УДК 517.51

Н. П. Корнейчук

Об оптимальном кодировании элементов метрического пространства

1. Задача оптимального кодирования. Во многих задачах теории и практики возникает необходимость заменить функцию $f(t)$ или, вообще, элемент x некоторого метрического пространства X простейшим объектом — числовым вектором, т. е. элементом пространства R_N. Можно сказать, что элемент x кодируется вектором $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\}$ из R_N, и если выбор вектора $\alpha = \alpha(x)$ находится в нашем распоряжении, то естественно стремление осуществить этот выбор наилучшим образом, чтобы по вектору $\alpha(x)$ можно было «вспомнить» элемент x с минимально возможной ошибкой.

Общая постановка задачи оптимального кодирования такова (см., например, [1 — 3]). Пусть X — метрическое пространство с расстоянием $\rho(x, y)_X$, и задано непрерывное отображение X в R_N, т. е. набор $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ определенных и непрерывных на X функционалов μ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. Набор M_N задает метод кодирования: элементу $x \in X$ ставится в соответствие вектор

$$T(x, M_N) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\}, \tag{1}$$

который иногда называют вектором информации. Обратное отображение, вообще говоря, неоднозначно, и, пожелав по вектору (1) восстановить элемент x, нам придется иметь дело с множеством $T^{-1}(x, M_N) = \{y : y \in X, T(y, M_N) = T(x, M_N)\}$.

Погрешность восстановления не превышает диаметр множества $T^{-1}(x, M_N)$, т. е. величину

$$\operatorname{diam}_X T^{-1}(x, M_N) = \sup\{\rho(y, z)_X : y, z \in T^{-1}(x, M_N)\}. \tag{2}$$

О минимизации погрешности за счет выбора M_N можно говорить в случае, когда хотя бы для некоторых наборов M_N величина (2) конечна. Обычно задача оптимального кодирования рассматривается на некотором множестве $\mathfrak{M} \subset X$ элементов x, для которых $\operatorname{diam}_X T^{-1}(x, M_N) < \infty$ хотя бы для одного набора M_N.

При фиксированном кодирующем наборе функционалов M_N величина $K(\mathfrak{M}, M_N)_X = \sup\limits_{x \in \mathfrak{M}} \operatorname{diam}_X T^{-1}(x, M_N)$ дает оценку сверху погрешности восстановления любого элемента $x \in \mathfrak{M}$ по вектору (1). Ясно, что

$$K(\mathfrak{M}, M_N)_X = \sup\{\rho(x, y)_X : x, y \in \mathfrak{M},\ T(x, M_N) = T(y, M_N)\}. \tag{3}$$

Задача оптимального кодирования состоит в отыскании набора M_N, при котором величина (3) принимает минимальное значение. Пусть

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{M_N} K(\mathfrak{M}, M_N)_X, \tag{4}$$

где точная нижняя грань вычисляется по всем наборам $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ непрерывных на $\mathfrak{M}$ функционалов. (В работе К. И. Бабенко [4] (см. также [2]) величина (4) названа предтабличным поперечником.)

Набор $M_N = \overline{M}_N$ непрерывных функционалов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$, реализующий в (4) нижнюю грань, доставляет оптимальный метод кодирования элементов множества $\mathfrak{M}$ в метрическом пространстве X: для любого $x \in \mathfrak{M}$ погрешность восстановления, т. е. диаметр множества $T^{-1}(x, M_N)$, не превышает $\gamma_N(\mathfrak{M}, X)$, и никакой другой метод кодирования M_N не может улучшить эту оценку на всем множестве $\mathfrak{M}$. С практической точки зрения наряду с отысканием величины (4) и оптимального метода $\overline{M}_N$ не менее важной является задача построения алгоритма, позволяющего по вектору

$T(x, M_N)$ эффективно восстановить элемент $x \in \mathfrak{M}$ с погрешностью, не превышающей $\gamma^N(\mathfrak{M}, X)$, т. е. указать элемент $y \in \mathfrak{M}$, для которого $\rho(x, y)_X \leqslant \gamma^N(\mathfrak{M}, X)$.

Если X — линейное метрическое пространство, то наряду с (4) рассматривается (см., например, [1]) также величина

$$\lambda^N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{M'_N} K(\mathfrak{M}, M'_N)_X, \tag{5}$$

где нижняя грань распространена только на наборы $M'_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ линейных непрерывных функционалов. Отметим, что в случае, когда X — банахово пространство, а $\mathfrak{M}$ — центрально-симметричный выпуклый компакт в X, то [1, с. 219] $\lambda^N(\mathfrak{M}, X) = 2d^N(\mathfrak{M}, X)$, где $d^N(\mathfrak{M}, X)$ — поперечник Гельфанда множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X. Ясно, что в линейном метрическом пространстве $\gamma^N(\mathfrak{M}, X) \leqslant \lambda^N(\mathfrak{M}, X)$.

2. Некоторые общие соотношения. Оценку сверху для $\gamma^N(\mathfrak{M}, X)$ получим, вычислив значение $K(\mathfrak{M}, M_N)_X$ при каком-нибудь конкретном наборе M_N. Оценка будет точна, если в качестве M_N взят набор $\overline{M}_N$, реализующий в (4) точную нижнюю грань. Оценивая же $\gamma^N(\mathfrak{M}, X)$ снизу, необходимо найти способ, позволяющий оценить снизу $K(\mathfrak{M}, M_N)_X$ при любом наборе M_N. Известные нам пути решения этой задачи в конкретных ситуациях требуют некоторых дополнительных предположений относительно X, $\mathfrak{M}$ и M_N.

Расстояние $\rho(x, y)_X$ в линейном метрическом пространстве X называется транзитивным, если $\rho(x + z, y + z)_X = \rho(x, y)_X \ \forall\, x, y, z \in X$.

Предложение 1. *Пусть X — линейное метрическое пространство с транзитивной метрикой, $\mathfrak{M}$ — центрально-симметричное множество в X. Для любого набора $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ заданных на X непрерывных и нечетных (т. е. $\mu_k(-x) = -\mu_k(x)$) функционалов справедлива оценка*

$$K(\mathfrak{M}, M_N)_X \geqslant \sup\{\rho\{2x, 0)_X : x \in \mathfrak{M},\ T(x, M_N) = 0\}. \tag{6}$$

Если, кроме того, $\mathfrak{M}$ — выпуклое множество, а $M_N = M'_N$ — набор линейных непрерывных функционалов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$, то

$$K(\mathfrak{M}, M'_N)_X \leqslant \sup\{\rho(2x, 0)_X : x \in \mathfrak{M},\ T(x, M'_N) = 0\}. \tag{7}$$

Действительно, вместе с элементом x центрально-симметричному множеству $\mathfrak{M}$ принадлежит и элемент $-x$, а верхняя грань в (3) может только уменьшиться, если распространить ее только на пары элементов x и $-x$ из $\mathfrak{M}$, для которых $T(x, M_N) = T(-x, M_N) = -T(x, M_N)$. В силу транзитивности метрики $\rho(x, -x)_X = \rho(2x, 0)_X$, и мы сразу получаем оценку (6). Если $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество, то вместе с элементами x и y оно содержит и элемент $z = (x - y)/2$, а для линейных функционалов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ из $\mu_k(x) = \mu_k(y)$ следует $\mu_k(z) = 0$. Таким образом, каждой паре $x, y \in \mathfrak{M}$, $T(x, M_N) = T(y, M_N)$, соответствует элемент $z \in \mathfrak{M}$ такой, что $T(z, M_N) = 0$ и $\rho(x, y)_X = \rho(2z, 0)_X$. Это значит, что выполняется неравенство (7).

Следствие. *Если $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество в линейном метрическом пространстве X, то*

$$\lambda^N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{M'_N} \sup\{\rho(2x, 0)_X : x \in \mathfrak{M},\ T(x, M'_N) = 0\}.$$

3. Оптимальное кодирование непрерывных функций в пространстве L_p, $0 < p < 1$. Рассмотрим одну конкретную ситуацию в линейном метрическом (но не нормированном) пространстве.

Пусть $L_p = L_p\ [0, 1]$, $0 < p < 1$, — линейное метрическое пространство заданных на $[0,1]$ функций $f(t)$, для которых конечен интеграл $\int\limits_0^1 |f(t)|^p\,dt$, а расстояние определено равенством

$$\rho(f, g)_{L_p} = \rho(f, g)_p = \int\limits_0^1 |f(t) - g(t)|^p\,dt$$

и является, очевидно, транзитивным. Считая заданным модуль непрерывности $\omega(\delta)$ (т. е. неубывающую при $\delta \geqslant 0$, полуаддитивную и в нуле равную нулю функцию), определим класс функций $H^\omega = H^\omega[0, 1] = \{f(t): f \in C;\ |f(t') - f(t'')| \leqslant \omega(|t' - t''|);\ t', t'' \in [0, 1]\}$, где $C = C[0, 1]$. Ясно, что H^ω есть выпуклое центрально-симметричное множество.

Оценку сверху для $\lambda^N(H^\omega, L_p)$ получим, использовав следующий конкретный метод кодирования. Пусть $t_k = k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$, и для $f(t) \in C$

$$\bar{\mu}_k(f) = N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

Этим задан на C набор линейных непрерывных функционалов $\overline{M}_N = \{\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_N\}$. Из общих соотношений (5) и (7) следует, что (полагаем $K(\mathfrak{M}, M_N)_{L_p} = K(\mathfrak{M}, M_N)_p$)

$$\lambda^N(H^\omega, L_p) \leqslant K(H^\omega, \overline{M}_N)_p =$$

$$= 2^p \sup\left\{\int\limits_0^1 |f(t)|^p\,dt : f \in H^\omega,\ \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2^p N \sup\left\{\int\limits_0^{1/N} |f(t)|^p\,dt : f \in H^\omega,\ \int\limits_0^{1/N} f(t)\,dt = 0\right\}. \tag{9}$$

В работе [5] (см. также [3]) доказано, что при $0 < p \leqslant 3$

$$\sup\left\{\int\limits_a^b |f(t)|^p\,dt : f \in H^\omega[a, b],\quad \int\limits_a^b f(t)\,dt = 0\right\} \leqslant 2^{-p} \int\limits_0^{b-a} \omega^p(t)\,dt, \tag{10}$$

причем знак равенства имеет место для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(\delta)$. Из (9) и (10) вытекает

$$\lambda^N(H^\omega, L_p) \leqslant K(H^\omega, \overline{M}_N)_p \leqslant N \int\limits_0^{1/N} \omega^p(t)\,dt, \quad 0 < p < 1. \tag{11}$$

Нетрудно показать, что при выпуклом вверх $\omega(\delta)$ второе соотношение в (11) превращается в равенство, но этот факт будет следовать и из дальнейших рассуждений.

Положим $\gamma_*^N(H^\omega, L_p) = \inf\limits_{M_N \in Q_N} K(H^\omega, M_N)_p$, где Q_N — множество наборов $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ заданных на $C = C[0, 1]$ непрерывных и нечетных функционалов. Оценивая $\gamma_*^N(H^\omega, L_p)$ снизу, заметим, что в силу предложения 1 для любого набора $M_N \in Q_N$

$$K(H^\omega, M_N)_p \geqslant 2^p \sup\left\{\int\limits_0^1 |f(t)|^p\,dt : f \in H^\omega,\ T(f, M_N) = 0\right\}. \tag{12}$$

Теперь применим процедуру, основанную на использовании теоремы Борсука [6] об антиподах (см. также [1, с. 85]). Пусть R^{N+1} — пространство векторов $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N+1}\}$ с нормой $\|\xi\| = \sum\limits_{i=1}^{N+1} |\xi_i|$, $S^N = \{\xi : \xi \in R^{N+1}, \|\xi\| = 1\}$ — единичная сфера в R^{N+1}. Вектору $\xi \in S^N$ сопоставим систему точек

$$\tau_0 = 0,\ \tau_k = \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|,\ k = 1, 2, \ldots, N+1,\ \tau_{N+1} = 1, \tag{13}$$

а затем при фиксированном модуле непрерывности $\omega(\delta)$ — функцию

$$g(\xi, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\omega(2\tau_1 - 2t)\operatorname{sgn}\xi_1, \quad \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1; \\ \frac{1}{2}\min\{\omega(2t - 2\tau_{k-1}),\ \omega(2\tau_k - 2t)\}\operatorname{sgn}\xi_k, \\ \qquad\qquad \tau_{k-1} \leqslant t \leqslant \tau_k, \quad k = 2, 3, \ldots, N; \\ \frac{1}{2}\,\omega(2t - 2\tau_N)\operatorname{sgn}\xi_{N+1}, \quad \tau_N \leqslant t \leqslant \tau_{N+1}. \end{cases} \tag{14}$$

Легко понять, что $g(-\xi, t) = -g(\xi, t)$, и вместе с системой точек τ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, функция $g(\xi, t)$ непрерывно зависит от ξ: если $\xi^{(m)} \in S^N$, $m = 1, 2, \ldots$, и $\xi^{(m)} \to \xi$, то $\| g(\xi^{(m)}, \cdot) - g(\xi, \cdot)\|_C \to 0$. Нетрудно также проверить, что в случае выпуклого вверх $\omega(\delta)$ функция $g(\xi, t)$ принадлежит классу H^ω. Таким образом, построен непрерывный и нечетный оператор, отображающий сферу S^N в $(N+1)$-параметрическое множество h^ω_{N+1} функций $g(\xi, t)$ вида (14), причем $h^\omega_{N+1} \subset H^\omega$, если модуль непрерывности $\omega(\delta)$ является выпуклым вверх. В этом случае в силу (12) для $M_N \in Q_N$

$$K(H^\omega, M_N)_p \geqslant 2^p \sup\left\{\int_0^1 |g(\xi, t)|^p\, dt : g(\xi) \in h^\omega_{N+1},\ T(g(\xi),\ M_N) = 0\right\}. \tag{15}$$

Зафиксируем набор $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ из Q_N и положим $\eta_k(\xi) = \mu_k(g(\xi))$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $g(\xi, t) \in h^\omega_{N+1}$. Так как функционалы μ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, (по определению множества Q_N) непрерывны и нечетны на C, то для $\xi \in S^N$ $\eta_k(-\xi) = \mu_k(g(-\xi)) = \mu_k(-g(\xi)) = -\mu_k(g, \xi) = -\eta_k(\xi)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и векторные функции $\eta_k(\xi)$ непрерывно зависят от ξ. Таким образом, на сфере S^N задано непрерывное и нечетное векторное поле $\eta(\xi) = \{\eta_1(\xi), \eta_2(\xi), \ldots, \eta_N(\xi)\}$. В силу теоремы Борсука существует вектор $\xi^0 \in S^N$, для которого $\eta(\xi^0) = 0$, так что $\mu_k(g(\xi^0)) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$, т. е. $T(g(\xi^0), M_N) = 0$. Отсюда с учетом (15) следует, что для любого набора $M_N \in Q_N$ найдется вектор $\xi^0 \in S^N$, $\xi^0 = \xi^0(M_N)$, такой, что при выпуклом вверх $\omega(\delta)$

$$K(H^\omega, M_N)_p \geqslant 2^p \int_0^1 |g(\xi^0, t)|^p\, dt, \quad 0 < p < 1. \tag{16}$$

Теперь надо оценить снизу последний интеграл. Пусть $\bar{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N+1}\}$ — вектор с координатами $\xi_1 = 1/(2N)$, $\xi_i = (-1)^i/N$, $i = 2, 3, \ldots, N$, $\xi_{N+1} = (-1)^N/(2N)$. Очевидно, что $\bar{\xi} \in S^N$. Для вектора $\bar{\xi}$ система точек (13) имеет вид $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \dfrac{2k-1}{2N}$, $k = 1, \ldots, N$, $\tau_{N+1} = 1$, а функция $f_N(t) = g(\bar{\xi}, t)$ может быть определена равенствами

$$f_N(t) = f_N(\omega, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{1}{N} - 2t\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2N}; \\ -\frac{1}{2}\,\omega\left(2t - \frac{1}{N}\right), \quad \frac{1}{2N} \leqslant t \leqslant \frac{1}{N}; \\ f_N(t) = -f_N(t - 1/N), \quad 1/N \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

На основании леммы 6.2.1 из [3, с. 270] можно заключить, что для любого вектора $\xi \in S^N$

$$\int_0^1 |g(\xi, t)|^p\, dt \geqslant \int_0^1 |f_N(t)|^p\, dt = 2^{-p} N \int_0^{1/N} \omega^p(t)\, dt. \tag{17}$$

Следовательно, (16) можно заменить неравенством

$$K(H^{\omega}, M_N)_p \geqslant N \int_0^{1/N} \omega^p(t)\,dt,$$

справедливым для любого $M_N \in Q_N$ при выпуклом вверх $\omega(\delta)$, так что в этом случае

$$\gamma_*^N(H^{\omega}, L_p) \geqslant N \int_0^{1/N} \omega^p(t)\,dt.$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(\delta)$, при всех $N = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства*

$$\gamma_*^N(H^{\omega}, L_p) = \lambda^N(H^{\omega}, L_p) = K(H^{\omega}, \overline{M}_N)_p = N \int_0^{1/N} \omega^p(t)\,dt, \quad 0 < p < 1. \tag{18}$$

Оптимальный метод кодирования функций класса H^{ω} в L_p, $0 < p < 1$, осуществляет набор $\overline{M}_N = \{\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2, \ldots, \overline{\mu}_N\}$ линейных непрерывных функционалов, задаваемых равенствами (8).

Чтобы восстановить функцию $f(t) \in H^{\omega}$ по вектору $T(f, \overline{M}_N)$ с минимально возможной на классе H^{ω} погрешностью, следует (при выпуклом $\omega(\delta)$) взять в классе H^{ω} любую функцию $f_1(t)$, у которой $\overline{\mu}_k(f_1) = \overline{\mu}_k(f)$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

4. Периодический случай. Пусть $\tilde{H}^{\omega}$ — класс функций $f(t) \in H^{\omega}$, удовлетворяющих условию $f(0) = f(1)$, позволяющему без потери непрерывности продолжить функцию $f(t)$ с периодом 1 на всю ось. Так как $\tilde{H}^{\omega} \subset H^{\omega}$, то $\lambda^N(\tilde{H}^{\omega}, L_p) \leqslant \lambda^N(H^{\omega}, L_p)$.

Оценку снизу для $\gamma_*^N(\tilde{H}^{\omega}, L_p)$ можно попытаться получить по схеме непериодического случая, но теперь при построении функции $g(\xi, t)$ конструкция (14) не подходит, ибо необходимо чтобы выполнялось равенство $g(\xi, 0) = g(\xi, 1)$. Последнее будет иметь место, если полагать

$$g(\xi, t) = \frac{1}{2}\min\{\omega(2t - 2\tau_{k-1}),\ \omega(2\tau_k - 2t)\}\operatorname{sgn}\xi_k,\ \ \tau_{k-1} \leqslant t \leqslant \tau_k,$$

$$k = 1, 2, \ldots, N+1, \tag{19}$$

однако теперь неравенство (17) при некоторых $\xi \in S^N$ может и не выполняться. При $N = 2n$ выход найден в [5] (см. также [3], § 6.2). Внося при необходимости в функцию (19) определенным образом построенную поправку, удается при выпуклом $\omega(\delta)$ и $N = 2n$ построить непрерывное и нечетное отображение сферы S^{2n} в $(2n+1)$-параметрическое множество $\tilde{h}^{\omega}_{2n+1}$, причем $\tilde{h}^{\omega}_{2n+1} \subset \tilde{H}^{\omega}$ и для любой функции $g(t) \in \tilde{h}^{\omega}_{2n+1}$

$$\int_0^1 |g(t)|^p\,dt \geqslant \int_0^1 |f_{2n}(t)|^p\,dt.$$

Это позволяет для $\gamma_*^N(\tilde{H}^{\omega}, L_p)$ получить точную оценку снизу, и мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(\delta)$, при всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства*

$$\gamma_*^{2n}(\tilde{H}^{\omega}, L_p) = \lambda^{2n}(\tilde{H}^{\omega}, L_p) = K(\tilde{H}^{\omega}, \overline{M}_{2n})_p =$$

$$= 2n \int_0^{1/(2n)} \omega^p(t)\,dt, \quad 0 < p < 1. \tag{20}$$

Заметим, что соотношения (18) и (20) верны и при $p = 1$ и содержатся для этого случая в работе [5], где рассматривается задача оптимального кодирования в нормированном пространстве L_p, $p \geqslant 1$.

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та 1976.— 304 с.
2. *Теоретические* основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Под ред. К. И. Бабенко.— М. : Наука, 1979.— 296 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 352 с.
4. *Babenko K. I.* Estimating the quality of computational algorithms // Comp. Math. in Appl. Mech. and Eng.— 1976.— 7, N 1.— Pt I.— P. 47—73.— N. 2.— Pt II.— P. 135—152.
5. *Корнейчук Н. П.* Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1981.—**45, № 2**.— С. 266—290.
6. *Borsuk K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Späre // Fund. math.— 1933.—**20**.— S. 177—191.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 29.10.86