УДК 517.946

С. А. Войцеховский, И. П. Гаврилюк, В. С. Саженюк

Оценки сходимости метода штрафа для вариационных эллиптических неравенств второго порядка

Широкий класс задач механики, физики и теории управления приводит к необходимости решения вариационных эллиптических неравенств (в. э. н.) [1, 2]. Одним из наиболее распространенных приближенных методов решения в. э. н. является метод штрафа [3], который исходную задачу сводит к решению некоторой нелинейной краевой задачи. Затем эта нелинейная краевая задача дискретизируется и решается на ЭВМ с помощью одного из численных методов, например методом сеток [4]. Существенным моментом, определяющим сложность дискретной задачи метода сеток, является форма области, в которой ищется решение в. э. н., причем в двумерном случае наиболее предпочтителен прямоугольник [4]. Один из вариантов метода штрафа — метод фиктивных областей [5] — позволяет перейти от задачи в произвольной области к новой задаче в канонической области, например в прямоугольнике.

В настоящей статье для решения вариационных эллиптических неравенств второго порядка в случае односторонних ограничений в области и на границе устанавливается оценка скорости сходимости комбинации метода штрафа и метода фиктивных областей.

1. Пусть Ω — ограниченная область в R^2 с границей $\Gamma \in C^2$,

$$Av \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + a_0(x)v,$$

где

$$a_0(x) \in L_\infty(\Omega), \quad a_{ij}(x) \in W^1_\infty(\Omega), \quad a_0(x) \geqslant 0, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \nu \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \quad \nu > 0. \tag{1'}$$

Рассмотрим задачу решения вариационного неравенства: найти $u \in K$ такое, что

$$a(u, v-u) \geqslant (f, v-u) \quad \forall v \in K, \tag{1}$$

где

$$a(v_1, v_2) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\frac{\partial v_2}{\partial x_j}\right)dx + \int_\Omega a_0(x)v_1v_2\,dx \quad \forall v_1,\ v_2 \in W_2^1(\Omega),$$

$f(x) \in L_2(\Omega)$ — заданная функция, $(f, v) = \int_\Omega fv\,dx$, K — замкнутое выпуклое множество в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Известно [3, с. 261], что задача (1) однозначно разрешима в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Для случая ограничения в области имеем $K \equiv K_\Omega = \{v : v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),\ v \geqslant 0, \text{ п. в. в } \Omega\}$.

Задаче (1) поставим в соответствие задачу со штрафом: найти $u_\delta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ такое, что

$$a(u_\delta, v) - \frac{1}{\delta}\int\limits_\Omega u_\delta^- v dx = \int\limits_\Omega f v dx \quad \forall v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),$$

$$u_\delta^- = \begin{cases} -u_\delta, & u_\delta < 0, \\ 0, & u_\delta \geqslant 0, \end{cases} \quad \delta > 0. \tag{2}$$

В силу строгой монотонности оператора A (1′) задача (2) однозначно разрешима в пространстве $W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ [3, с. 392] и $u_\delta \to u$ при $\delta \to 0$ в $W_2^1(\Omega)$ слабо. Оценку скорости сходимости дает следующая теорема.

Теорема 1. *Решение задачи* (2) *сходится при* $\delta \to 0$ *к решению задачи* (1), *причем справедлива оценка скорости сходимости*

$$\| u_\delta - u \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M\delta^{1/2} \tag{3}$$

(*здесь и ниже через* M *обозначены константы, не зависящие от* δ *и* ε).

Доказательство. Полагая в (2) $v = -u_\delta^-$ и учитывая, что $a(u_\delta, -u_\delta^-) = a(u_\delta^-, u_\delta^-)$, находим

$$a(u_\delta^-, u_\delta^-) + \frac{1}{\delta}\| u_\delta^- \|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \| f \|_{L_2(\Omega)} \| u_\delta^- \|_{L_2(\Omega)}. \tag{4}$$

Из неравенства (4) следует оценка

$$\| u_\delta^- \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M\delta^{1/2} \| f \|_{L_2(\Omega)}. \tag{5}$$

Учитывая, что K_Ω — замкнутый выпуклый конус с вершиной в начале, имеем [3, с. 255]

$$a(u, v) \geqslant (f, v) \quad \forall v \in K_\Omega, \quad a(u, u) = (f, u). \tag{6}$$

Вводя функцию погрешности $w = u_\delta - u$ и полагая в неравенстве (6) $u = u_\delta - w$, получаем $a(u_\delta, v) - a(w, v) \geqslant (f, v)$ $\forall v \in K_\Omega$. Подставляя сюда (2), находим

$$a(w, v) \leqslant \frac{1}{\delta}(u_\delta^-, v) \quad \forall v \in K_\Omega, \tag{7}$$

а вычитая из (2) при $v = u$ равенство (6), имеем

$$a(w, u) = \frac{1}{\delta}(u_\delta^-, u). \tag{8}$$

Пусть

$$u_\delta^+ = \begin{cases} u_\delta, & \text{если } u_\delta > 0, \\ 0, & \text{если } u_\delta \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $u_\delta = u_\delta^+ - u_\delta^-$, $(u_\delta^-, u_\delta^+) = 0$, $u_\delta^- \geqslant 0$, $u_\delta^+ \geqslant 0$ и, выбирая в (7) $v = u_\delta^+ \in K_\Omega$, получаем

$$a(w, u_\delta^+) \leqslant 0. \tag{9}$$

Полагая в (8) $u = w - u_\delta = w - u_\delta^+ + u_\delta^-$, приходим к равенству

$$a(w, w) + \frac{1}{\delta}(u_\delta^-, u) = a(w, u_\delta^+) - a(w, u_\delta^-) \tag{10}$$

и далее, с учетом (9), неравенства $(u_\delta^-, u) \geqslant 0$ и неравенства Коши — Буняковского,

$$\| w \|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M \| w \|_{W_2^1(\Omega)} \| u_\delta^- \|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{11}$$

Отсюда, а также из неравенства (5) следует утверждение теоремы.

2. В соответствии с методом фиктивных областей дополним область Ω некоторой областью Ω_1 до прямоугольника Ω_0, границу которого обозначим через Γ_0. Для задачи (2) рассмотрим два варианта метода фиктивных областей.

I. Найти $u_\varepsilon(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0)$ такое, что

$$a_\Omega(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_1}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx + \int_\Omega a_0 u_\varepsilon v dx -$$

$$-\frac{1}{\delta}\int_\Omega u_\varepsilon^- v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0). \tag{12}$$

II. Найти $u_\varepsilon(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0)$ такое, что

$$a_{\Omega_0}(u_\varepsilon, v) + \int_\Omega a_0 u_\varepsilon v dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_1} u_\varepsilon v dx -$$

$$-\frac{1}{\delta}\int_\Omega u_\varepsilon^- v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0). \tag{13}$$

Здесь $a_\Omega(v_1, v_2) = \int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\frac{\partial v_2}{\partial x_j}\right)dx.$

Однозначная разрешимость задач (12), (13) в пространстве функций $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0)$ следует из результатов [3, 7]. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Решение задачи* (12) *сходится при* $\varepsilon \to 0$ *к решению задачи* (2), *причем выполняется оценка скорости сходимости*

$$\| u_\delta - u_\varepsilon \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M\varepsilon^{1/2}. \tag{14}$$

Замечание. Несколько усложнив доказательство теоремы 2, можно получить оценку

$$\| u_\delta - u_\varepsilon \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M\frac{\varepsilon}{\delta}. \tag{15}$$

Теорема 3. *Решение задачи* (13) *сходится при* $\varepsilon \to 0$ *к решению задачи* (2), *причем выполняется оценка скорости сходимости*

$$\| u_\delta - u_\varepsilon \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M\varepsilon^{1/4}. \tag{16}$$

Доказательство теоремы 2. Продолжим функцию $u_\delta(x)$ нулем в область Ω_1. Полученную функцию обозначим через $\bar{u}_\delta(x)$. Очевидно, что $\bar{u}_\delta(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0)$. Для погрешности $z = u_\varepsilon - \bar{u}_\delta$, сравнивая тождества (2) и (12), получаем

$$a_\Omega(z, v) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_1}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx + \int_\Omega a_0 z v dx - \frac{1}{\delta}\int_\Omega((z + u_\delta)^- - u_\delta^-)v dx =$$

$$= -\int_\Gamma \frac{\partial u_\delta}{\partial \nu} v dx \quad \forall v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0), \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\cos(\widehat{\bar{n}, x_i}), \tag{17}$$

где $\bar{n}$ — вектор нормали к Γ.

Полагая в тождестве (17) $v = z$, используя неравенство Коши — Буняковского, монотонность функции $-u_\delta^-$ и оценку

$$\left\| \frac{\partial u_\delta}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant M \| u_\delta \|_{W_2^2(\Omega)},$$

имеем

$$|z|^2_{W_2^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}|z|^2_{W_2^1(\Omega_1)} \leqslant M\,\|z\|_{L_2(\Gamma)}. \tag{18}$$

Из неравенств Фридрихса, $\|z\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant M\,\|z\|_{W_2^1(\Omega_1)}$ и (18) получаем

$$|z|_{W_2^1(\Omega_1)} \leqslant M\varepsilon, \quad |z|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M\varepsilon^{1/2}. \tag{19}$$

Теорема 2 доказана. Теорема 3 доказывается аналогично. Используя неравенство треугольника, оценки (3), (14) и (3), (16) соответственно, находим

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M(\delta^{1/2} + \varepsilon^{1/2}), \tag{20}$$

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M(\delta^{1/2} + \varepsilon^{1/4}). \tag{21}$$

Из оценок (20) (при $\delta = \varepsilon$) и (21) ($\delta = \varepsilon^{1/2}$) следует

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M\varepsilon^{1/2}, \tag{20'}$$

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M\varepsilon^{1/4}. \tag{21'}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Решение задачи* (12), (13) ($\delta = \varepsilon$ ($\delta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$)) *сходится при* $\varepsilon \to 0$ *к решению задачи* (1), *причем выполняется оценка скорости сходимости* (20′) ((21′)

3. Рассмотрим теперь задачу (1) при условии

$$K \equiv K_\Gamma = \{v : v \in W_2^1(\Omega),\ v \geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma\}. \tag{22}$$

Дополнительно к (1′) будем предполагать, что $a_0(x) \geqslant \alpha_0 > 0$. Из результатов работы [3] следует, что существует единственное решение задачи (1), (22), принадлежащее пространству $W_2^2(\Omega)$, причем задача (1), (22) эквивалентна следующей краевой задаче с односторонним ограничением на границе: найти $u(x)$ такое, что

$$Au = f, \quad x \in \Omega, \quad u \geqslant 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \geqslant 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}u = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{23}$$

Задачи со штрафом, соответствующие задачам (1), (22) и (23) соответственно, имеют вид [3]:

найти $u_\delta(x) \in W_2^1(\Omega)$ такое, что

$$a(u_\delta, v) - \frac{1}{\delta}\int_\Gamma u_\delta^- v\,dx = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall v \in W_2^1(\Omega); \tag{24}$$

найти $u_\delta(x)$ такое, что

$$Au_\delta = f, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u_\delta}{\partial \nu} - \frac{1}{\delta}u_\delta^- = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{25}$$

Известно [3], что существует решение задач (24), (25), принадлежащее пространству $W_2^2(\Omega)$, кроме того, $u_\delta \to u$ при $\delta \to 0$ в $W_2^1(\Omega)$ слабо. Оценку скорости сходимости дает следующая теорема.

Теорема 5. *Решение задач* (24), (25) *сходится при* $\delta \to 0$ *к решению задачи* (1), (22), *и при этом справедлива оценка скорости сходимости*

$$\|u - u_\delta\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M\delta^{1/2}. \tag{26}$$

Доказательство. Так как $u_\delta \in W_2^2(\Omega)$, то $\frac{\partial u_\delta}{\partial \nu} \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ и имеет место оценка

$$\left\| \frac{\partial u_\delta}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant M \| u_\delta \|_{W_2^2(\Omega)}. \tag{27}$$

Отсюда с учетом краевого условия задачи (25) следует неравенство

$$\| u_\delta^- \|_{L_2(\Gamma)} \leqslant M\delta \| u_\delta \|_{W_2^2(\Omega)}. \tag{28}$$

Сравнивая задачи (23) и (25), для погрешности $w = u_\delta - u$ получаем

$$Aw = 0, \quad x \in \Omega, \quad w \frac{\partial w}{\partial \nu} = u_\delta \frac{\partial w}{\partial \nu} - u \frac{\partial u_\delta}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \tag{29}$$

Умножая уравнение (29) скалярно на $w(x)$ и интегрируя по частям, находим

$$a(w, w) = \int\limits_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu} w dx = \int\limits_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu} u_\delta dx - \int\limits_\Gamma \frac{\partial u_\delta}{\partial \nu} u dx. \tag{30}$$

Выражение (30) после несложных преобразований дает оценку

$$\| w \|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \| u_\delta^- \|_{L_2(\Gamma)} \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\Gamma)}. \tag{31}$$

Используя оценку типа (27), а также оценку (28), из неравенства (31) получаем требуемую оценку (26). Теорема 5 доказана.

4. С помощью метода фиктивных областей перейдем от задачи (24) к новой задаче в прямоугольнике Ω_0: найти $u_\varepsilon \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0)$ такое, что

$$a(u_\varepsilon, v) + \varepsilon \int\limits_{\Omega_1} \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx - \frac{1}{\delta} \int\limits_\Gamma u_\varepsilon^- v dx = \int\limits_\Omega f v dx$$

$$\forall v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0), \quad \varepsilon > 0. \tag{32}$$

Из результатов работ [3, 7] следует однозначная разрешимость задачи (32) в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Решение задачи* (32) *сходится при* $\varepsilon \to 0$ *к решению задачи* (24), *причем выполняется оценка скорости сходимости*

$$\| u_\varepsilon - u_\delta \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M\varepsilon. \tag{33}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\bar{u}_\delta(x)$, которая определяется следующим образом:

$$\bar{u}_\delta(x) = \begin{cases} u_\delta(x), & x \in \Omega, \\ \varphi(x), & x \in \Omega_1, \end{cases}$$

где $\varphi(x) \in W_2^2(\Omega_1)$ — единственное решение задачи Дирихле [8]

$$\Delta\varphi = 0, \quad x \in \Omega \quad \varphi(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0, \quad \varphi(x) = u_\delta(x), \quad x \in \Gamma, \tag{34}$$

причем $\| \varphi \|_{W_2^2(\Omega_1)} \leqslant M \| u_\delta \|_{W_2^2(\Omega)}$. Очевидно, что $\bar{u}_\delta(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0)$. Сравнивая (24) и (32) и учитывая тождество

$$\int\limits_{\Omega_1} \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx = - \int\limits_\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} v dx \quad \forall v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0),$$

для функции $z = u_\varepsilon - u_\delta$ получаем уравнение.

$$a(z, z) + \varepsilon \int\limits_{\Omega_1} \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\Gamma} (u_\delta^- - (z + u_\delta)^-) z dx =$$

$$= \varepsilon \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} z dx. \qquad (35)$$

Используя неравенство Коши — Буняковского и теоремы вложения, из тождества (35) находим $\|z\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M\varepsilon$. Теорема 6 доказана. Аналогично теореме 4 доказывается следующая теорема.

Теорема 7. *Решение задачи* (32) ($\delta = \varepsilon^2$) *сходится при* $\varepsilon \to 0$ *к решению задачи* (1) ($K = K_\Gamma$), *причем верна оценка*

$$\| u_\varepsilon - u \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M\varepsilon. \qquad (36)$$

В заключение отметим, что задачи (2), (12), (13), (24), (25) и (32) можно использовать для построения разностных схем или схем метода конечных элементов, решения которых аппроксимируют решение соответствующих в. э. н., причем для метода сеток предпочтительнее задачи (12), (13) и (32). Оценки настоящей работы можно использовать для обоснования сходимости приближенного решения, полученного на ЭВМ с помощью метода сеток или конечных элементов, к решению исходных в. э. н. Вместе с оценками скорости сходимости метода сеток или метода конечных элементов они позволяют согласовать параметры всех трех методов так, чтобы скорость сходимости была максимальной.

1. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств.— М. : Мир, 1979.— 576 с.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.— 588 с.
4. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 588 с.
5. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики.— М. : Наука, 1977.— 456 с.
6. *Вабищевич П. Н.* О решении задач со свободной границей для эллиптических уравнений.// Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1982.— 22, № 5.— С. 1109—1117.
7. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1973.— 576 с.
8. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та.— 1958.— 197.— С. 54—112.

Киев. ун-т

Получено 21.04.84,
после доработки — 14.02.86