УДК 512.86

*К. И. Науменко*

# Об оптимальном ортогональном преобразовании

Рассматривается задача определения ортогонального преобразования заданной системы векторов, минимизирующего сумму взвешенных квадратов норм невязок результата преобразования с другой заданной системой векторов.

В $n$-мерном евклидовом пространстве заданы две системы векторов, которые являются столбцами матриц полного ранга $K = \| k_1 k_2 \dots k_{n-1} \|$ и $M = \| m_1 m_2 \dots m_{n-1} \|$. Пусть $K_0 = \| k_1^0 k_2^0 \dots k_{n-1}^0 \| = AM$, где $A$ — ортогональная матрица ($A^{\mathrm{T}} A = E$, «т» — знак транспонирования, $E$ — единичная матрица) и $\det A = 1$.

Ставится задача о нахождении такого ортогонального преобразования $A$, которое минимизирует сумму (с соответствующими весовыми множителями) квадратов норм невязок заданных матрицами $K_0$ и $K$ векторов

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \| k_i - k_i^0 \|^2, \tag{1}$$

где $\beta_i > 0$, $\| x \|^2 = x^{\mathrm{T}} x$. Минимизируемый функционал (1) представим также в следующем матричном виде:

$$I = \mathrm{Tr} \{ (K - AM) B (K^{\mathrm{T}} - M^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}) \}, \tag{2}$$

где $\mathrm{Tr}$ — след матрицы, $B = \mathrm{diag} \{ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1} \}$.

Сформулированная задача исследовалась в работах [1] (при $n = 3$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$) и [2], причем процедура минимизации функционала (2) сводилась к нахождению квадратного корня от сингулярной неотрицательно определенной симметричной матрицы $n$-го порядка. Предлагаемый в настоящей работе подход позволил свести задачу к нахождению единственного положительно определенного решения матричного квадратного уравнения (алгебраического уравнения Риккати) размерности $n - 1$.

Поскольку искомое ортогональное преобразование принадлежит такому множеству матриц $A$, что столбцы матриц $K_0 = AM$ и $K$ находятся в одной гиперплоскости, то в силу полного ранга матриц $K$ и $M$ для матрицы $K_0$ справедливо представление

$$K_0 = KX, \tag{3}$$

в котором невырожденная матрица $X$ удовлетворяет (вследствие ортогональности $A$) уравнению

$$X^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} K X = M^{\mathrm{T}} M. \tag{4}$$

При этом из равенств (2) и (3) следует

$$I = \mathrm{Tr} \{ (E - X^{\mathrm{T}}) K^{\mathrm{T}} K (E - X) B \}, \tag{5}$$

т. е. задача минимизации функционала (2) на множестве ортогональных матриц $A$ эквивалентна минимизации функционала (5) на множестве удовлетворяющих ограничению (4) матриц $X$.

Процедура минимизации функционала (5) при ограничении (4) сводится к нахождению стационарного значения функционала $I_0 = I + \mathrm{Tr}\{(X^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KX - M^{\mathrm{T}}M)\Lambda\}$, где $\Lambda$ — симметричная матрица, элементами которой являются множители Лагранжа. Из равенства нулю первой вариации этого функционала

$$\delta I_0 = 2\mathrm{Tr}\{\delta X^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}K[X(B+\Lambda) - B]\} = 0$$

следует, что для искомой матрицы $X$ справедливо представление

$$X = BS \tag{6}$$

(матрица $S$ — симметричная), подстановка которого в уравнение (4) и функционал (5) приводит к алгебраическому уравнению Риккати

$$SBK^{\mathrm{T}}KBS = M^{\mathrm{T}}M \tag{7}$$

и функционалу

$$I = \mathrm{Tr}\{K^{\mathrm{T}}KB + M^{\mathrm{T}}MB\} - 2\mathrm{Tr}\{BK^{\mathrm{T}}KBS\}. \tag{8}$$

Из равенств (7) и (8) очевидно, что минимум функционалу (5) доставляет такое решение уравнения (7), которое обеспечивает $\max \mathrm{Tr}\{BK^{\mathrm{T}}KBS\}$. Таким решением, вследствие полного ранга матриц $K$ и $M$, является единственное положительно определенное решение $S_*$ этого уравнения [3].

Следовательно, в соответствии с равенствами (3) и (6) искомая матрица $A_*$ удовлетворяет уравнению

$$K_* = A_* M, \tag{9}$$

где $K_* = KBS_*$, и ее определение сводится к построению векторов $k^*$ и $m$, являющихся ортогональными дополнениями столбцов матриц $K_*$ и $M$ $(K_*^{\mathrm{T}}k^* = 0,\ M^{\mathrm{T}}m = 0)$ и обеспечивающих равенства $m^{\mathrm{T}}m = k^{*\mathrm{T}}k^*$, $\mathrm{sign}(\det Y) = \mathrm{sign}(\det Z)$, где $Y = \| K_* k^* \|$, $Z = \| Mm \|$.

Решение сформулированной задачи (доставляющая минимум функционалу (2) ортогональная матрица $A_*$) определяется, согласно (9), выражением

$$A_* = YZ^{-1}. \tag{10}$$

Проиллюстрируем применение предложенного алгоритма в случае, когда в трехмерном пространстве заданы две пары векторов.

Предположим, что столбцы матриц $K$ и $M$ нормированы, т. е. $\| k_i \|^2 = \| m_i \|^2 = 1$, $i = 1, 2$, и пусть $\varphi_k \neq 0$ и $\varphi_m \neq 0$ — углы между векторами $k_1$, $k_2$ и $m_1$, $m_2$ соответственно, $\Delta = \varphi_k - \varphi_m$, $\gamma = \sqrt{\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2\cos\Delta + \beta_2^2}$. Тогда требуемое решение алгебраического уравнения Риккати (7) имеет вид

$$S_* = \frac{1}{\gamma \sin\varphi_k} \left\| \begin{matrix} \sin\varphi_k + \dfrac{\beta_2}{\beta_1}\sin\varphi_m & \sin\Delta \\ \sin\Delta & \sin\varphi_k + \dfrac{\beta_1}{\beta_2}\sin\varphi_m \end{matrix} \right\|,$$

а искомое ортогональное преобразование, согласно (10), определяется выражением

$$A_* = \frac{1}{\sin^2\varphi_m}[k_1^*(m_2 \times m)^{\mathrm{T}} + k_2^*(m \times m_1)^{\mathrm{T}} + k^* m^{\mathrm{T}}],$$

где $\| k_1^* k_2^* \| = \| \beta_1 k_1 \beta_2 k_2 \| S_*$, $k^* = k_1^* \times k_2^*$, $m = m_1 \times m_2$. При этом $I_{\min} = 2(\beta_1 + \beta_2 - \gamma)$.

Земетим, что в рассматриваемом здесь частном случае для нахождения матрицы преобразования координат применим также подход работы [4], использующий аппарат параметров Родрига—Гамильтона.

1. *Брок Д.* Оптимальные матрицы, описывающие линейные системы // Ракет. техника и космонавтика.— 1968.— 6, № 7.— С. 88—92.
2. *Голубков В. В.* Определение локальной ориентации космических аппаратов // Косм. исслед.— 1970.— 8, вып. 6.— С. 811—822.
3. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления.— М.: Мир, 1977.— 652 с.
4. *Науменко К. И.* Локальный метод определения ориентации твердого тела // Навигация и управление.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982.— С. 121—128.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 03.06.86