УДК 512.544.4

Е. Г. Косман

Построение силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы

Пусть F — конечное поле из $q = p^k$ элементов; V — счетномерное векторное пространство над F; $\overline{\mathrm{GL}}(V)$ — ограниченная линейная группа, т. е. группа таких обратимых линейных преобразований g пространства V, для каждого из которых существует лишь конечное число линейно независимых векторов $v_i \in V$, $v_i = v_i(g)$, $i = \overline{1, n}$, таких, что $gv_i \neq v_i$, а для любого $v \in \in V/V_n$, где $V_n = V_n(g) = \langle v_i(g), i = \overline{1, n}\rangle$, $gv = v$; $x_1, x_2, \ldots$ — упорядоченный базис V; $V_n = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$; $\overline{V}_n = \langle x_i \mid i = \overline{n+1, \infty}\rangle$; $V_n^\pi = \langle x_{\pi(i)} \mid i = \overline{1, n}\rangle$, $\overline{V}_n^\pi = \langle x_{\pi(i)} \mid i = \overline{n+1, \infty}\rangle$ для подстановки $\pi \in S(\mathbb{N})$. Определим подгруппу $\mathrm{GL}(V_n^\pi)$ группы $\overline{\mathrm{GL}}(V)$, полагая $\mathrm{GL}(V_n^\pi) = \langle g \in \overline{\mathrm{GL}}(V) \mid gV_n^\pi = V_n^\pi$; $gv = v$ для любого $v \in \overline{V}_n^\pi\rangle$. Тогда легко видеть, что $\overline{\mathrm{GL}}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{GL}(V_n^\pi)$ для бесконечной возрастающей последовательности подгрупп $\mathrm{GL}(V_1^\pi) \subset \subset \mathrm{GL}(V_2^\pi) \subset \ldots$ и фиксированной $\pi \in S(\mathbb{N})$.

Определение 1. *Силовская p-подгруппа P получается π-пополнением, если существует возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots$ такая, что $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{n_i}$ для возрастающей последовательности $P_{n_1} \subset P_{n_2} \subset \ldots$ силовских p-подгрупп P_{n_i} групп $\mathrm{GL}(V_{n_i}^\pi)$, $i = \overline{1, \infty}$. Если P получается π-пополнением для последовательности $1, 2, 3, \ldots$ и тождественной подстановки, то пополнение называется плотным.*

Обозначим через $\mathfrak{S}(V)$ и $\mathfrak{P}^\pi(V)$ множества силовских p-подгрупп, получающихся плотным пополнением и π-пополнением для фиксированной $\pi \in S(\mathbb{N})$ соответственно.

Определение 2. $\mathfrak{P}(V) = \bigcup_{\pi \in S(\mathbb{N})} \mathfrak{P}^\pi(V)$ *есть множество силовских p-подгрупп группы $\overline{\mathrm{GL}}(V)$, получающихся пополнением.*

В настоящей статье дано описание силовских p-подгрупп группы $\overline{\mathrm{GL}}(V)$ из $\mathfrak{P}(V)$ и доказывается существование максимальных p-подгрупп группы $\overline{\mathrm{GL}}(V)$, не принадлежащих $\mathfrak{P}(V)$. Последнее показывает существенное отличие p-силовского строения $\overline{\mathrm{GL}}(V)$ от r-силовского при $(r, p) = 1$, рассмотренного в [1, 2].

1. Построение силовских p-подгрупп из $\mathfrak{S}(V)$. Напомним некоторые положения из [3]. Пусть $a \in V_n$, $\rho \in V_n'$. Тогда под $\tau_{a,\rho} \in \mathrm{GL}(V_n)$ понимаем отображение, определяемое равенством $\tau_{a,\rho}x = x + \rho(x)a$, $x \in V_n$. Отображение $\tau_{a,\rho}$ является трансвекцией тогда и только тогда, когда $\rho(a) = 0$. Если $\tau_{a,\rho}, \tau_{b,\rho}, \tau_{a,\varphi}$—трансвекции, то $\tau_{a,\rho}\tau_{b,\rho} = \tau_{a+b,\rho}$, $\tau_{a,\rho}\tau_{a,\varphi} = \tau_{a,\rho+\varphi}$. Для произвольного $\sigma \in \mathrm{GL}(V_n)$ $\sigma\tau_{a,\rho}\sigma^{-1} = \tau_{\sigma a,\rho\sigma^{-1}}$.

Обозначим через $\rho_1, \dots, \rho_n$ базис пространства V_n', сопряженный с базисом $x_1, \dots, x_n$ пространства V, т. е. $\rho_i(x_j) = \delta_{ij}$. Трансвекции вида $\tau_{\lambda x_i,\rho_j}$, $i \neq j$; $\lambda \in F$, будем называть элементарными. Отметим, что любая трансвекция элементарна в некотором базисе. Для коммутаторов элементарных трансвекций имеем следующие равенства:

$$[\tau_{\lambda x_i,\rho_k}, \tau_{\nu x_m,\rho_j}] = \begin{cases} 1_{V_n} & \text{при } k \neq m,\ i \neq j, \\ \tau_{\lambda\nu x_i,\rho_j} & \text{при } k = m, \\ \tau^{-1}_{\lambda\nu x_m,\rho_k} & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Изучим пополнение силовской p-подгруппы P_{n-1} группы $\mathrm{GL}(V_{n-1})$ до силовской p-подгруппы P_n из $\mathrm{GL}(V_n)$. Поскольку силовские p-подгруппы конечной группы сопряжены между собой, то, не ограничивая общности, можно рассматривать силовскую p-подгруппу $\mathrm{UT}(V_{n-1})$ группы $\mathrm{GL}(V_{n-1})$, порожденную элементарными трансвекциями $\tau_{\lambda_{ij}x_i,\rho_j}$, $i < j$; $\lambda_{ij} \in F$; $\lambda_{ij} \neq 0$, действие которых на базисных векторах задается следующим образом:

$$\begin{gathered} \tau_{\lambda_{ij}x_i,\rho_j}x_k = x_k \text{ при } k \neq j;\ i = \overline{1, n-2};\ j = \overline{2, n-1}, \\ \tau_{\lambda_{ij}x_i,\rho_j}x_j = x_j + \lambda_{ij}x_i \text{ при } i = \overline{1, n-2};\ j = \overline{2, n-1}, \\ \tau_{\lambda_{ij}x_i,\rho_j}x_k = x_k \text{ при } k \geqslant n. \end{gathered} \tag{1}$$

Известно, что любая силовская p-подгруппа P_n стабилизирует некоторый флаг подпространств Φ_n: $W_1 \subset \dots \subset W_{n-1} \subset W_n$ с базисом $u_1, \dots, u_{n-1}, u_n$, где $W_k = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, $u_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{kj}x_j$ для $k = \overline{1, n}$. Поскольку $\mathrm{UT}(V_{n-1}) \subset P_n$, то $\mathrm{UT}(V_{n-1})$ также стабилизирует флаг Φ_n. Тогда $\tau_{\lambda_{1i}x_1,\rho_i}u_i = u_1 \forall i = \overline{2, n-1}$. Отсюда с помощью (1) получим следующие равенства: $(\alpha_{11} + \lambda_{1i}\alpha_{1i})x_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} \alpha_{1j}x_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j}x_j$, $i = \overline{2, n-1}$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\alpha_{1i} = 0$, $i = \overline{2, n-1}$. Значит, $u_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{1n}x_n$.

Далее $\tau_{\lambda_{2i}x_2,\rho_i}u_2 = \nu u_1 + u_2$ для некоторого $\nu = \nu(\lambda_{2i}) \in F$ и $i = \overline{3, n-1}$. Отсюда с помощью (1) получим следующие равенства для всех $i = \overline{3, n-1}$: $\alpha_{21}x_1 + (\alpha_{22} + \lambda_{2i}\alpha_{2i})x_2 + \sum\limits_{j=3}^{n} \alpha_{2j}x_j = \nu(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{1n}x_n) + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{2j}x_j$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\alpha_{2i} = 0$, $i = \overline{3, n-1}$. Значит, $u_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{2n}x_n$.

Аналогично получим, что $\alpha_{kj} = 0 \ \forall\ k = \overline{3, n-2}$, $j = \overline{k+1, n-1}$. Следовательно,

$$u_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{kj}x_j + \alpha_{kn}x_n,\ k = \overline{1, n-1}. \tag{2}$$

Очевидно, что базис флага подпространств $u_1, \dots, u_n$ допускает сохраняющие флаг преобразования вида

$$u_k' = \mu_k u_k + w_{k-1},\ k = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где w_{k-1} — произвольный вектор из W_{k-1}, $\mu_k \in F$, $\mu_k \neq 0$; $u_1', \ldots, u_n'$ — новый базис флага.

Допустим в (2) $\alpha_{1n} \neq 0$. Тогда с учетом (2) и (3) базис Φ_n можно выбрать таким образом, что $u_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{1n}x_n$, $u_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{kj}x_j$ при $k = \overline{2, n-1}$, $u_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}x_j$. В частности, $u_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2$. Поскольку $\tau_{\lambda_{12}x_1,\rho_2}u_2 = \nu u_1 + u_2$, где $\nu = \nu(\lambda_{12}) \in F$, то $\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}(x_2 + \lambda_{12}x_1) = \nu(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{1n}x_n) + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2$. Отсюда $\nu\alpha_{1n} = 0$ и $\nu = 0$, так как $\alpha_{1n} \neq 0$. Тогда $\alpha_{22}\lambda_{12} = 0$ и $\alpha_{22} = 0$, так как $\lambda_{12} \neq 0$. Следовательно, $u_2 = \alpha_{21}x_1$. Теперь легко получить с помощью (3), что базис Φ_n можно выбрать следующим образом:

$$u_1 = \alpha_{11}x_1 + x_n,\ u_k = x_{k-1},\ k = \overline{2, n}. \tag{4}$$

Поскольку α_{11} — любой элемент поля F, то в случае $\alpha_{1n} \neq 0$ существует q различных флагов подпространств, стабилизируемых группой $\mathrm{UT}(V_{n-1})$. Следовательно, в этом случае существует и q силовских p-подгрупп группы $\mathrm{GL}(V_n)$, содержащих силовскую p-подгруппу $\mathrm{UT}(V_{n-1})$ группы $\mathrm{GL}(V_{n-1})$.

Пусть теперь в (2) $\alpha_{1n} = 0$. Тогда $\alpha_{11} \neq 0$ и с учетом (2) и (3) базис Φ_n можно выбрать таким, что $u_1 = x_1$, $u_k = \sum_{j=2}^{k} \alpha_{kj}x_j + \alpha_{kn}x_n$ при $k = \overline{2, n-1}$, $u_n = \sum_{j=2}^{n} \alpha_{nj}x_j$. Допустим $\alpha_{2n} \neq 0$. Тогда легко показать (аналогично случаю $\alpha_{1n} \neq 0$), что базис Φ_n можно выбрать в виде

$$u_1 = x_1,\ u_2 = \alpha_{22}x_2 + x_n,\ u_k = x_{k-1},\ k = \overline{3, n}. \tag{5}$$

И в этом случае существуют q различных флагов подпространств Φ_n, стабилизируемых группой $\mathrm{UT}(V_{n-1})$, и q силовских p-подгрупп группы $\mathrm{GL}(V_n)$, содержащих $\mathrm{UT}(V_{n-1})$.

Аналогичными рассуждениями при $\alpha_{1n} = \alpha_{2n} = \ldots = \alpha_{i-1n} = 0$ и $\alpha_{in} \neq 0$, где $i = \overline{2, n}$, легко получить, что базис флага подпространств Φ_n, стабилизируемого группой $\mathrm{UT}(V_{n-1})$, имеет следующий вид:

$$u_k = x_k,\ k = \overline{1, i-1};\ u_i = \alpha_{ii}x_i + x_n;\ u_k = x_{k-1},\ k = \overline{i+1, n} \tag{6}$$

для любого $i = \overline{2, n-1}$. При $i = 1$ базис флага имеет вид (4), а при $i = n$ — $u_k = x_k \forall\ k = \overline{1, n}$. Поскольку α_{ii} — любой элемент поля F, $i = \overline{1, n-1}$, то существует $q(n-1) + 1$ базисов флагов подпространств Φ_n, стабилизируемых группой $\mathrm{UT}(V_{n-1})$. Отсюда следует такое утверждение.

Утверждение 1. *Существует $q(n-1) + 1$ силовских p-подгрупп P_n в группе $\mathrm{GL}(V_n)$, получающихся пополнением из силовской p-подгруппы $\mathrm{UT}(V_{n-1})$ группы $\mathrm{GL}(V_{n-1})$.*

Следствие. *Существует $q(n-1) + 1$ силовских p-подгрупп P_n в группе $\mathrm{GL}(V_n)$, получающихся пополнением из любой силовской p-подгруппы P_{n-1} группы $\mathrm{GL}(V_{n-1})$.*

Укажем минимальное множество трансвекций в $\mathrm{GL}(V_n)$, порождающих силовскую p-подгруппу P_n группы $\mathrm{GL}(V_n)$, получающуюся пополнением из $\mathrm{UT}(V_{n-1})$. Обозначим через $\sigma(\alpha_{ii})$ оператор перехода от базиса $x_1, \ldots, x_n$ пространства V_n к базису, задаваемому равенствами (6) при $i = \overline{1, n-1}$, т. е. для $k = \overline{1, n}$ $\sigma(\alpha_{ii})x_k = u_k$. Тогда

$$\sigma^{-1}(\alpha_{ii})x_k = x_k,\ k = \overline{1, i-1};\ \sigma^{-1}(\alpha_{ii})x_k = x_{k+1},\ k = \overline{i, n-1};$$

$$\sigma^{-1}(\alpha_{ii})x_n = x_i - \alpha_{ii}x_{i+1}. \tag{7}$$

Поскольку $\mathrm{UT}(V_n)$ порождается трансвекциями $\tau_{\lambda x_k,\rho_{k+1}}$ при $k = \overline{1, n-1}$, $\lambda \in F$, то силовская p-подгруппа P_n, получающаяся пополнением из $\mathrm{UT}(V_{n-1})$, порождается трансвекциями $\sigma(\alpha_{ii})\tau_{\lambda x_k,\rho_{k+1}}\sigma^{-1}(\alpha_{ii})=\tau_{\sigma(\alpha_{ii})\lambda x_k,\rho_{k+1}\sigma^{-1}(\alpha_{ii})}$ при $k=\overline{1, n-1}$. Векторы u_k, $k=\overline{1, n}$, задают вычетные прямые этих трансвекций, а функционалы, задающие неподвижные гиперплоскости трансвекций, легко определить с помощью (7). Отсюда следует такое утверждение.

Утверждение 2. *Для любого фиксированного $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$ силовская p-подгруппа $P_n=P_n(\alpha_{ii})$, стабилизирующая флаг подпространств с базисом* (6), *имеет следующее минимальное множество порождающих ее трансвекций:*

$$P_n(\alpha_{ii})=\langle\tau_{\lambda_s x_j,\rho_{j+1}};\ \tau_{\lambda_s x_{i-1},\rho_n};\ \tau_{\lambda_s(\alpha_{ii}x_i+x_n),\ \rho_i-\alpha_{ii}\rho_n}\mid j=\overline{1, n-2};$$

$$j\neq i-1;\ s=\overline{1, k};\ \lambda_s\in F\rangle,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — базис поля F как векторного пространства над своим простым подполем.

Следствие. *Если силовская p-подгруппа P_{n-1} группы $\mathrm{GL}(V_{n-1})$ стабилизирует флаг подпространств $W_1\subset W_2\subset\ldots\subset W_{n-1}$ с базисом $u_1, \ldots, u_{n-1}$, базис $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n=\rho_n$ пространства V'_n сопряжен с базисом $u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n=x_n$ пространства V_n и $P_n=P_n(\alpha_{ii})$ получается пополнением из P_{n-1} для некоторого фиксированного $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$, то $P_n=\langle\tau_{\lambda_s u_j,\mu_{j+1}};\ \tau_{\lambda_s u_{i-1},\mu_n};\ \tau_{\lambda_s(\alpha_{ii}u_i+u_n),\mu_i-\alpha_{ii}\mu_n}\mid j\neq i-1\rangle$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — базис поля F как векторного пространства над своим простым подполем.*

Пусть $P\in\mathfrak{S}(V)$. Тогда $P=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}P_n$ для возрастающей последовательности $P_1\subset P_2\subset\ldots$ силовских p-подгрупп P_n групп $\mathrm{GL}(V_n)$, где P_{n+1} — одна из силовских p-подгрупп группы $\mathrm{GL}(V_{n+1})$, получающаяся пополнением из P_n. При этом каждой силовской p-подгруппе $P\in\mathfrak{S}(V)$ взаимно однозначно соответствует бесконечная последовательность базисов флагов подпространств $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, где B_n — базис флага подпространств $W_1\subset W_2\subset\ldots\subset W_n$ в пространстве V_n, стабилизируемого силовской p-подгруппой P_n. Базисы B_n задаются рекуррентно: $B_1=\{x_1\}$, $B_n=\{u_1, \ldots, u_n\}$ получается из $B_{n-1}=\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ следующим образом: $u_k=v_k$ при $k=\overline{1, i-1}$; $u_i=\alpha_{ii}^{(n)}v_i+v_n$; $u_k=v_{k-1}$ при $k=\overline{i+1, n}$ для фиксированных $i=i(n)\in\{1, 2, \ldots, n\}$ и $\alpha_{ii}^{(n)}\in F$, где $v_n=x_n$.

Силовские p-подгруппы из $\mathfrak{P}(V)$ строятся аналогично. Однако в этом нет необходимости, так как ниже будет доказана теорема о сопряженности силовских p-подгрупп из $\mathfrak{P}(V)$ силовским p-подгруппам из $\mathfrak{S}(V)$.

2. Сопряженность силовских p-подгрупп из $\mathfrak{P}(V)$ и $\mathfrak{S}(V)$.

Лемма. *Пусть P_m и P_n — силовские p-подгруппы групп $\mathrm{GL}(V_m)$ и $\mathrm{GL}(V_n)$ соответственно, причем $P_m\subset P_n$, $m<n$, и для любого s такого, что $m<s<n$, $P_n\cap\mathrm{GL}(V_s)$ не есть силовская p-подгруппа группы $\mathrm{GL}(V_s)$. Тогда существует такая силовская p-подгруппа P_n^0 группы $\mathrm{GL}(V_n)$, что $P_m\subset P_{m+1}^0\subset P_{m+2}^0\subset\ldots\subset P_n^0$ и $P_n^0=\varphi_0P_n\varphi_0^{-1}$, где P_s^0 — силовские p-подгруппы $\mathrm{GL}(V_s)$ при $m<s\leqslant n$, $\varphi_0\in\mathrm{GL}(V_n)$, $\varphi_0/V_m=1_{V_m}$, $\varphi_0/\tilde{V}_k\in\mathrm{GL}(\tilde{V}_k)$, 1_{V_m} — тождественное отображение на V_m, $\tilde{V}_k=\langle x_{m+1}, \ldots, x_n\rangle$, $n=m+k$.*

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $P_m=\mathrm{UT}(V_m)$. Пусть силовская p-подгруппа P_n группы $\mathrm{GL}(V_n)$ стабилизирует некоторый флаг подпространств $\Phi_n: W_1\subset W_2\subset\ldots\subset W_n$ пространства V_n с базисом $u_1, \ldots, u_n$. Тогда можно показать (аналогично доказательству равенств (2)), что

$$u_r=\sum_{i=1}^{t}\alpha_{ri}x_i+y_r,\quad r=\overline{1, n},\tag{8}$$

где $t=\min\{r, m\}$, $y_r=\sum\limits_{i=m+1}^{n}\alpha_{ri}x_i$.

Рассмотрим векторы $y_r \in \tilde{V}_k$, $r = \overline{1, n}$. Легко видеть, что в множестве этих векторов есть ровно k линейно независимых. Выделим следующую подпоследовательность: y_{r_1} — первый вектор из последовательности $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, отличный от нулевого вектора; y_{r_2} — первый вектор из последовательности векторов $\{y_{r_1+1}, y_{r_1+2}, \ldots, y_n\}$ с условием $y_{r_2} \notin \langle y_{r_1} \rangle$; y_{r_3} — первый вектор из последовательности векторов $\{y_{r_2+1}, y_{r_2+2}, \ldots, y_n\}$ с условием $y_{r_3} \notin \langle y_{r_1}, y_{r_2} \rangle$ и т. д. Так мы получим подпоследовательность линейно независимых векторов $\{y_{r_1}, y_{r_2}, \ldots, y_{r_k}\}$. Поскольку базис флага Φ_n можно изменять допустимым образом (3), то можно считать, что $y_r = 0$ при $r \notin \{r_1, \ldots, r_k\}$. Так как $x_1, \ldots, x_m, y_{r_1}, \ldots, y_{r_k}$ есть базис V_n, то зададим $\varphi \in \mathrm{GL}(V_n)$ следующим образом: $\varphi(x_j) = x_j$ при $j = \overline{1, m}$; $\varphi(y_{r_i}) = x_{m+i}$ при $i = \overline{1, k}$. При этом преобразовании флаг Φ_n переходит в флаг подпространств $\Phi_n^1: U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n$ с базисом $v_1, v_2, \ldots, v_n$, причем $v_i = u_i$ при $i \notin \{r_1, \ldots, r_k\}$, $v_{r_s} = \sum_{i=1}^{t} \alpha_{r_s i} x_i + x_{m+s}$ при $s = \overline{1, k}$, $t = \min\{r_s, m\}$. Кроме того, силовская p-подгруппа $\varphi^{-1} P_n \varphi$ группы $\mathrm{GL}(V_n)$, стабилизирующая флаг Φ_n^1, содержит подгруппу $\mathrm{UT}(V_m)$, так как $\varphi / V_m = 1_{V_m}$. Поскольку для базиса флага $v_1, \ldots, v_n$ допустимы преобразования (3), то можно считать, что

$$v_i = x_i, \quad i = \overline{1, r_1 - 1}; \quad v_{r_1} = \alpha_{r_1 r_1} x_{r_1} + x_{m+1}; \quad v_s = \sum_{i=r_1}^{t} \alpha_{si} x_i, \tag{9}$$

$$s \notin \{r_2, \ldots, r_k\}; \ v_{r_s} = \sum_{i=r_1}^{t} \alpha_{r_s i} x_i + x_{m+s}, \quad s = \overline{2, k}.$$

Если $r_1 = m + 1$, то $r_i = m + i$ при $i = \overline{1, k}$. При этом базис флага Φ_n^1 будет иметь вид $v_i = x_i$, $i = \overline{1, n}$. Тогда очевидно, что $\varphi^{-1} P_n \varphi = \mathrm{UT}(V_n)$, что доказывает лемму при $r_1 = m + 1$.

Пусть $r_1 \neq m + 1$ (тогда $r_1 < m + 1$). При этом легко проверить, что трансвекции $\tau_{\lambda x_{r_1-1}, \rho_{m+1}}$ и $\tau_{\lambda(\alpha_{r_1 r_1} x_{r_1} + x_{m+1}), \rho_{r_1} - \alpha_{r_1 r_1} \rho_{m+1}}$, $\lambda \in F$, принадлежат группе стабильности флага подпространств с базисом (9). Следовательно, силовская p-подгруппа $\varphi^{-1} P_n \varphi$ группы $\mathrm{GL}(V_n)$ содержит эти трансвекции. Поскольку и $\mathrm{UT}(V_m) \subset \varphi^{-1} P_n \varphi$, то из утверждения 2 следует, что $\varphi^{-1} P_n \varphi$ содержит силовскую p-подгруппу $P_{m+1}^0 = P_{m+1}(\alpha_{r_1 r_1})$ группы $\mathrm{GL}(V_{m+1})$, получающуюся пополнением из силовской p-подгруппы $\mathrm{UT}(V_m)$ группы $\mathrm{GL}(V_m)$, т. е. $\mathrm{UT}(V_m) \subset P_{m+1}^0 \subset \varphi^{-1} P_n \varphi$, где $\varphi \in \mathrm{GL}(V_n)$, $\varphi / V_m = 1_{V_m}$, $\varphi / \tilde{V}_k \in \mathrm{GL}(\tilde{V}_k)$.

Для завершения доказательства леммы проведем индукцию по $k = \dim \tilde{V}_k$. Утверждение очевидно при $k = 1$. Допустим оно верно для $k - 1$. Но тогда оно верно и для k, поскольку показано, как осуществить переход от случая $\mathrm{UT}(V_m) \subset P_n$, $k = n - m$, к случаю $\mathrm{UT}(V_m) \subset P_{m+1}^0 \subset \varphi^{-1} P_n \varphi$, $k - 1 = n - (m + 1)$, для которого утверждение верно по предположению индукции.

Итак, лемма доказана.

Теорема 1. *Любая силовская p-подгруппа $P \in \mathfrak{P}(V)$ изоморфна некоторой силовской p-подгруппе $T \in \mathfrak{S}(V)$, причем существует такое взаимно однозначное линейное отображение $\eta: V \to V$, что $\eta \overline{\mathrm{GL}}(V) \eta^{-1} = \overline{\mathrm{GL}}(V)$ и $\eta P \eta^{-1} = T$.*

Доказательство. Пусть $P \in \mathfrak{P}(V)$, $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{n_k}$ для возрастающей последовательности $P_{n_1} \subset P_{n_2} \subset \ldots$ силовских p-подгрупп P_{n_k} групп $\mathrm{GL}(V_{n_k})$, $k = \overline{1, \infty}$; $n_k < n_{k+1}$. Обозначим $\tilde{V}_{mk} = \langle x_{n_{k-1}+1}, x_{n_{k-1}+2}, \ldots, x_{n_k} \rangle$,

$k=\overline{1,\infty}$, $n_0=0$, $m_k=n_k-n_{k-1}$. Тогда $V=\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{V}_{mk}$. Построим $\eta: V\to V$ так, что $\eta/V_{n_k}=\varphi_{n_1}\varphi_{n_2}\dots\varphi_{n_k}$, где $\varphi_{n_i}\in \mathrm{GL}(V_{n_i})$ и строится точно так же, как φ_0 в лемме для силовских p-подгрупп $\eta/V_{n_{i-1}}P_{n_{i-1}}(\eta/V_{n_{i-1}})^{-1}\subset \subset\eta/V_{n_{i-1}}P_{n_i}(\eta/V_{n_{i-1}})^{-1}$, т. е. $\varphi_{n_i}/V_{n_{i-1}}=1_{V_{n_{i-1}}}$ и $\varphi_{n_i}/\widetilde{V}_{m_i}\in \mathrm{GL}(\widetilde{V}_{m_i})\forall\ i=\overline{1,k}$. Покажем, что η удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, во-первых, существует η^{-1} такое, что $\eta^{-1}/V_{n_k}=(\varphi_{n_1}\varphi_{n_2}\dots\varphi_{n_k})^{-1}$. Во-вторых, для любого $g\in\overline{\mathrm{GL}}(V)$ существует такой номер k, что $g\in \mathrm{GL}(V_{n_k})$. Тогда $\eta g\eta^{-1}=\eta/V_{n_k}g\eta^{-1}/V_{n_k}\in \mathrm{GL}(V_{n_k})$. Следовательно, $\eta\overline{\mathrm{GL}}(V)\eta^{-1}=\overline{\mathrm{GL}}(V)$. В-третьих, $\eta P\eta^{-1}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\eta P_{n_k}\eta^{-1}$ для возрастающей последовательности $\eta P_{n_1}\eta^{-1}\subset\eta P_{n_2}\eta^{-1}\subset\dots$ силовских p-подгрупп $\eta P_{n_i}\eta^{-1}$ групп $\mathrm{GL}(V_{n_i})$, $i=\overline{1,\infty}$. Но $\eta P_{n_k}\eta^{-1}=\varphi_{n_1}\dots\varphi_{n_k}P_{n_k}\varphi_{n_k}^{-1}\dots\varphi_{n_1}^{-1}=\varphi_{n_k}\dots\varphi_{n_1}P_{n_k}\times\varphi_{n_1}^{-1}\dots\varphi_{n_k}^{-1}$, так как отображения φ_{n_i} перестановочны при всех $i=\overline{1,\infty}$. Тогда из леммы следует, что силовская p-подгруппа $T=\eta P\eta^{-1}$ есть объединение возрастающей последовательности $P_1^0\subset P_2^0\subset\dots\subset P_{n_1}^0=\varphi_{n_1}P_{n_1}\varphi_{n_1}^{-1}\subset\subset P_{n_1+1}^0\subset\dots\subset P_{n_2}^0=\varphi_{n_2}\varphi_{n_1}P_{n_1}\varphi_{n_1}^{-1}\varphi_{n_2}^{-1}\subset P_{n_2+1}^0\subset\dots$ силовских p-подгрупп P_i^0 групп $\mathrm{GL}(V_i)$. Значит, $T\in\mathfrak{S}(V)$, что и требовалось доказать.

3. О максимальных p-подгруппах группы $\overline{\mathrm{GL}}(V)$, не принадлежащих $\mathfrak{P}(V)$. Известно [1, 2], что любая силовская r-подгруппа R группы $\overline{\mathrm{GL}}(V)$ при $(r,p)=1$ является объединением бесконечной возрастающей последовательности силовских r-подгрупп R_{n_i} групп $\mathrm{GL}(V_{n_i})$, $i=\overline{1,\infty}$; $n_i<n_{i+1}$, т. е. $R\cap \mathrm{GL}(V_{n_i})=R_{n_i}$. Класс $\mathfrak{P}(V)$ силовских p-подгрупп группы $\overline{\mathrm{GL}}(V)$, обладающих таким же свойством, рассмотрен выше. Оказывается, что существуют максимальные p-подгруппы группы $\overline{\mathrm{GL}}(V)$, не принадлежащие $\mathfrak{P}(V)$.

Пусть $Q_{n_1}\subset Q_{n_2}\subset\dots$ — бесконечная возрастающая последовательность p-подгрупп Q_{n_i} групп $\mathrm{GL}(V_{n_i})$, отличных от силовских p-подгрупп групп $\mathrm{GL}(V_{n_i})\ \forall\ i\in\mathbb{N}$, $Q=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}Q_{n_i}$.

Теорема 2. *Если для любого $i\in\mathbb{N}$ и любой силовской p-подгруппы P_{n_i} группы $\mathrm{GL}(V_{n_i})$ такой, что $Q_{n_i}\subset P_{n_i}$, выполняется условие $P_{n_i}\cap\cap \mathrm{GL}(V_{n_{i-1}})=Q_{n_{i-1}}$, то p-подгруппа Q группы $\overline{\mathrm{GL}}(V)$ является максимальной и не принадлежит $\mathfrak{P}(V)$.*

Доказательство. Допустим, что p-подгруппа Q не является максимальной. Тогда существует элемент $g\in\overline{\mathrm{GL}}(V)$ такой, что $Q\subset\langle Q,g\rangle$ и $\langle Q,g\rangle$ — p-подгруппа группы $\overline{\mathrm{GL}}(V)$. По определению $\overline{\mathrm{GL}}(V)$ существует такой номер k, что $g\in \mathrm{GL}(V_{n_i})$ при всех $i\geqslant k$. При этом существует силовская p-подгруппа $P_{n_{k+1}}$ группы $\mathrm{GL}(V_{n_{k+1}})$, для которой $\langle g,Q_{n_k}\rangle\subset\langle g, Q_{n_{k+1}}\rangle\subseteq P_{n_{k+1}}$. Но тогда $P_{n_{k+1}}\cap \mathrm{GL}(V_{n_k})=\langle g,Q_{n_k}\rangle\supset Q_{n_k}$, что противоречит условию $P_{n_{k+1}}\cap \mathrm{GL}(V_{n_k})=Q_{n_k}$. Значит, Q есть максимальная p-подгруппа группы $\overline{\mathrm{GL}}(V)$.

Итак, получено достаточное условие того, что максимальная p-подгруппа $Q\notin\mathfrak{P}(V)$. Существуют ли последовательности $Q_{n_1}\subset Q_{n_2}\subset\dots$, удовлетворяющие условиям теоремы 2? Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующий пример построения такой последовательности.

Рассмотрим p-подгруппу $Q_n=\langle\tau_{\lambda x_i,\rho_j}\mid i<j;\ i=\overline{1,n-2};\ j=\overline{2,n};\lambda\in\in F\rangle$, т. е. $Q_n\subset \mathrm{UT}(V_n)$ и получается из $\mathrm{UT}(V_n)$ путем удаления образующих $\tau_{\lambda x_{n-1},\rho_n}$, $\lambda\in F$.

Утверждение 3. *Существует силовская p-подгруппа P_{n+1} группы* $\mathrm{GL}(V_{n+1})$ *такая, что* $Q_n \subset P_{n+1}$ *и* $P_{n+1} \cap \mathrm{GL}(V_n) = Q_n$ *не есть силовская p-подгруппа группы* $\mathrm{GL}(V_n)$.

Доказательство. Рассмотрим силовскую p-подгруппу P_{n+1}, стабилизирующую флаг подпространств $W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_{n+1} = V_{n+1}$ с базисом $u_1 = x_1, \ldots, u_{n-2} = x_{n-2}$, $u_{n-1} = x_{n-1} + x_n + x_{n+1}$, $u_n = x_n$, $u_{n+1} = x_{n+1}$. Легко видеть, что $Q_n \subset P_{n+1}$. Если P_{n+1} содержит какую-то силовскую p-подгруппу P_n^*, то из утверждения 2 следует, что $P_n^* = \langle \tau_{\lambda x_j, \rho_{j+1}};\ \tau_{\lambda x_{n-2}, \rho_n};\ \tau_{\lambda(\alpha_{n-1}x_{n-1}+x_n), \rho_{n-1}-\alpha_{n-1}\rho_n} \mid j = \overline{1, n-2};\ \lambda \in F\rangle$ для любого фиксированного $\alpha_{n-1} \in F$. Другими словами $P_n^* = \langle Q_n, \tau_{\lambda(\alpha_{n-1}x_{n-1}+x_n), \rho_{n-1}-\alpha_{n-1}\rho_n} \mid \lambda \in F\rangle$.

Покажем, что трансвекция $\tau = \tau_{\lambda(\alpha_{n-1}x_{n-1}+x_n), \rho_{n-1}-\alpha_{n-1}\rho_n}$ не стабилизирует флаг подпространств с базисом $u_1, \ldots, u_{n+1}$. Действительно, $\tau u_{n-1} = u_{n-1} + (1 - \alpha_{n-1})\lambda(\alpha_{n-1}x_{n-1} + x_n)$ и $\tau u_n = u_n - \alpha_{n-1}\lambda(\alpha_{n-1}x_{n-1} + x_n)$. Поскольку $\alpha_{n-1}x_{n-1} + x_n \notin W_{n-1}$, то $\tau u_{n-1} \in W_{n-1}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_{n-1} = 1$. Но при этом $\tau u_n = u_n - \lambda(x_{n-1} + x_n) \notin W_n$, так как $x_{n-1} + x_n \notin W_n$. Значит, $\tau \notin P_{n+1}$ и $P_{n+1} \cap \mathrm{GL}(V_n) = Q_n$, что завершает доказательство утверждения.

Заметим, что $P_{n+1} = \langle \tau_{\lambda u_i, \mu_{i+1}} \mid i = \overline{1, n};\ \lambda \in F\rangle$, где $\mu_i \in V'_{n+1}$ удовлетворяет условию $\mu_i u_j = \delta_{ij}$ при $i, j = \overline{1, n+1}$. Рассмотрим $Q_{n+1} = \langle \tau_{\lambda u_i, \mu_j} \mid i < j;\ i = \overline{1, n-1};\ j = \overline{2, n+1};\ \lambda \in F\rangle$, $Q_{n+1} \subset P_{n+1}$. Легко видеть, что $Q_n \subset Q_{n+1}$. Из утверждения 2 следует, что любая силовская p-подгруппа P_{n+1}^* группы $\mathrm{GL}(V_{n+1})$, содержащая Q_{n+1}, имеет вид $P_{n+1}^* = \langle Q_{n+1}, \tau_{\lambda(\alpha_n u_n + u_{n+1}), \mu_n - \alpha_n \mu_{n+1}}\rangle$ для любого фиксированного $\alpha_n \in F$. Тогда из утверждения 3 $P_{n+1}^* \cap \mathrm{GL}(V_n) = Q_{n+1} \cap \mathrm{GL}(V_n) \subset P_{n+1} \cap \mathrm{GL}(V_n) = Q_n$ и поскольку $Q_n \subset Q_{n+1}$, $P_{n+1}^* \cap \mathrm{GL}(V_n) = Q_n$.

Теперь аналогично P_{n+1} построим для Q_{n+1} силовскую p-подгруппу, P_{n+2} группы $\mathrm{GL}(V_{n+2})$, для которой выполняется утверждение 3. По P_{n+2} строим p-подгруппу Q_{n+2} аналогично тому, как строились Q_n по P_n и Q_{n+1} по P_{n+1}. Для Q_{n+2} строим P_{n+3} и т. д. В итоге получим бесконечную возрастающую последовательность $Q_n \subset Q_{n+1} \subset \ldots$ p-подгрупп групп $\mathrm{GL}(V_i)$, $i \geqslant n$, для которой выполняются условия теоремы 2. Следовательно, $Q = \bigcup_{i=n}^{\infty} Q_i$ есть максимальная p-подгруппа группы $\overline{\mathrm{GL}}(V)$, причем $Q \notin \mathfrak{P}(V)$. Это доказывает существенное отличие p-силовского строения $\overline{\mathrm{GL}}(V)$ от r-силовского строения при $(r, p) = 1$.

1. *Иванюта И. Д.* Силовские p-подгруппы группы GL (q) // Укр. мат. журн.— 1980.— 32, № 6.— С. 813—818.
2. *Иванюта И. Д.* Силовские 2-подгруппы группы GL (q) // Там же.— 1984.— 36, № 3.— С. 377—381.
3. *О' Мира О.* Общая теория изоморфизмов линейных групп // Изоморфизмы классических групп над целостными кольцами.— М. : Мир, 1980.— С. 58—118.

Ин-т ботаники АН УССР, Киев

Получено 04.04.86