УДК 519.21

Т. А. Скороход

Сильная сходимость бесконечных произведений случайных линейных независимых операторов в гильбертовом пространстве

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, (x, y) — скалярное произведение $x, y \in H$, $|x|$ — норма $x \in H$; $L(H)$ — множество ограниченных линейных операторов из H в H; для $A \in L(H)$ $\|A\| = \sup\limits_{|x| \leqslant 1} |Ax|$.

Оператор называется обратимым, если он осуществляет взаимно однозначное отображение H на H.

Далее, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, $L(\Omega, H)$ — множество отображений $X(\omega)$ из Ω в $L(H)$, для которых $(X(\omega)x, y)$ $\mathfrak{F}$-измеримо при всех $x, y \in H$.

Рассматривается бесконечное произведение

$$(E+X_1)(E+X_2)\dots(E+X_n)\dots=\prod_{k=1}^{\infty}(E+X_k), \qquad (1)$$

где X_k независимы и принадлежат $L(\Omega, H)$, E — единичный оператор. Будем говорить, что бесконечное призведение (1) сильно сходится с вероятностью 1, если оно сходится на каждом элементе $x\in H$ с вероятностью 1.

Приведенные далее теоремы дают достаточное условие сильной сходимости бесконечного произведения (1) к обратимому оператору. Все операторы $E+X_k$ предполагаются обратимыми с вероятностью 1.

Теорема 1. *Если* $\sum_{k\geqslant 1} M\|X_k\|^2<\infty$ *и* $MX_k=0$, *то бесконечное произведение* (1) *сильно сходится с вероятностью* 1 *к обратимому оператору*.

Доказательство. Как показано в [1], бесконечное произведение (1), а также бесконечное произведение

$$\dots(E+X_n)^{-1}(E+X_{n-1})^{-1}\dots(E+X_1)^{-1}=\overleftarrow{\prod_{k=1}^{\infty}}(E+X_k)^{-1}$$

сильно сходится с вероятностью 1.

Покажем, что $\prod_{k=1}^{\infty}(E+X_k)$ и $\overleftarrow{\prod_{k=1}^{\infty}}(E+X_k)^{-1}$ принадлежат $L(\Omega, H)$. Тем самым теорема будет доказана. При доказательстве этого факта используется идея, изложенная в [2]. Обозначим $\prod_{k=1}^{\infty}(E+X_k)=A$. Покажем, что $P\{\sup_{|x|\leqslant 1}|Ax|<\infty\}=1$. Предположим противное: $P\{\sup_{|x|\leqslant 1}|Ax|=\infty\}>0$. Так как событие $\{\sup_{|x|\leqslant 1}|Ax|=\infty\}$ не зависит от конечного числа обратимых сомножителей $(E+X_1),\dots,(E+X_{k-1})$ и определяется бесконечным «хвостом» $(E+X_k)(E+X_{k+1})\dots$, оно имеет вероятность 0 или 1, т. е.

$$P\{\sup_{|x|\leqslant 1}|Ax|=\infty\}=1. \qquad (2)$$

Пусть $A_nx=\prod_{k=1}^{n}(E+X_k)x$. Покажем, что из (2) следует

$$P\{\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\leqslant 1}|A_nx|=\infty\}=1. \qquad (3)$$

Событие в скобках также имеет вероятность 0 или 1. Предположим, что оно имеет вероятность 0. Это означает, что $P\{\underline{\lim}\sup_{|x|\leqslant 1}|A_nx|<\infty\}=\varepsilon>0$. Но так как $\sup_{|x|\leqslant 1}|Ax|=\sup_{|x|\leqslant 1}\underline{\lim}|A_nx|\leqslant\underline{\lim}\sup_{|x|\leqslant 1}|A_nx|$, то $P\{\sup_{|x|\leqslant 1}|Ax|<\infty\}=\varepsilon$. Это противоречит (2), следовательно, невозможно, а значит, имеет место (3).

Покажем, что из (3) следует: для всякой сферы $S_\delta=\{x:|x-x_0|<\delta\}$ найдутся такие $\bar{x}\in S_\delta$ и $n_0(\alpha,\varepsilon)$, что для всех $n\geqslant n_0(\alpha,\varepsilon)$ и произвольных $\alpha>0$, $\varepsilon>0$

$$P\{|A_n\bar{x}|>\alpha\}>\varepsilon. \qquad (4)$$

Предположим противное: найдется сфера S_δ такая, что для всякого $\bar{x}\in S_\delta$ существуют $\alpha(\bar{x})$, $\varepsilon(\bar{x})$, $n_k(\bar{x})$ такие, что $P\{|A_{n_k}\bar{x}|>\alpha\}\leqslant\varepsilon$. Пусть $S_\delta(\bar{x})=\{x:|x-\bar{x}|\leqslant\delta\}$. Так как $|A_{n_k}\bar{x}|=\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{x\in S_\delta(\bar{x})}|A_{n_k}x|$ — предел по вероятности, то для $\varepsilon_1>\varepsilon$ и некоторого δ_k $P\{\sup_{x\in S_{\delta_k}(\bar{x})}|A_{n_k}x|>\alpha\}\leqslant\varepsilon_1$. Пусть

$\delta_k \to 0$. Так как $\sup\limits_{x \in S_{\delta_k}(0)} |A_{n_k}x| \leqslant |A_{n_k}\bar{x}| + \sup\limits_{x \in S_{\delta_k}(\bar{x})} |A_{n_k}x|$, то $P\{\sup\limits_{x \in S_{\delta_k}(0)} |A_{n_k}x| > |A_{n_k}\bar{x}| + \alpha\} \leqslant \varepsilon_1$, а значит, $P\left\{\sup\limits_{x \in S_1(0)} |A_{n_k}x| > \dfrac{|A_{n_k}\bar{x}| + \alpha}{\delta_k}\right\} \leqslant \varepsilon_1$ и

$$P\{\lim_{n_k \to \infty} \| A_{n_k} \| < \infty\} > 1 - \varepsilon_1,$$

что противоречит (3), следовательно, верно (4). Отсюда получаем, что $P\{|A\bar{x}| > \alpha\} > \varepsilon$.

Вследствие стохастической непрерывности Ax (это легко следует из стохастической непрерывности $A_n x$) можно указать такое δ_1, что для $x \in S_{\delta_1} = \{x : |x - \bar{x}| < \delta_1\}$ $P\{|Ax| > \alpha\} > \varepsilon$. Теперь пусть $\alpha_1 > \alpha$. Можно выбрать $x_1 \in S_{\delta_1}$, чтобы $P\{|Ax_1| > \alpha_1\} > \varepsilon$. Аналогично можно указать $\delta_2 < \delta_1$, что для $x \in S_{\delta_2} = \{x : |x - x_1| < \delta\} \subset S_{\delta_1}$ $P\{|Ax| > \alpha_1\} > \varepsilon$ и т. д.

Выберем $\alpha_k > \alpha_{k-1}$. Пусть $x_k \in S_{\delta_k} = \{x : |x - x_{k-1}| < \delta_k\}$ такой, что $P\{|Ax_k| > \alpha_k\} > \varepsilon$. Тогда можно указать $\delta_{k+1} < \delta_k$, $S_{\delta_{k+1}} = \{x : |x - x_k| < \delta_{k+1}\} \subset S_{\delta_k}$, что для $x \in S_{\delta_{k+1}}$ выполняется $P\{|Ax| > \alpha_k\} > \varepsilon$. Таким образом, можно построить такую бесконечную последовательность вложенных сфер S_{δ_k}, $\delta_k \downarrow 0$, что при $x \in S_{\delta_k}$ $P\{|Ax| > \alpha_k\} > \varepsilon$, где $\alpha_k \to \infty$. Тогда для $x \in \bigcap\limits_k S_{\delta_k}$ $P\{|Ax| = \infty\} \geqslant \varepsilon$. Это невозможно, следовательно, $P\{\sup\limits_{|x| \leqslant 1} |Ax| < \infty\} = 1$, т. е. $\prod\limits_{k=1}^{n} (E + X_k)$ сильно сходится с вероятностью 1 к ограниченному оператору. Применяя те же рассуждения к $\overleftarrow{\prod\limits_{k=1}^{n}} (E + X_k)^{-1}$, можно показать, что это произведение сильно сходится к ограниченному оператору. Отсюда следует, что сильный предел $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (E + X_k)$ является обратимым оператором. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если* $M\|X_k\|^2 < \infty$, $k \geqslant 1$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (E + MX_k)$ *сходится к обратимому оператору и* $\sum\limits_{k \geqslant 1} M\|X_k - MX_k\|^2 < \infty$, *то справедливо утверждение теоремы* 1.

Доказательство. Обозначим $V_n = \prod\limits_{k=1}^{n} (E + MX_k)$. Рассмотрим бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} V_{k-1}(E + X_k) V_k^{-1}$, $V_0 = E$, и покажем, что для него выполняются условия теоремы 1.

Так как $MV_{k-1}(E + X_k) V_k^{-1} = E$, то $V_{k-1}(E + X_k) V_k^{-1} = E + X_k^1$, где $X_k^1 = V_{k-1}(E + X_k) V_k^{-1} - E = V_{k-1}(X_k - MX_k) V_k^{-1}$, причем $MX_k^1 = 0$ и

$$\|X_k^1\|^2 \leqslant \|V_{k-1}\|^2 \|V_k^{-1}\|^2 \|X_k - MX_k\|^2.$$

Поскольку $\sum\limits_{k \geqslant 1} M\|X_k^1\|^2 < \infty$, то $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (E + X_k) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} (E + X_k^1) V_\infty$ сильно сходится по теореме 1 с вероятностью 1 к обратимому оператору. Теорема доказана.

Следствие. *Если бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (E + X_k)$ *(X_k независимы) сильно сходится с вероятностью* 1, *то* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (E + X_k) \in L(\Omega, H)$.

1. *Скороход Т. А.* О сходимости бесконечных произведений почти линейных случайных независимых операторов // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 5.— С.
2. *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы.— Киев : Наук. думка, 1978.— 200 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 04.10.85