерным аргументом // Укр. мат. журн.— 1979.— 31, № 6.— С. 644—649.
2. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М. : Наука, 1983.— 383 с.
3. *Бохонов Ю. Е.* О линейных эллиптических системах второго порядка бесконечномерного аргумента // Кибернетика.— 1982.— № 1.— С. 127—128.
4. *Бохонов Ю. Е.* Априорная оценка для решений параболической системы второго порядка с измеримыми коэффициентами // Дифференц. уравнения.— 1984.— 20, № 12.— С. 2156—2158.
5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.— М. : Мир, 1968.— 427 с.

Киев. политехн. ин-т

Получено 27.02.85,
после доработки — 22.10.85