УДК 517.949

Ю. Ф. Долгий

Спектр оператора монодромии для одного разностного уравнения с непрерывным временем

Целью настоящей работы является изучение спектра оператора монодромии уравнения

$$x(t) = a(t)\,x(t - \tau(t)), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $x \in R^1$, $a(t)$ — ω-периодическая функция, допускающая непрерывную производную, $a(t) \neq 0$, $\tau(t)$ — ω-периодическая, непрерывная функция, допускающая при $0 < t < \omega$ непрерывную производную $\dot{\tau}(t) < 1$ такую, что $\dot{\tau}(+0) < 0$, $\dot{\tau}(-0) > 0$, $\tau(0) = \omega$, $0 < \tau(t) < \omega$ при $0 < t < \omega$, существуют конечные, односторонние производные $\ddot{\tau}(+0)$, $\ddot{\tau}(-0)$. Оператор монодромии определяется формулой [1]

$$U\varphi(\vartheta) = x(\omega + \vartheta, \varphi), \quad \vartheta \in [-\omega, 0], \tag{2}$$

где $x(\omega + \vartheta, \varphi)$ — отрезок решения уравнения (1) с начальной функцией $\varphi(\vartheta)$. Нетрудно найти явный вид оператора монодромии

$$U\varphi(\vartheta) = a(\vartheta)\varphi(u(\vartheta)), \quad \vartheta \in [-\omega, 0], \tag{3}$$

где $u(\vartheta) = \vartheta + \omega - \tau(\vartheta)$.

Изучим спектр оператора монодромии при условии, что он действует в пространстве $L^2[-\omega, 0]$. Аналогичная задача для пространства $C[-\omega, 0]$ решалась в работе [3], для пространства $L^2[-\omega, 0]$ известна только величина спектрального радиуса [2].

Характер спектра оператора монодромии связан с разрешимостью уравнения

$$\rho\varphi(\vartheta) = a(\vartheta)\varphi(u(\vartheta)) + f(\vartheta) \tag{4}$$

в пространстве $L^2[-\omega, 0]$, где $\rho \in \mathbb{C}$, $f(\vartheta) \in L^2[-\omega, 0]$. Уравнение (4) относится к классу функциональных уравнений [4]. Для линейных уравнений вида (4) наиболее полный результат получен для пространства $C^r[-\omega, 0)$, $r \geqslant 0$, с одной неподвижной точкой у функции $u(\vartheta)$ [4, 5]. Случай с двумя неподвижными точками на отрезке $[-\omega, 0]$ рассматривался в работах [6, 7], в которых получены условия существования обобщенного решения уравнения (4), в частном случае, методом обобщенного суммирования рядов.

Теорема. *Множество* $|\rho| < |a(0)|/\sqrt{1-\dot{\tau}(+0)}$, $|\rho| > |a(0)|/\sqrt{1-\dot{\tau}(-0)}$ *является множеством регулярных точек, множество* $|a(0)|/\sqrt{1-\dot{\tau}(+0)} < |\rho| < |a(0)|/\sqrt{1-\dot{\tau}(-0)}$ — *множеством собственных значений, множество* $|\rho| = |a(0)|/\sqrt{1-\dot{\tau}(+0)}$, $|\rho| = |a(0)|/\sqrt{1-\dot{\tau}(-0)}$ — *множеством точек непрерывного спектра оператора монодромии.*

Замечание. Доказательство сформулированного утверждения следует схеме, предложенной в работе [3], где рассматривалась аналогичная задача для пространства $C[-\omega, 0]$ и показано, что спектральное множество совпадает с окружностью $|\rho| = |a(0)|$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $\vartheta_0 \in (-\omega, 0)$ и введем множества

$$E_k = [u^{(k)}(\vartheta_0), u^{(k+1)}(\vartheta_0)], \quad -\infty < k < +\infty. \tag{5}$$

Здесь $u^{(k)}(\vartheta)$ — последовательные итерации функции $u(\vartheta)$. Множества E_k, $-\infty < k < +\infty$, покрывают интервал $(-\omega, 0)$ [3]. Решение уравнения (4) будем строить методом шагов, продолжая его с начального отрезка $[\vartheta_0, u(\vartheta_0)]$, на котором зададим начальную функцию $\varphi_0(\vartheta) \in L^2[\vartheta_0, u(\vartheta_0)]$. Будем считать, что $\rho \neq 0$, так как непосредственно из уравнения (4) следует, что $\rho = 0$ — регулярная точка оператора монодромии. Из уравнения (4) находим

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{\rho^n}\prod_{k=0}^{n-1} a(u^{(k)}(\vartheta))\varphi_0(u^{(n)}(\vartheta)) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\rho^{k+1}}\prod_{m=0}^{k-1} a(u^{(m)}(\vartheta)) f(u^{(k)}(\vartheta)) \tag{6}$$

при $\vartheta \in E_{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\prod_{m=0}^{-1} a(u^{(m)}(\vartheta)) = 1$,

$$\varphi(\vartheta) = \rho^n \prod_{k=1}^{n} a^{-1}(u^{(-k)}(\vartheta))\varphi_0(u^{(-n)}(\vartheta)) - \sum_{k=1}^{n}\rho^{k-1}\prod_{m=1}^{k} a^{-1}(u^{(-m)}(\vartheta)) f(u^{(-k)}(\vartheta)) \tag{7}$$

при $\vartheta \in E_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Полученное решение должно принадлежать пространству $L^2[-\omega, 0]$, т. е. при пошаговом продолжении решения уравнения (4) должна сохраняться среднеквадратичная ограниченность решения; в работе [3] требовалось сохранение равномерной ограниченности решения. Рассмотрим интегралы

$$I_1 = \int_{-\omega}^{\vartheta_0} |\varphi(\vartheta)|^2 d\vartheta, \quad I_2 = \int_{u(\vartheta_0)}^{0} |\varphi(\vartheta)|^2 d\vartheta \tag{8}$$

для решений уравнения (4), определяемых формулами (6), (7).

Лемма 1. *Если $|\rho| < \rho_1$, то для сходимости интеграла I_1 необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi_0(s) = -\frac{1}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a(0)}\right)^k \alpha_k(s) f(u^{(-k)}(s)); \tag{9}$$

если $|\rho| = \rho_1$, то существуют функции $f(\vartheta) \in L^2[-\omega, 0]$, для которых интеграл I_1 не сходится, для ограниченных функций $f(\vartheta)$ для сходимости интеграла I_1 необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi_0(s)$ определялась формулой (9); если $|\rho| > \rho_1$, то интеграл I_1 сходится при любой функции $\varphi_0(s) \in \in L^2[\vartheta_0, u(\vartheta_0)]$. Здесь

$$\rho_1 = \frac{|a(0)|}{\sqrt{1-\dot{\tau}(+0)}}, \quad \alpha_k(s) = \prod_{m=1}^{k}\frac{a(0)}{a(u^{(-m)}(s))}, \quad k \geqslant 1. \tag{10}$$

Доказательство. Используя формулу (6), получаем следующее представление интеграла:

$$I_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\rho_1}{\rho}\right|^{2n}\int_{\vartheta_0}^{u(\vartheta_0)} \beta_n(s)\,\alpha_n^{-2}(s)\,|\psi_n(s)|^2 ds. \tag{11}$$

Здесь $\beta_n(s) = \dot{u}^{(n)}(s)\,\dot{u}^{-n}(-\omega)$,

$$\psi_n(s) = \varphi_0(s) + \frac{1}{\rho}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\rho}{a(0)}\right)^k \alpha_k(s) f(u^{(-k)}(s)), \quad n \geqslant 1. \tag{12}$$

Существуют пределы

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n(s) = \alpha(s), \tag{13}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n(s) = \beta(s), \tag{14}$$

причем функция $\alpha(s)$ является непрерывно дифференцируемой, а $\beta(s)$ — непрерывной, $\beta(s) > 0$ при $s \in E_0$.

Пусть $|\rho| < \rho_1$. Тогда для сходимости ряда (11) необходимо, чтобы

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_n(s) = 0. \tag{15}$$

Предел (15) есть предел последовательности функций в пространстве $L^2[\vartheta_0, u(\vartheta_0)]$. Условие (15) выполняется тогда и только тогда, когда условие (9) выполняется почти всюду на отрезке $[\vartheta_0, u(\vartheta_0)]$. При выполнении условия (9)

$$\psi_n(s) = -\frac{1}{\rho}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a(0)}\right)^k \alpha_k(s) f(u^{(-k)}(s)). \tag{16}$$

Последовательно находим

$$\|\psi_n(s)\|_0 \leqslant P_1 \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\rho}{\rho_1}\right|^k \left(\int_{u^{(-k)}(\vartheta_0)}^{u^{(-k+1)}(\vartheta_0)} |f(\vartheta)|^2 d\vartheta\right)^{1/2},$$

$$\| \psi_n (s) \|_0^2 \leqslant P_2 \left| \frac{\rho}{\rho_1} \right|^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{\rho}{\rho_1} \right|^k \int\limits_{u^{(-k)}(\vartheta_0)}^{u^{(-k+1)}(\vartheta_0)} | f(\vartheta) |^2 \, d\vartheta.$$

Здесь P_1, P_2 — некоторые постоянные, $\| \psi (s) \|_0$ — норма функции в пространстве $L^2 [\vartheta_0, u(\vartheta_0)]$. Используя полученные оценки, можно показать, что существует такая постоянная P_3, что

$$I_1 \leqslant P_3 \| f(\vartheta) \|^2, \tag{17}$$

где $\| f(\vartheta) \|$ — норма функции в пространстве $L^2 [-\omega, 0]$.

Пусть $| \rho | = \rho_1$. Для сходимости ряда (11) по-прежнему необходимо выполнение условия (15). Существуют функции $f(\vartheta) \in L^2 [-\omega, 0]$, для которых условие (15) не выполняется. Например, $f(\vartheta) = 0$ при $\vartheta \in (\vartheta_0, 0)$, $f(\vartheta) = \frac{1}{k} \dot{u}^{k/2} (-\omega) \, (\rho_1/\rho)^k \, \alpha_k^{-1} (s)$ при $\vartheta \in (u^{(-k)} (\vartheta_0), u^{(-k+1)} (\vartheta_0))$, $k \geqslant 1$. Для ограниченных функций условие (15) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие (9) почти всюду на отрезке $[\vartheta_0, u(\vartheta_0)]$. При выполнении этого условия ряд (11) сходится.

Пусть $| \rho | > \rho_1$. Для функций $\psi_n (s)$ последовательно находим оценки

$$\| \psi_n (s) \|_0 \leqslant \| \varphi_0 (s) \|_0 + P_1 \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\rho}{\rho_1} \right|^k \left(\int\limits_{u^{(-k)}(\vartheta_0)}^{u^{(-k+1)}(\vartheta_0)} | f(\vartheta) |^2 d\vartheta \right)^{1/2},$$

$$\| \psi_n (s) \|_0^2 \leqslant \| \varphi_0 (s) \|_0^2 + P_2 \| \varphi_0 (s) \|_0 \| f(\vartheta) \| \left| \frac{\rho}{\rho_1} \right|^n +$$

$$+ P_3 \left| \frac{\rho}{\rho_1} \right|^n \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\rho}{\rho_1} \right|^k \int\limits_{u^{(-k)}(\vartheta_0)}^{u^{(-k+1)}(\vartheta_0)} | f(\vartheta) |^2 \, d\vartheta.$$

Применяя эти оценки для ряда (11), находим следующую оценку интеграла:

$$I_1 \leqslant P_4 \| \varphi_0 (s) \|_0^2 + P_5 \| \varphi_0 (s) \|_0 \| f(\vartheta) \| + P_6 \| f(\vartheta) \|^2. \tag{18}$$

Здесь P_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$,— некоторые постоянные.

Аналогично доказывается утверждение, дающее условия сходимости интеграла I_2.

Лемма 2. *Если* $| \rho I| < \rho_2$, *то интеграл* I_2 *сходится при любой функции* $\varphi_0 (s) \in L^2 [\vartheta_0, u(\vartheta_0)]$; *если* $| \rho | = \rho_2$, *то существуют функции* $f(\vartheta) \in L^2 [-\omega, 0]$, *для которых интеграл* I_2 *не сходится, для ограниченных функций* $f(\vartheta)$ *для сходимости интеграла* I_2 *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi_0 (s) = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a(0)}{\rho} \right)^k \tilde{\alpha}_k (s) \, f(u^{(k)} (s)); \tag{19}$$

если $| \rho | > \rho_2$, *то для сходимости интеграла* I_2 *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (19). *Здесь*

$$\rho_2 = \frac{| a(0) |}{\sqrt{1 - \dot{\tau} (-0)}}, \quad \tilde{\alpha}_k (s) = \prod_{m=0}^{k-1} \frac{a(u^{(m)} (s))}{a(0)}, \quad k \geqslant 1, \quad \tilde{\alpha}_0 (s) = 1. \tag{20}$$

Для интеграла I_2 можно получить оценки, аналогичные оценкам (17) и (18). При $| \rho | < \rho_2$

$$I_2 \leqslant M_1 \| \varphi_0 (s) \|_0^2 + M_2 \| \varphi_0 (s) \|_0 \| f(\vartheta) \| + M_3 \| f(\vartheta) \|^2. \tag{21}$$

При $|\rho| > \rho_2$

$$I_2 \leqslant M_4 \| f(\vartheta) \|^2. \tag{22}$$

Здесь M_i, $i = 1, 2, 3, 4$,— некоторые постоянные.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $|\rho| < \rho_1$. Из доказанных лемм следует, что для существования решения уравнения (4), принадлежащего $L^2[-\omega, 0]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi_0(s) = -\frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a(0)} \right)^k \alpha_k(s) f(u^{(k)}(s)), \tag{23}$$

т. е. в данном случае решение существует и единственно для всех $f(\vartheta) \in L^2[-\omega, 0]$, явный вид его получается при постановке найденной функции $\varphi_0(s)$ в формулы (6) и (7). Поэтому для регулярности точки ρ необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная P, что

$$I_1 + \int_{\vartheta_0}^{u(\vartheta_0)} |\varphi_0(s)|^2 ds + I_2 \leqslant P \| f(\vartheta) \|^2. \tag{24}$$

Из формулы (23) следует, что существует такая постоянная T, что

$$\| \varphi_0(s) \|_0 \leqslant T \| f(\vartheta) \|. \tag{25}$$

Используя полученную оценку и оценки (17) и (21), убеждаемся в справедливости неравенства (24).

Пусть $|\rho| = \rho_1$. Из доказанных лемм следует, что если решение уравнения (4) существует, то оно единственно, а также существование решений этого уравнения для множества ограниченных функций $f(\vartheta)$, которое плотно в пространстве $L^2[-\omega, 0]$. Следовательно, данные значения ρ являются точками непрерывного спектра [8].

Пусть $\rho_1 < |\rho| < \rho_2$. Из доказанных лемм следует, что решение уравнения (4) существует при любых $\varphi_0(s) \in L^2[-\omega, 0]$, т. е. в данном случае оно не единственно. Следовательно, данные значения ρ являются собственными значениями или точками точечного спектра оператора монодромии.

Пусть $|\rho| = \rho_2$. Решение уравнения (4) единственно, оно существует для плотного в пространстве $L^2[-\omega, 0]$ множества ограниченных функций.

Пусть $|\rho| > \rho_2$. Для существования решения уравнения (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi_0(s) = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a(0)}{\rho} \right)^k \tilde{\alpha}_k(s) f(u^{(k)}(s)), \tag{26}$$

т. е. решение существует и единственно для всех $f(\vartheta) \in L^2[-\omega, 0]$. Поэтому для регулярности точки ρ, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная P, что выполнялось неравенство (24). Для функции (26) справедливо неравенство вида (25). Используя оценки (18) и (22), убеждаемся в справедливости неравенства (24). Теорема доказана.

1. *Долгий Ю. Ф., Леонтьева Т. Б.* Устойчивость разностных систем с непрерывным временем.— Свердловск., 1984.— 16 с.— Деп. в ВИНИТИ 06.07.84, № 4765-84.
2. *Березанский Л. М.* Линейное функционально-дифференциальное уравнение. Непрерывная зависимость от параметра // Дифференц. уравнения. — 1984. — 20, № 4. — С. 562—570.
3. *Долгий Ю. Ф.* Устойчивость одного уравнения нейтрального типа с переменным запаздыванием // Там же.— 1985.— 21, № 9.— С. 1480—1489.
4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1974.— 119 с.
5. *Кучма М.* Единственность решений функциональных уравнений с одной переменной // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.— Киев : Наук. думка, 1977.— С. 187—199.
6. *Malenica Mirjana.* O rješenju funcionalne jednacine $\varphi(x) + \varphi(f(x)) = F(x)$ i neki specijalni primjeri regularnih transformacija // Rad. Akad. nauk a Umjetn. BiH Od. privr. tehn. nauka.— 1981.— **68**, N 6.— C. 127—132.

7. *Malenica Mirjana.* O rješenju funkcionalne jednačine $\varphi(x) + \varphi(f(x)) = F(x)$ // Rad. Akad. nauka i Umjetn. BiH Od. prirod i mat.nauka.— 1980.— **60**, N 19.— C. 103—109.
8. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 895 с.

Урал. ун-т

Получено 28.01.84,
после доработки — 15.01.86