УДК 517.9

В. В. Стрыгин

Разделение быстрых и медленных движений методом интегральных многообразий

Многие задачи механики характеризуются наличием разномасштабных переменных. Это приводит к необходимости рассматривать сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения. Для последних наиболее удобным аппаратом является метод интегральных многообразий Боголюбова — Митропольского, получивший развитие для сингулярно возмущенных систем в работах К. В. Задираки, В. И. Фодчука, Я. С. Бариса, Ю. И. Неймарка и др. (см. [1, 2]). В работе [3] предложен эффективный алгоритм приближенного построения интегрального многообразия медленных движений для сингулярно возмущенных систем в виде разложения по степеням малого параметра. В дальнейшем этот подход был распространен на специальные классы систем, возникающие при анализе задач механики гироскопических систем [4, 5].

1. Рассмотрим вначале сосредоточенные системы. Пусть $t\in R^1$, $x, X\in\mathbb{R}^m$, $z, Z\in\mathbb{R}^n$, C — $(n\times n)$-матрица, ε — малый положительный параметр. Рассмотрим систему

$$dx/dt = X(t, x, z, \varepsilon),\ \varepsilon\, dz/dt = C(t, x, z)z + Z(t, x, z, \varepsilon). \qquad (1)$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

1. Функции X, Z, C определены и непрерывны в области $\Omega = \{(t, x, z, \varepsilon) \mid t\in\mathbb{R}^1,\ x\in\mathbb{R}^m,\ \|z\|\leqslant\rho,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}$ и удовлетворяют оценкам $\|X(t, x, 0, \varepsilon)\|\leqslant m$, $\|Z(t, x, z, \varepsilon)\|\leqslant m(\varepsilon^2+\|z\|^2)$. Пусть, кроме этого, выполнены условия Липшица

$$\|X(t, x, z, \varepsilon) - X(t, x_1, z_1, \varepsilon)\|\leqslant\lambda\|x-x_1\| + N\|z-z_1\|,\ \|Z(t, x, z, \varepsilon) - Z(t, x_1, z_1, \varepsilon)\|\leqslant\lambda(\varepsilon+\|z\|+\|z_1\|)(\|x-x_1\|+\|z-z_1\|),$$

$$\|C(t, x, \varepsilon) - C(t, x_1, \varepsilon)\|\leqslant L\|x-x_1\|,$$

где $N>0$, $L>0$, $\lambda>0$, $m>0$, причем m и λ — достаточно малые числа.

2. Существуют такие числа $M>0$, $\beta>0$, что для любой непрерывной функции $\varphi:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^m$ фундаментальная матрица $\Phi(t, s, \varepsilon)$ системы $\varepsilon d\Phi/dt = C(t, \varphi(t), \varepsilon)\Phi$, $\Phi(s, s, \varepsilon) = I$ (I — единичная матрица) удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi(t, s, \varepsilon)\|\leqslant M\exp[-\beta(t-s)],\quad t\geqslant s.$$

При этих ограничениях система (1) имеет устойчивое нелокальное интегральное многообразие $z = h(t, x, \varepsilon)$ медленных движений.

При дополнительных предположениях о гладкости X, Z и C дополнительной гладкостью по x обладает и интегральное многообразие $z = h(t, x, \varepsilon)$.

Для практических целей наиболее важным является возможность асимптотического представления h в виде

$$h(t, x, \varepsilon) = h_0(t, x) + \varepsilon h_1(t, x) + \varepsilon^2 h_2(t, x) + \ldots,$$

где коэффициенты h_i разложений функции h определяются из формального тождества

$$\varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} X(t, x, h, \varepsilon) \equiv C(t, x, \varepsilon) h + Z(t, x, h, \varepsilon). \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что при $i > 0$ для определения h_i получаются линейные алгебраические уравнения. Таким образом, интегральное многообразие может быть приближенно найдено с любой точностью.

Можно показать, что решения системы (1), начинающиеся вблизи интегрального многообразия, представимы в виде суммы некоторого решения, лежащего на многообразии $z = h(t, x, \varepsilon)$, и малой добавки, гаснущей по экспоненциальному закону $e^{-\gamma t/\varepsilon}$ при $t \to \infty$. В частности, если $X(t, 0, 0, \varepsilon) \equiv 0$, $Z(t, 0, 0, \varepsilon) \equiv 0$, то и $h(t, 0, \varepsilon) \equiv 0$. В этом случае нулевое решение системы (1) устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладает нулевое решение системы

$$dx/dt = X(t, x, h(t, x, \varepsilon), \varepsilon), \tag{3}$$

т. е. для интегрального многообразия $z = h(t, x, \varepsilon)$ справедлив принцип сведения.

2. Метод интегральных многообразий можно применить к исследованию многих задач с распределенными параметрами.

Рассмотрим систему

$$dx/dt = f(t, x, y, \varepsilon), \ \varepsilon dy/dt = Ay + g(t, x, y, \varepsilon), \tag{4}$$

где $t \in \mathbb{R}^1$, $x, f \in E$, $y, g \in F$; E, F — некоторые гильбертовы пространства. Предполагается, что оператор A имеет плотную область определения $D(A)$, замкнут и секториален. Пусть оператор A — отрицательно определенный. Тогда при некоторых дополнительных предположениях о функциях f и g система (4) имеет экспоненциально устойчивое интегральное многообразие $y = \varepsilon h(t, x, \varepsilon)$, для которого справедлив принцип сведения [6]. И в этом случае для h справедливо представление

$$h(t, x, \varepsilon) \equiv h_1(t, x) + \varepsilon h_2(t, x) + \ldots,$$

причем коэффициенты этого представления находятся из формальных тождеств

$$\varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, \varepsilon h, \varepsilon) \equiv Ah + g(t, x, \varepsilon h, \varepsilon).$$

Приведем два наиболее интересных и характерных применения сформулированных выше результатов.

3. Как показал Д. Р. Меркин [7], уравнения движения широкого класса гироскопических систем можно представить в виде

$$\dot{x} = y, \ \varepsilon(\dot{Ay}) = -(G + \varepsilon B) y + \varepsilon R + \varepsilon Q, \ R = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x} y\right)^T y. \tag{5}$$

Здесь x — n-мерный вектор обобщенных координат, $A = A(t, x)$ — симметрическая положительно определенная матрица, $G = G(t, x)$ — кососимметрическая матрица гироскопических сил, $B = B(t, x)$ — симметрическая матрица диссипативных сил, а ε — малый положительный параметр. Предполагается, что матрицы A, B, G, G^{-1} и Q ограничены вместе с достаточным числом частных производных по t и x.

Как показано ранее [4, 5], системы (5) имеет устойчивое интегральное многообразие $y = \varepsilon h(t, x, \varepsilon)$, медленное движение по которому описывается уравнением

$$\dot{x} = \varepsilon h(t, x, \varepsilon), \tag{6}$$

причем $h = h_1(t, x) + \varepsilon h_2(t, x) + \ldots$. Подсчет показывает, что $h_1 = G^{-1}Q$,

$h_2 = G^{-1}\left[Bh_1 + \frac{\partial}{\partial t}(Ah_1)\right]$, поэтому уравнение движения по многообразию имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon G^{-1}Q + \varepsilon^2 G^{-1}\left[BG^{-1}Q + \frac{\partial}{\partial t}(AG^{-1}Q)\right] + \dots \tag{7}$$

Важно отметить, что полученный результат тесно связан с задачей о допустимости использования прецессионной теории [7]. Для системы (5) прецессионными являются уравнения

$$(G + \varepsilon B)\, dx/dt = \varepsilon Q, \tag{8}$$

которые можно представить в виде

$$dx/dt = \varepsilon\,(G + \varepsilon B)^{-1} Q. \tag{9}$$

Как нетрудно видеть, правая часть этого уравнения совпадает с правой частью уравнения (7) с точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$ включительно для неавтономного случая и с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$ включительно для автономного случая.

Заметим, что при сформулированных выше предположениях многообразие $y = \varepsilon h(t, x, \varepsilon)$ асимптотически устойчиво и справедлив принцип сведения. Поэтому можно сделать заключение о допустимости использования «укороченных» уравнений (8) вместо (7), если «укороченные» уравнения (8) вполне определяют устойчивость нулевого решения уравнений (7).

Более глубокое разделение движения, описываемое системой (5), изучал А. П. Котенко [8]. Результаты последнего обобщила Э. М. Фридман [9]. Однако наиболее простой и полный способ разделения движения предложил В. А. Соболев [10].

4. Рассмотрим, наконец, задачу о движении тела вокруг центра масс O в магнитном поле. Пусть тело V является идеальным магнетиком, имеющим проводимость λ и магнитную проницаемость μ. В точку O поместим начало координат абсолютной системы и системы, связанной с твердым телом. Пусть I — тензор инерции тела, Ω — вектор угловой скорости, Γ — матрица перехода от абсолютной к подвижной системе координат. Обозначим через H и $H^{(0)}$ векторы напряженности магнитного поля соответственно в теле V и во внешности V_0. Пусть $H_\tau|_S$ и $H_n|_S$ — соответственно касательная и нормальная компоненты вектора H на поверхности S тела V. Обозначим через N момент сил, действующих на тело в магнитном поле. Его можно выразить через тензор T натяжений магнитного поля [11].

$$N = \int_S [r \times T_n]\, ds, \quad T = \left\{T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(H_i^{(0)} H_j^{(0)} - \| H^{(0)} \|^2_{R^3} \delta_{ij}\right)\right\}.$$

Если ограничиться квазистационарным приближением [11], то уравнения движения примут вид

$$I\dot{\Omega} + \Omega \times I\Omega = N, \quad \dot{\Gamma} = -\Omega \times \Gamma, \quad \frac{4\pi}{c^2}\dot{H} = -\frac{1}{\lambda\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot} H, \operatorname{div} H = 0, \tag{10}$$

$$r \in V, \quad \operatorname{rot} H^{(0)} = 0, \quad \operatorname{div} H^{(0)} = 0, \; r \in V_0, \; H_\tau = H_\tau^{(0)}|_S, \; \mu H_n = H_n^{(0)}|_S, H^{(0)}|_\infty = \Gamma H^\infty.$$

В широксм классе случаев $4\pi/c^2 = \varepsilon$ — малый параметр. В такой постановке задача изучалась в [12, 13].

Для приведения уравнений (10) к виду (4) следует ввести новые переменные h и $h^{(0)}$:

$$H = h + (E + \Psi)\,\Gamma H^\infty, \; H^{(0)} = h^{(0)} + (E + \Psi^{(0)})\,\Gamma H^\infty, \tag{11}$$

где E — единичная матрица, а матрицы Ψ и $\Psi^{(0)}$ имеют вид

$$\Psi = \| \nabla\psi_1, \nabla\psi_2, \nabla\psi_3 \|, \quad \Psi^{(0)} = \| \nabla\psi_1^{(0)}, \nabla\psi_2^{(0)}, \nabla\psi_3^{(0)} \|.$$

Здесь функции $\psi_j, \psi_j^{(0)}$, $j = 1, 2, 3$, являются решениями задачи

$$\Delta\psi_j = 0,\ \Delta\psi_j^{(0)} = 0,\quad j = 1, 2, 3,\ \psi_j = \psi_j^{(0)}|_S,\ \left.\mu\frac{d\psi_j}{dn} - \frac{d\psi_j^{(0)}}{dn}\right|_S = \\ = (1 - \mu)(e_j, n)|_S,\ \psi_j^{(0)}|_\infty = 0,$$

причем e_j — орты связной системы координат. Нетрудно видеть, что h и $h^{(0)}$ удовлетворяют однородным граничным условиям

$$\operatorname{div} h = 0,\ \operatorname{div} h^{(0)} = 0,\ \operatorname{rot} h^{(0)} = 0,\ h_n = h_n^{(0)}|_S,\ \mu h_\tau = h_\tau^{(0)}|_S,\ h^{(0)}|_\infty = 0.$$

После такой замены вектор $x = (\Omega, \Gamma)$ и $y = h$ удовлетворяет уравнению вида (4), где оператор A определяется равенством $Ay = -\frac{1}{\lambda\mu}\operatorname{rot}\cdot\operatorname{rot} y$ и определен в пространстве Y соленоидальных векторных функций, определенных на V и квадратично суммируемых в этой области. Его область определения $D(A)$ состоит из соленоидальных векторных функций y, принадлежащих пространству Соболева $H^2(V)$, у которых существует продолжение $y^{(0)} \in H^2(V_0)$, обладающее свойствами

$$\operatorname{div} y^{(0)} = 0,\quad \operatorname{rot} y^{(0)} = 0,\quad y_\tau = y_\tau^{(0)}|_S,\quad \mu y_n = y_n^{(0)}|_S.$$

Полученное уравнение имеет устойчивое интегральное многообразие $y = H(t, x, \varepsilon) = \Sigma\varepsilon^k H_k(t, x)$, движение по которому описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений 12-го порядка.

В случае $H^\infty = \text{const}$ уравнение на многообразии $y = H$ имеет три множества стационарных движений $\Omega = \omega\xi_k$, $\Gamma H^\infty = l\xi_k$ $((\omega, l) \in \mathbb{R}^2,\ k = 1, 2, 3)$, где ξ_k — собственные векторы матрицы $\omega^2 I + l^2 M$ (M — матрица, характеризующая намагничивание тела во внешнем поле). Эти положения равновесия описывают равномерное вращение тела с угловой скоростью $\omega = \text{const}$ вокруг оси ξ_k, совпадающей с вектором напряженности H^∞ внешнего магнитного поля ($\|H^\infty\| = l$). Отсюда легко выводятся различные утверждения об устойчивости таких вращений [6].

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям.— Киев Изд-во АН УССР, 1963.— Т. 1.— С. 98—154.
2. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М.: Наука, 1973.— 512 с.
3. *Стрыгин В. В.* Интегральные многообразия в задаче о сингулярном и параметрическом возмущении автоколебательной системы // Дифференциальные уравнения и их применения.— Куйбышев : Куйбышев. ун-т, 1975.— С. 108—127.
4. *Соболев В. А., Стрыгин В. В.* О допустимости перехода к процессионным уравнениям гироскопических систем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1978.— № 5.— С. 10—17.
5. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Метод интегральных многообразий в задаче о приемлемости решения процессионных уравнений гироскопических систем // Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением.— Новосибирск : Наука, 1979.— С. 38—43.
6. *Богатырев С. В., Стрыгин В. В.* О движении проводящего твердого тела около центра масс в магнитном поле // Докл. расшир. заседаний сем. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа.— 1982.— 1, № 3.— С. 12—15.
7. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы.— М.: Наука, 1974.— 344 с.
8. *Котенко А. П.* Выделение медленных составляющих движения гироскопических систем // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения.— Куйбышев : Куйбышев. ун-т, 1984.— С. 56—62.
9. *Фридман Э. М.* Устойчивые, центрально-устойчивые, центральные, центрально-неустойчивые, неустойчивые многообразия сингулярно возмущенных систем нейтрального типа // Там же.— С. 119—137.
10. *Соболев В. А.* Быстрые и медленные движения гироскопических систем // Periob. polytechn. Elec. Eng.— 1985.— **29**, № 1.— P. 57—65.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.— 620 с.

12. *Голубков В. В.* Момент сил в магнитном поле // Косм. исслед.— 1972.— **10**, вып. 1.— С. 20—38.
13. *Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г.* Движение проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле // Докл. АН СССР.— 1981.— **261**, № 5.— С. 1070—1073.

Воронеж. ун-т

Получено 03.06.86