УДК 517.95

Д. Базаров

Аналог задачи Бицадзе — Самарского для одного уравнения третьего порядка смешанного типа

В настоящей работе исследуется аналог задачи Бицадзе—Самарского [1] для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0, \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y + c(y)\,u & \text{при } y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} & \text{при } y < 0, \end{cases}$$

$c(y)$ — известная непрерывно дифференцируемая функция, причем $c(y) \leqslant \leqslant 0$.

Пусть D — прямоугольник с вершинами в точках $A(0, -1)$, $A_1(0, 1)$, $B(1, -1)$, $B_1(1, 1)$. Обозначим через O, M, N точки с координатами $(0, 0)$, $(1/2, -1/2)$, $(1, 0)$ соответственно. Решение уравнения (1) будем называть регулярным в какой-либо области, если оно в этой области имеет непрерывные производные, входящие в Lu, и Lu допускает непрерывную производную по x.

Задача I. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) функция $u(x, y)$ и ее частные производные u_x, u_y непрерывны в замыкании области $\overline{D}$ (допускается, что в точках $O(0, 0)$, $N(1, 0)$ частные производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы);

2) функция $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D или $y \neq 0$, $y \neq -x$, $y \neq x - 1$;

3) функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{gathered} u|_{NB_1} = u|_{\substack{x=l \\ 0\leqslant y\leqslant 1}} = \alpha(y)\,u|_{OA_1} = \beta(y)\,u(x, -y)|_{OA_1}, \\ u_x|_{AA_1} = \nu_1(y), \quad u|_{AB} = \psi(x), \quad u_y|_{AB} = \psi_1(x), \end{gathered} \tag{2}$$

где ψ, ψ_1, ν_1 — заданные фунции, причем $\psi_1 \in c^1(0 \leqslant x \leqslant 1) \cap c^2(0 < x < 1)$, $\psi \in c^2(0 \leqslant x \leqslant 1) \cap c^3(0 < x < 1)$, $\nu_1 \in c^1(-1 \leqslant y < 0) \cap c^2(-1 < y < 0)$, $\nu_1 \in c^1(0 < y \leqslant 1)$, $\psi'(1) = \psi_1(1)$, $\psi_1(0) = \nu_1(-1)$, $\psi'(0) = \nu_1(-1)$; при $y \to 0$ функция $\nu_1(y)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы; $\alpha(y)$, $\beta(y)$ — известные непрерывно дифференцируемые функции, причем $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(y) \neq 1$, $\beta(y) \neq 1$, $\alpha(y) \neq 0$, $\beta(y) \neq 0$, $0 < l < 1$.

Задача II. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) функция $u(x, y)$ удовлетворяет первому и второму условию задачи I;

2) функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{gathered} u|_{NB_1} = u|_{\substack{x=l \\ 0\leqslant y\leqslant 1}} = u|_{OA_1} = u(x, -y)|_{AO}, u_x|_{AO} = \nu_1(x), \quad u|_{BN} = \psi_2(y), \\ u|_{AB} = \psi(x), \quad u_y|_{AB} = \psi_1(y). \end{gathered} \tag{3}$$

Заданная функция $\psi_2 \in c^2(-1 \leqslant y \leqslant 0)$, причем $\psi_2(-1) = \psi(1)$, $\psi_2'(-1) = \psi'(1)$, $\psi_2'(-1) = \psi_1(-1)$. При исследовании этих задач будем пользоваться тем фактом, что любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде [3]

$$u(x, y) = z(x, y) + \omega(y), \tag{4}$$

где $z(x, y)$ — регулярное решение уравнения

$$0 = \begin{cases} z_{xx} - z_y + c(y) z & \text{при } y > 0, \\ z_{xx} - z_{yy} & \text{при } y < 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$\omega(y) = \begin{cases} \omega_1(y), & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ \omega_2(y), & -1 \leqslant y \leqslant 0, \end{cases}$$

$\omega_1(y)$, $\omega_2(y)$ — произвольные функции, имеющие непрерывные производные, входящие в уравнение (5), причем $\omega_1(0) = \omega_2(0)$, $\omega_1'(0) = \omega_2'(0)$. Без ограничения общности можно предполагать, что

$$\omega_2(-1) = \omega_2'(-1) = 0. \tag{6}$$

На основании (2), (4) задача 1 редуцируется к определению в области D ($y \neq 0$, $y \neq -x$, $y \neq x - 1$) регулярного решения уравнения (5), удовлетворяющего краевым условиям

$$z|_{OA_1} = \varphi(y) - \omega_1(y), \quad z|_{x=l} = \alpha(y)\varphi(y) - \omega_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$z|_{B_1N} = \alpha(y)\varphi(y) - \omega_1(y); \qquad z|_{AO} = \frac{\alpha(-y)}{\beta(-y)}\varphi(-y) - \omega_2(y), \tag{7}$$

$$z_x|_{OA_1} = \nu_1(y) - \omega_1(y), \quad z_x|_{OA} = \nu_1(y) - \omega_2(y), \quad z|_{AB} = \psi(x),$$

$$z_y|_{AB} = \psi_1(x),$$

где $\varphi(y)$ — значение функции $u(0, y)$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$. В треугольнике ABM решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям $z|_{AB} = \psi(x)$, $z_y|_{AB} = \psi_1(x)$, дается формулой

$$z(x, y) = \frac{1}{2}[\psi(x + y + 1) + \psi(x - y - 1)] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y-1}^{x+y+1} \psi_1(t)\,dt. \tag{7'}$$

В треугольнике AMO решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям $z|_{AM} = \bar{\psi}(y)$, $z_x|_{AO} = \nu_1(y)$, определяется по формуле

$$z(x, y) = \bar{\psi}\left(\frac{y - x - 1}{2}\right) - \int\limits_{-1}^{y-x} \nu_1(t)\,dt + \bar{\psi}\left(\frac{x + y - 1}{2}\right) + \gamma, \tag{8}$$

γ — известная постоянная.

Функция $\bar{\psi}(y)$ определяется из (7′). Из (8) находим

$$z(x, -x)|_{OM} = \bar{\psi}_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}. \tag{9}$$

В силу непрерывности первых производных от функции $z(x, y)$ из области $D^+ = \{(x, y) \in D,\ y > 0\}$ имеем

$$\tau''(x) - \nu(x) + c(0)\tau(x) = 0, \tag{10}$$

где $\tau(x) = z(x, 0)$, $\nu(x) = z_y(x, 0)$. Используя (9), находим

$$\tau'(x) - \nu(x) = \bar{\psi}_1'(x/2). \tag{11}$$

Исключая $\nu(x)$ из (10), (11), получаем

$$\tau''(x) - \tau'(x) + c(0)\tau(x) = -\psi_1'(x/2). \tag{12}$$

Из (12) единственным образом определяем $\tau(x)$. Следовательно, в области $D^- = \{(x, y) \in D,\ y < 0\}$ функция $z(x, y)$ определяется однозначно. Теперь нетрудно показать, что функция $z(x, y) \equiv 0$ в области D^+, если $\psi = \psi_1 = \nu_1 = 0$. Действительно, из условия $z_x|_{A_1O} = 0$ следует, что $z(x, y)$ не достигает положительного максимума (отрицательного минимума) на

A_1O. Кроме того, $z(x, y)$ не может достигать положительного максимума (отрицательного минимума) и на NB_1; в противном случае этот максимум должен реализоваться и внутри области D^+, что невозможно. Следовательно, $z(x, y) \equiv 0$ в D^+. Тогда имеем $\varphi(y) - \omega_1(y) = 0$, $\alpha(y)\varphi(y) - \omega_1(y) = 0$, или $\varphi(y) = 0$, $\omega_1(y) = 0$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$. Равенство (8) должно удовлетворять условию

$$z|_{OA} = \frac{\alpha(-y)}{\beta(-y)}\varphi(-y) - \omega_2(y) = 2\bar{\psi}\left(\frac{y-1}{2}\right) - \int_{-1}^{y} \nu_1(t)\,dt + \gamma = \tilde{\psi}(y). \tag{13}$$

Из (13) следует, что функция $\omega_2(y)$ определяется единственным образом. Следовательно, функция $u(x, y)$ в области D определяется единственным образом.

Заметим, что при $\alpha(y) \equiv 1$ задача 1 имеет неединственное решение $u = \omega(y)$. Регулярное в области D^+ решение уравнения (5), удовлетворяющее краевым условиям $z_x|_{OA_1} = \nu_1(y)$, $z|_{ON} = \tau(x)$, $z|_{NB_1} = \alpha(y)\varphi(y) - \omega_1(y) = \varphi_1$, удовлетворяет интегральному уравнению [4]

$$z(x, y) = z_0(x, y) - \int_0^1 d\xi \int_0^y c(\eta)\, G(\xi, \eta; x, y)\, z(\xi, \eta)\, d\eta, \tag{14}$$

где $z_0(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big\{\int_0^y (\nu_1(\eta)\, G(x, y;\ 0, \eta)\, d\eta - \int_0^y \varphi_1(\eta)\, G_\xi(x, y;\ 1,\ \eta)\, d\eta -$

$- \int_0^1 \tau(\xi)\, G(x, y; \xi, 0)\, d\xi\Big\}$, $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина [2].

Следуя работе [4], решение уравнения (14) будем искать в виде

$$z(x, y) = z_0(x, y) + Q(x, y) + Q_1(x, y), \tag{15}$$

где $Q(x, y)$ и $Q_1(x, y)$ — соответственно решения следующих интегральных уравнений:

$$Q(x, y) + \int_0^1 d\xi \int_0^y c(\eta)\, G(\xi, \eta; x, y)\, Q(\xi, \eta)\, d\eta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 d\xi \int_0^y c(\eta)\, d\eta \times$$
$$\times \int_0^\eta \varphi_1(t)\, G(\xi, t; x, y)\, G_\xi(1, t; x, y)\, dt, \tag{16}$$

$$Q_1(x, y) + \int_0^1 d\xi \int_0^y c(\eta)\, G(\xi, \eta; x, y)\, Q_1(\xi, \eta)\, d\eta = \int_0^1 d\xi \int_0^y c(\eta)\, G(\xi, \eta; x, y) \times$$
$$\times V(\xi, \eta)\, d\eta,$$

где $v(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \tau(\xi)\, G(\xi, 0; x, y)\, d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \nu_1(t)\, G(0, t; x, y)\, dt.$

Решение уравнения (16) ищем в виде $Q(x, y) = \int_0^y Q_0(\eta; x, y)\, \varphi_1(\eta)\, d\eta$.

Здесь $Q_0(\eta; x, y)$ — решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода,

$$Q_0(\eta; x, y) + \int_\eta^1 d\xi \int_\eta^y c(\eta)\, G(\xi, t; x, y)\, Q_0(\eta; x, y)\, dt = \int_0^1 d\xi \int_\eta^y c(\eta)\, G(\xi, t; x, y) \times$$
$$\times G_\xi(1, t; x, y)\, dt,$$

которое разрешимо [4]. Следовательно,

$$z(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \varphi_1(\eta)\, G_\xi(1, \eta; x, y)\, d\eta + \int_0^y Q_0(\eta; x, y)\, \varphi_1(\eta)\, d\eta +$$
$$+ Q_1(x, y) + v(x, y). \tag{17}$$

Функция $z(x, y)$ должна удовлетворять условию

$$z(x, y)|_{x=l} = \varphi_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1. \tag{18}$$

Реализуя условие (18), для определения $\varphi_1(y)$ получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi_1(y) = \int_0^y K(\eta; y)\, \varphi_1(\eta)\, d\eta + \overline{Q}(y), \tag{19}$$

где $K(\eta, y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{\xi}(1, \eta; l, y) + Q_0(\eta; l, y)$, $\overline{Q}(y) = Q_1(l, y) + v(l, y)$. Из уравнения (19) функция $\varphi_1(y)$ определяется единственным образом. Функция $z(x, y)$ должна удовлетворять и условию

$$z|_{OA_1} = \varphi(y) - \omega_1(y). \tag{20}$$

Реализуя (20), имеем

$$\varphi(y) - \omega_1(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \varphi_1(\eta)\, G_{\xi}(1, \eta; 0, y)\, d\eta + \int_0^y Q_0(\eta; 0, y)\, \varphi_1(\eta)\, d\eta +$$

$$+ Q_1(0, y) + v(0, y).$$

Таким образом, нам известно $\varphi(y) - \omega_1(y)$ и $\alpha(y)\,\varphi(y) - \omega_1(y)$. Из этих выражений определяем $\varphi(y)$ и $\omega_1(y)$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Перейдем к изучению задачи II.

Как и в задаче I на основании (3), (4) задача II редуцируется к определению в области D ($y \neq 0$, $y \neq -x$, $y \neq x - 1$) регулярного решения уравнения (5), удовлетворяющего краевым условиям

$$z|_{OA_1} = \varphi(y) - \omega_1(y), \quad z|_{x=l} = \varphi(y) - \omega_1(y) \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$z|_{B_1N} = \varphi(y) - \omega_1(y), \quad z|_{AO} = \varphi(-y) - \omega_2(y), \quad z_x|_{OA} = \nu_1(y) - \omega_2(y), \tag{21}$$

$$z|_{BN} = \psi_2(y) - \omega_2(y), \quad z|_{AB} = \psi(x), \quad z_y|_{AB} = \psi_1(x).$$

Поступая таким же образом, как в задаче I, находим

$$z|_{OM} = \overline{\psi}_1(x), \quad z(x, 0) = \tau(x). \tag{22}$$

Решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (22) в треугольнике OMN, дается формулой

$$z(x, y) = \overline{\psi}_1\left(\frac{x - y}{2}\right) + \tau(x + y) - \overline{\psi}_1\left(\frac{x + y}{2}\right). \tag{23}$$

Из (7) и (23) находим

$$\begin{gathered} z|_{MN} = \overline{\psi}_1(1) + \tau(2x - 1) - \overline{\psi}_1\left(\frac{2x - 1}{2}\right) = \tilde{\psi}(x), \\ z|_{MB} = \frac{1}{2}[\psi(1) + \psi(2x - 1)] + \frac{1}{2}\int_{2x-1}^{1} \psi_1(t)\, dt = \tilde{\psi}_1(x). \end{gathered} \tag{24}$$

Решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (24) в треугольнике MNB, определяется по формуле

$$z(x, y) = \tilde{\psi}\left(\frac{x - y}{2}\right) - \tilde{\psi}_1\left(\frac{x + y + 1}{2}\right) - \tilde{\psi}_1(1). \tag{25}$$

Реализуя условие $z|_{BN} = \psi_2(y) - \omega_2(y)$, из (25) определяем произвольную функцию

$$\omega_2(y) = \psi_2(y) - \tilde{\psi}\left(\frac{1 - y}{2}\right) + \tilde{\psi}_1\left(1 + \frac{y}{2}\right) + \tilde{\psi}_1(1). \tag{26}$$

Функция $z(x, y)$, определяемая формулой (8), должна удовлетворять условию $z|_{AO} = \varphi(-y) - \omega_2(y)$. Кроме того,

$$\varphi(-y) - \omega_2(y) = 2\overline{\psi}\left(\frac{y-1}{2}\right) - \int_{-1}^{y} \nu_1(t)\, dt + \gamma. \tag{27}$$

Подставляя значения $\omega_2(y)$ в формулу (27), определяем функцию $\varphi(y)$. Следовательно, задача редуцируется к определению в области D^+ регулярного решения уравнения (5), удовлетворяющего краевым условиям

$$z|_{OA_1} = \varphi(y) - \omega_1(y), \quad z|_{x=l} = \varphi(y) - \omega_1(y), \quad z|_{NB_1} = \varphi(y) - \omega_1(y),$$

$$z|_{ON} = \tau(x). \tag{28}$$

Регулярное в области D^+ решение уравнения (5), удовлетворяющее первым трем условиям из (28), удовлетворяет интегральному уравнению

$$z(x, y) = z_0(x, y) - \int_0^1 d\xi \int_0^y c(\eta)\, G_1(\xi, \eta; x, y)\, z(\xi, \eta)\, d\eta, \tag{29}$$

где

$$z_0(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Big\{ \int_0^y [\varphi(\eta) - \omega_1(\eta)]\, G_{1\xi}(0, \eta; x, y)\, d\eta - \int_0^y [\varphi(\eta) - \omega_1(\eta)] \times$$

$$\times G_{1\xi}(1, \eta; x, y)\, d\eta + \int_0^1 \tau(\xi)\, G_1(\xi, 0; x, y)\, d\xi \Big\},$$

$G_1(\xi, \eta; x, y)$ — функция Грина [5].

Решение уравнения (29) будем искать в виде (15). В данном случае функция $Q(x, y)$ является решением интегрального уравнения

$$Q(x, y) + \int_0^1 d\xi \int_0^y c(\eta)\, G_1(\xi, \eta; x, y)\, Q(\xi, \eta)\, d\eta = \int_0^1 d\xi \int_0^y c(\eta)\, d\eta \times$$

$$\times \int_0^\eta [\varphi(t) - \omega_1(t)]\, [G_{1\xi}(0, t; x, y) - G_{1\xi}(1, t; x, y)]\, G_1(\xi, t; x, y)\, dt.$$

Подставляя значение $Q(x, y)$ в формулу (15) и реализуя условие $z|_{x=l} = \varphi(y) - \omega_1(y)$, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода, из которого единственным образом определяется функция $\omega_1(y)$.

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР.— 1969.— 185, № 4.— С. 739—740.
2. *Дикинов Х. Ж., Керефов А. А., Нахушев А. М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Диф. уравнения.— 1976.— 12, № 1.— С. 177—179.
3. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.— Ташкент : Фан, 1979.— 238 с.
4. *Елеев В. А.* Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Диф. уравнения.— 1977.— 8, № 1.— С. 56—63.
5. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных.— М.: Изд-во иностр. лит., 1957.— 494 с.

Туркм. политехн. ин-т, Ашхабад

Получено 25.03.85,
после доработки — 25.06.86