УДК 517.926.7
А. И. Товбис

К вопросу о представлении решения матричного дифференциального уравнения в виде факториального ряда

1. Рассматривается матричное дифференциальное уравнение

$$Y'(z) = z^{r-1} A(z) Y(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}, \tag{1}$$

где $A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j z^{-j}$ голоморфна в окрестности $z = \infty$, $r \in \mathbb{N}$. Его решение имеет вид [1]

$$Y(z)=\Phi(z)\,G_b(z),\tag{2}$$

где аналитическая на римановой поверхности $\log z$ матрица-функция $\Phi(z)$ имеет в некотором нормальном секторе S асимптотическое разложение $\Phi(z)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\Phi_j z^{-j}$, $z\to\infty$, $z\in S$, и $\Phi_0=I$, $G_b(z)$ — формальный инвариант Биркгофа.

В настоящей работе используются обозначения и терминология из [1,2], причем соответствующие ссылки иногда опускаются. Представляет интерес вопрос о нахождении самой матрицы-функции $\Phi(z)$, а не только ее асимптотического разложения. Хорн (см. [4]) фактически доказал, что $\Phi(z)$ допускает представление в виде факториального ряда по z^p, $p\in Q$, $p>0$, в некотором секторе S^* в случае, когда характеристические числа матрицы A_0 различны. Территин [3] доказал этот результат и в случае кратных характеристических чисел при некоторых дополнительных ограничениях. В работе [4, с. 383] ставится вопрос о том, можно ли избежать этих ограничений с помощью усовершенствования доказательств. В настоящей работе дается отрицательный ответ на этот вопрос. Точнее, доказано существование дифференциального уравнения вида (1), у которого некоторый столбец матрицы-функции $\Phi(z)=\mathcal{Y}(z)\,G_b^{-1}(z)$, где $\mathcal{Y}(z)$ — любое невырожденное решение уравнения (1), не допускает представления в виде факториального ряда по z^p ни при каких p. Следует отметить, что пригодный в общем случае способ построения (без факториальных рядов) матрицы-функции $\Phi(z)$ указан в работе [5].

2. Назовем последовательность матриц $\{A_n\}$ типа d, если

$$d=\inf\{\tilde d:(\exists C_{\tilde d}>0)\,(\forall n\in\mathbb{N})\,[\|A_n\|\leqslant C_{\tilde d}\,n^{\tilde d n}]\},\tag{3}$$

где $\|(a_{ij})\|=\max\limits_{j}\sum\limits_{i}|a_{ij}|$. Если множество в $\{\cdot\}$ пусто, то $d=\infty$. Типом формального ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty}F_j z^{-j}$ называется тип $\{F_j\}$.

Из этого определения непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть матрица-функция* $T(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}T_j z^{-j}$ *голоморфна на* ∞, $T_0=I$. *Тогда тип ряда* $\sum\limits_{j=0}^{\infty}F_j z^{-j}$ *совпадает с типом* $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}T_k z^{-k}\right)\times\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}F_j z^{-j}\right)$.

Следствием этой леммы и теоремы II из [6] является такой результат.

Следствие 1. *Если* $\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}F_j z^{-j}\right)G_b(z)$, $\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}\Phi_j z^{-j}\right)G_b(z)$ — *формальные решения уравнения* (1), *то типы* $\{E_j\}$ *и* $\{\Phi_j\}$ *совпадают.*

Говорят, что матрица-функция $\Phi(z)$ допускает представление в виде факториального ряда по z^p в секторе S^*, если

$$\Phi(z)=\tilde\Phi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde\Phi_k}{z^p/\omega\,(z^p/\omega+1)\ldots(z^p/\omega+(k-1))}\tag{4}$$

и ряд сходится абсолютно и равномерно при некотором $\omega\in\mathbb{C}$ и $z\in S^*$, $|z|>|z_0|$. Тогда, используя свойства факториальных рядов [4,7], можно утверждать, что $\Phi(z)$ допускает указанное представление в некотором секторе Σ, $S^*\subset\Sigma$, и раствор Σ не меньше π/p. Если, кроме того, для некоторого $r \in Q$, $r > 0$

$$\Phi(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j z^{-jz}, \quad z \to \infty, \ z \in S^*, \tag{5}$$

то это же разложение справедливо в Σ.

Лемма 2. *Если $\Phi(z)$ представима факториальным рядом по z^p в секторе S^* и в этом же секторе справедливо разложение* (5), *то тип $\{\Phi_j\}$ не больше rp^{-1}.*

Доказательство. Предположим, не ограничивая общности, что сектор S^* симметричен относительно положительной вещественной полуоси. Функция $\Phi(\zeta^{1/p})$ допускает представление в виде факториального ряда по ζ в секторе Σ^*, который является образом S^* при отображении $\zeta = z^p$. Воспользовавшись далее основной теоремой о факториальных рядах [4, с. 387], получим

$$\Phi(\zeta^{1/p}) = \int_0^{\infty} e^{-t\zeta} f(t)\, dt + \tilde{\Phi}_0, \tag{6}$$

где матрица-функция

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \tag{7}$$

голоморфна в некоторой полубесконечной полосе, содержащей неотрицательную полуось t. Подставляя (7) в (6) и интегрируя по частям, находим

$$\Phi(\zeta^{1/p}) \sim \tilde{\Phi}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{(k+1)!}{\zeta^{k+1}}, \quad \zeta \to \infty, \ \operatorname{Re}\zeta > 0,$$

или

$$\Phi(z) \sim \tilde{\Phi}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{(k+1)!}{z^{p(k+1)}}, \ z \to \infty, \ |\arg z| < \pi/2p.$$

Обозначим $\tilde{S} = S^* \cap \{z : |\arg z| < \pi/(2p)\}$. Тогда для матрицы-функции $\Phi(z)$ в секторе $\tilde{S}$ имеют место асимптотические разложения (5) и $\Phi(z) \sim \sim \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k z^{-pk}$, $z \to \infty$, $z \in \tilde{S}$, где $\Psi_0 = \tilde{\Phi}_0$, $\Psi_k = f_{k-1} k!$ при $k \geqslant 1$. Поскольку коэффициенты асимптотического ряда определяются однозначно, то все Ψ_k и Φ_j равны 0, кроме, быть может, тех, для которых $pk = rj$; в этом случае $\Psi_k = \Phi_j$. Из сходимости ряда (7) в некоторой окрестности 0 следует, что $\{\Psi_k\}$ имеет тип не выше 1. Далее

$$\|\Phi_j\| = \|\Psi_k\| \leqslant C_{1+\varepsilon} k^{(1+\varepsilon)k} = C_{1+\varepsilon} (jr/p)^{jr(1+\varepsilon)/p} < C j^{(1+2\varepsilon)jr/p} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Последнее неравенство доказывает лемму.

3. Рассмотрим некоторую допустимую пару, заданную формальным инвариантом Биркгофа (см. [1, с. 280])

$$G_b(z) = $$

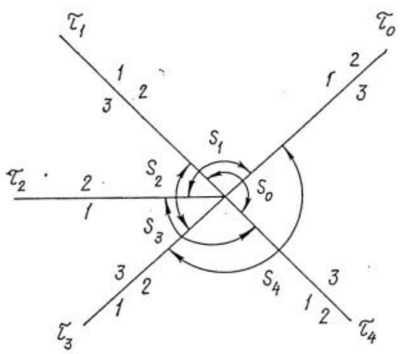
$$= \begin{pmatrix} z^{-1/4} & 0 & 0 \\ 0 & z^{1/4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2\sqrt{z}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\sqrt{z}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{z^2/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(z) & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & e^{z^2/2} \end{pmatrix}$$

и системой связывающих матриц V, которая будет построена позже. Формальному инварианту Биркгофа $G_b(z)$ соответствуют лучи Стокса τ_ν, $\nu = 0, \ldots, 4$, образующие с положительной вещественной полуосью углы соответственно $\pi/4$, $3\pi/4$, π, $5\pi/4$, $7\pi/4$ (рисунок).

Дифференциальное уравнение

$$Y'(z) = \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y(z) \tag{8}$$

имеет формальное решение $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-k}\right) \tilde{G}_b(z)$ [6, с. 187], причем с учетом леммы 3.1 из [8] нетрудно установить, что тип $\{\varphi_k\}$ равен 2. Связывающую матрицу уравнения (8), соответствующую лучу Стокса $\arg z = \pi$, обозначим через $\tilde{V}$. На рисунке изображены лучи Стокса τ_ν и нормальные секторы S_ν. Цифры в секторах обозначают номер доминирующих экспонент [1, с. 263].



Выберем систему связывающих матриц $V = \{V_1, V_2, \ldots, V_5\}$ следующим образом:

$$V_1 = V_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_3 = V_5 = I, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \tilde{V} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha\beta \neq 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что пара (G_b, V) является допустимой.

Пусть уравнение

$$Y'(z) = z^{r-1} A(z) Y(z) \tag{9}$$

и его формальное решение $H(z) = H_b(z)\, G_b(z)$ соответствуют допустимой паре (G_b, V) (см. [1], теорема IX). Можно считать [9, с. 165, 172], что $A(z)$, $H_b(z)$ и $\Phi_\nu(z)$, где $\Phi_\nu(z) = X_\nu(z)\, G_b^{-1}(z)$, $X_\nu(z)$ — нормальное решение в секторе S_ν, $\nu \in \mathbb{Z}$, имеют нижнетреугольный блочный вид; блочная структура индуцирована соответствующей структурой $G_b(z)$ и V.

Пусть $T_j(z)$ обозначает j-й столбец $\Phi(z) = Y(z)\, G_b^{-1}(z)$, где $Y(z)$ — произвольное обратимое решение (9). Известно, что

$$\Phi(z) = \Phi_\nu(z)\, G_b(z)\, C_\nu G_b^{-1}(z), \tag{10}$$

где C_ν — постоянная обратимая матрица. Нашей целью является доказательство некоторого утверждения о первых двух столбцах матрицы $\Phi(z)$. Нетрудно заметить, что $T_1(z)$ и $T_2(z)$ не изменяются, если заменить в матрице C_ν элементы $(C_\nu)_{13}$, $(C_\nu)_{23}$ нулями. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\Phi(z)$ имеет блочно-треугольный вид.

Лемма 3. *Если какой-либо из столбцов $T_j(z)$, $j = 1, 2$, имеет асимптотическое разложгние в секторе S по z^p, то $\Phi(z)$ имеет в S асимптотическое разложение по $z^{1/2}$.*

Доказательство. Положим для определенности $j = 1$ и $S \cap S_\nu^* \neq \varnothing$, где сектор $S_\nu^* = S_\nu \cap S_{\nu+1}$. Имеем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\, \Phi_\nu(z) \begin{pmatrix} \sum\limits_{i,j=1}^{2} \alpha_{ij} & \sum\limits_{i,j=1}^{2} (-1)^{j-1} \alpha_{ij} z^{-1/2} & 0 \\ \sum\limits_{i,j=1}^{2} (-1)^{i-1} \alpha_{ij} z^{1/2} & \sum\limits_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} & 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{2} \alpha_{3j} z^{-1/4} & \sum\limits_{j=1}^{2} (-1)^{j-1} \alpha_{3j} z^{1/4} & 2c_{33} \end{pmatrix},$$

где $C_\nu = (c_{ij})$, $\alpha_{ij} = c_{ij} e^{q_i - q_j}$, $q_1 = -2\sqrt{z}$, $q_2 = 2\sqrt{z}$, $q_3 = z^2/2$.

Заметим, что $c_{ij}=0$, если $\operatorname{Re}(q_i(z)-q_j(z))>0$ при $z\in S_\nu^*$; иначе $T_1(z)$ не может иметь асимптотического разложения в S. Учитывая, что $\forall\nu\in\mathbb{Z}$

$$\Phi_\nu(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k z^{-k},\quad z\to\infty,\ z\in S_\nu,$$

получаем

$$\Phi(z)\sim\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k z^{-k}\right)\begin{pmatrix} c_{11}+c_{22} & z^{-1/2}(c_{11}-c_{22}) & 0\\ z^{1/2}(c_{11}-c_{22}) & c_{11}+c_{22} & 0\\ 0 & 0 & 2c_{33}\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{k=-1}^{\infty}\overline{\Phi}_k z^{-k/2},\ z\to\infty,\ z\in S_\nu^*, \tag{11}$$

откуда следует утверждение леммы в случае $S\subset S_\nu^*$.

Обозначим через N множество таких ν, что $S\cap S_\nu^*\neq\varnothing$. Из асимптотического равенства (11) следует, что соответствующие диагональные элементы матриц C_ν равны для всех $\nu\in N$. Значит, соотношение (11) справедливо в $\bigcup\limits_{\nu\in N}S_\nu^*$. Это же асимптотическое равенство верно при $z\in\tau_\nu$, если $\tau_\nu\in S$, что и завершает доказательство.

Заметим, что блок $H_{11}(z)$ матрицы $H(z)$ является формальным решением уравнения $U'(z)=z^{r-1}A_{11}(z)U(z)$, которое эквивалентно по Биркгофу уравнению (8), так как соответствующие инварианты Биркгофа совпадают (см. [1], теорема VIII). Тогда согласно лемме 1 ряд $(H_b(z))_{11}$ имеет тип 2.

Предположим, что вектор-функции $T_j(z)$ допускают представления в виде факториального ряда по z^{p_j} в секторе $\widetilde{S}_j$, $j=1,2$, и, следовательно, (см. [4], теорема 46.3) имеют асимптотические разложения по z^{-p_j} в секторах $\widetilde{S}_j$ при $z\to\infty$. Тогда согласно лемме 3

$$T_j(z)\sim\sum_{k=-1}^{\infty}T_{jk}z^{-k/2},\quad z\to\infty,\ z\in\widetilde{S}_1\cup\widetilde{S}_2, \tag{12}$$

и, следовательно, тип $\{T_{jk}\}$ не больше $1/(2p_j)$ в силу леммы 2. Однако из (11) вытекает, что хотя бы для одного j тип $\{T_{jk}\}$ не меньше 1. Поэтому $\min(p_1,p_2)\leqslant 1/2$ и, значит, асимптотическое разложение (11) имеет место в секторе раствора по крайней мере 2π.

С другой стороны, используя формулу для вычисления связывающих матриц $V_k=e^{-2\pi imL}V_s e^{2\pi imL}$, где $k=5m+s$, $m\in\mathbb{Z}$, $0\leqslant s\leqslant 4$, $L=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$ — формальная матрица монодромии, и теорему 1 из [6], убеждаемся, что асимптотическое разложение (11) имеет место в секторе раствора не больше $3/2\pi$.

Полученное противоречие свидетельствует о том, что хотя бы один из столбцов $T_j(z)$, $j=1,2$, не допускает представления в виде факториального ряда по z^p ни при каких p.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'''-zy''-(1+z^{-1})y'+(1+z)y=0. \tag{13}$$

Полагая $y=u_3$, $y'=u_2$, $y''=u_1$, $U=\operatorname{col}(u_1,u_2,u_3)$, получаем систему уравнений $U'=\begin{pmatrix}z&1+z^{-1}&1+z\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}U$, которая преобразованием $U=\begin{pmatrix}1&-z&-1\\0&1&-z\\0&0&1\end{pmatrix}X$ сводится к системе

$$X'(z) = \begin{pmatrix} 0 & z^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} X(z).$$

Решение этой системы имеет вид

$$X(z) = (T_1(z),\ T_2(z),\ T_3(z)) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(z) & \varphi_2'(z) & 0 \\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & 0 \\ x_{31}(z) & x_{32}(z) & e^{z^2/2} \end{pmatrix},$$

где $\varphi_k = \sqrt{z} H_1^{(k)}(2i\sqrt{z})$, $k = 1, 2$, а функции $x_{3k}(z)$ удовлетворяют уравнениям $x_{3k}'(z) = zx_{3k}(z) + \varphi_k(z)$ и, следовательно,

$$x_{3k}(z) = a_k e^{z^2/2} + e^{z^2/2} \int\limits_{+\infty}^{z} e^{-t^2/2} \varphi_k(t)\, dt.$$

Если вектор-функции $T_k(z) e^{(-1)^{k+1} 2\sqrt{z}}$ допускают представление в виде факториального ряда по z_p, то, как доказано выше, они должны иметь асимптотические разложения в секторах раствора больше 2π.

Однако функции $x_{3k}(z) e^{(-1)^{k+1} 2\sqrt{z}}$ имеют асимптотические разложения только при $a_k = 0$ и в секторе раствора не превышающего $3\pi/2$. Это следует из асимптотических свойств функций Ганкеля и функции $e^{-x} \operatorname{Ei}(x)$, имеющей разложение в секторе раствора не превышающего 3π (см. [4]). Следовательно, уравнение (13) не имеет такого базиса пространства решений $f_1(z) e^{-2\sqrt{z}}$, $f_2(z) e^{2\sqrt{z}}$, $f_3(z) e^{z^2/2}$, что функции $f_k(z)$ при некотором $p \in Q$ допускают представления в виде факториального ряда по z^p.

Замечание 1. Решение уравнения (9) можно представить в виде (см. [1, с. 278]) $Y(z) = \Phi_*(z) G_*(z)$, где $G_*(z)$ означает формальный инвариант одного из типов: Биркгофа, аналитический, мероморфный, дробно-мероморфный. Для уравнения (9) в первых трех случаях $G_b = G_a = G_m$. Для дробно-мероморфного случая $\Phi_r(z) = \Phi_b(z) \operatorname{diag}(1, \sqrt{z}, 1)$, поэтому все результаты, полученные для случая инварианта Биркгофа, справедливы и для остальных случаев.

1. *Balser W., Jurkat W. B., Lutz D. A.* A general theory of invariants for meromorphic differential equations : Part II, Proper invariants // Funkc. ekvacioj. — 1979. — 22. — P. 252—283.
2. *Balser W., Jurkat W. B., Lutz D. A.* A general theory of invariants for meromorphic differential equations : Part I, Formal invariants // Ibid.— 1979.— 22.— P. 197—221.
3. *Turritin H.* Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of irregular singular point // Acta Math.— 1955.— 93.— P. 27—66.
4. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1968.— 464 с.
5. *Товбис А. И.* О методе Еругина построения решения в окрестности иррегулярной особой точки.— Воронеж, 1983.— 19 с.— Деп. в ВИНИТИ 13.05.83, № 2921-83.
6. *Balser W., Jurkat W. B., Lutz D. A.* A general theory of invariants for meromorphic differential equations : Part III, Applications. — Houston J. Math. — 1980. — 6, N 2. — P. 149 —188.
7. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.— М. : Наука, 1971.— 288 с.
8. *Jurkat W. B., Lutz D. A., Peyerimhoff A.* Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations : Part I//J. Math. Anal. and Appl.—1976.— 53.— P. 438—470.
9. *Balser W., Jurkat W. B., Lutz D. A.* Invariants for reducible systems of meromorphic differential equations // Proc. Edinburgh Math. Soc.— 1980.— 23.— P. 163—186.

Воронеж. лесотехн. ин-т

Получено 25.07.83,
После доработки — 04.08.86