УДК 531.36

С. П. Сосницкий

Действие по Гамильтону как аналог функции Ляпунова для натуральных систем

Известно, что положение равновесия натуральных систем устойчиво, если потенциальная энергия принимает в нем строгий локальный минимум (теорема Лагранжа—Дирихле). Однако устойчивость равновесия может иметь место и при отсутствии в нем минимума потенциальной энергии [1, гл. III]. Поэтому представляется интересным вопрос, когда нарушение условия теоремы Лагранжа—Дирихле все-таки влечет неустойчивость положения равновесия [2].

В данной работе, идейно связанной с [3], где для некоторого частного класса натуральных систем построена функция Ляпунова, в качестве аналога последней предлагается применить действие по Гамильтону («поднятое» из (t, q)-пространства в расширенное фазовое пространство), что позволяет получить ограничения на структуру потенциальной энергии, которые приводят к неустойчивости исследуемого положения равновесия.

Рассмотрим натуральную систему с n степенями свободы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}, \tag{1}$$

где $T(q, \dot{q}) = 1/2\dot{q}^{\mathrm{т}}A(q)\dot{q}$, причем квадратичная форма $\dot{q}^{\mathrm{т}}A(0)\dot{q}$ положительно определена, $T(q, \dot{q})$, $\Pi(q) \in C_q^2$ $(D \subset R_q^n)$, $t \in R$. Пусть точка $q = \dot{q} = 0$ соответствует положению равновесия системы (1) и $\Pi(0) = 0$.

Определим множество $\omega = \{q \in S_\varepsilon = \{q \in D, \ \|q\| < \varepsilon\} : \Pi(q) < 0\}$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Лемма. *Если положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1) устойчиво (неустойчиво) по Ляпунову ($t \in I^+ = [0, \infty[$), то оно двусторонне устойчиво (неустойчиво) по Ляпунову ($t \in R$).*

Доказательство. Представим уравнения (1) в виде двух гамильтоновых систем

$$dq/dt = \partial H_1/\partial p, \quad dp/dt = -\partial H_1/\partial q, \tag{2}$$

$$dq/dt = \partial H_2/\partial p, \quad dp/dt = -\partial H_2/\partial q, \tag{3}$$

$$H_i = (-1)^i \left(\frac{1}{2} p^{\mathrm{T}} A^{-1} p + \Pi\right) = (-1)^i h, \quad h = \mathrm{const}, \quad i = 1, 2, \tag{4}$$

каждая из которых преобразуется к уравнениям (1) и, следовательно, эквивалентна им. Так как системы (2), (3), с одной стороны, переходят одна в другую при замене t на $-t$, а с другой — при замене p на $-p$, то из их эквивалентности исходной системе (1) следует справедливость леммы, распространяющейся и на положения равновесия $q = p = 0$ систем (2), (3).

Теорема 1. *Если при сколь угодно малом* $\varepsilon > 0$ $(D \supset \overline{s_\varepsilon})$ *выполняются условия*: 1) $\omega \neq \varnothing$; 2) $0 \in \partial\omega$; 3) $\partial\Pi/\partial q \neq 0$ $\forall q \in s_\varepsilon \setminus \{0\}$, *то положение равновесия* $q = \dot{q} = 0$ *системы* (1) *неустойчиво*.

Доказательство. Рассмотрим функции действия по Гамильтону для систем (2), (3):

$$S_i = \int_{t_0}^{t} (p\dot{q} - H_i)\, d\tau = (-1)^i \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{2} p^{\mathrm{T}} A^{-1} p - \Pi\right) d\tau. \tag{5}$$

Подставляя в подынтегральные выражения равенств (5) вместо q и p величины

$$q = q(t - t_0, q_0, p_0), \quad p = p(t - t_0, q_0, p_0), \quad q_0 = q(t = t_0), \quad p_0 = p(t = t_0), \tag{6}$$

которые являются общими решениями соответственно систем (2) и (3), и производя интегрирование, находим

$$S_i = S_i(t - t_0, q_0, p_0). \tag{7}$$

Обращая затем соотношения (6) на множестве $R \times s_\varepsilon^*$ $(s_\varepsilon^* = \{(q, p) \in D \times R^n, \|q \oplus p\| < \varepsilon\})$, что всегда возможно, согласно исходным допущениям, и подставляя результат обращения в (7), получаем

$$S_i = S_i(t - t_0, q, p) \in C_{tqp}^{(1,1,1)}(R \times s_\varepsilon^*). \tag{8}$$

Известно [4], что каждую из функций действия S_i с помощью первой группы соотношений (6) и выражений (7) при условии $\det(\partial q/\partial p_0) \neq 0$, которое вследствие независимости обобщенных координат выполняется почти всюду, локально можно выразить в форме $S_i^* = S_i^*(t - t_0, q_0, q)$. При этом S_i^* — главная функция Гамильтона—удовлетворяет соответствующему уравнению Гамильтона — Якоби.

$$\partial S_i^*/\partial t + H_i(q, \partial S_i^*/\partial q) = 0, \quad p = \partial S_i^*/\partial q, \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Определим общее для систем (2), (3) (поскольку гамильтонианы H_i для них отличаются только знаком) множество $\Omega = \{(q, p) \in s_\varepsilon^* : H_1 = H_2 = 0\}$. Так как $\omega \neq \varnothing$, то множество Ω нетривиально, т. е. не сводится к точке покоя $q = p = 0$. На множестве Ω, где $\partial S_i^*/\partial t = 0$, функция S_2^* удовлетворяет обоим уравнениям (9). Учитывая это и ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением движения систем (2), (3) на множестве $I^+ \times \Omega$, вычисляем производные по t от функций S_2^* и S_2 по векторному полю, определяемому уравнениями (2). В результате имеем

$$\frac{dS_2^*}{dt} = \frac{\partial S_2^*}{\partial q}\dot{q} = -p^{\mathrm{T}} A^{-1} p \;\; \forall\, (t, q, p) \in J^+ \times s_\delta^* \subset I^+ \times \Omega \setminus \psi, \tag{10}$$

$$\frac{dS_2}{dt} = \frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial q}\frac{\partial H_1}{\partial p} - \frac{\partial S_2}{\partial p}\frac{\partial H_1}{\partial q} \ \forall (t, q, p) \in I^+ \times \Omega, \qquad (11)$$

где $J^+ =]t_1, t_2[\subset I^+$, $s_\delta^* = \{(q, p) \in \Omega, \ \| (q - q_0) \oplus (p - p_0) \| < \delta\}$ — соответственно некоторые достаточно малые открытый интервал и открытая на Ω окрестность (поскольку функция S_2^* определяется локально), ψ — множество фокальных ($\det (\partial q/\partial p_0) = 0$) точек функции S_2^*. На основании (10), (11) получаем равенства

$$S_2^*|_{t_0}^t = -\int_{t_0}^{t} p^\tau A^{-1} p d\tau, \quad [t_0, t] \subset J^+, \qquad (12)$$

$$S_2|_{t_0}^t = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial q}\frac{\partial H_1}{\partial p} - \frac{\partial S_2}{\partial p}\frac{\partial H_1}{\partial q} \right) d\tau. \qquad (13)$$

Так как S_2 — главная функция Гамильтона S_2^*, только «поднятая» из (t, q)-пространства в расширенное фазовое пространство, то при подстановке решения системы (2) в выражения для S_2^* и S_2 имеем $S_2^*|_{t_0}^t = S_2|_{t_0}^t$. Вычитая (13) из (12), получаем

$$\int_{t_0}^{t} \left(- p^T A^{-1} p - \frac{\partial S_2}{\partial t} - \frac{\partial S_2}{\partial q}\frac{\partial H_1}{\partial p} + \frac{\partial S_2}{\partial p}\frac{\partial H_1}{\partial q} \right) d\tau = 0. \qquad (14)$$

Учитывая произвол в выборе $(t_0, q_0, p_0) \in I^+ \times \Omega \setminus \psi$, а также справедливость равенства (14) на сколь угодно малом промежутке $[t_0, t] \subset J^+$, заключаем, что в его левой части подынтегральное выражение обращается в нуль почти для всех $(t, q, p) \in I^+ \times \Omega$. А поскольку оно непрерывно на $I^+ \times \Omega$, то с учетом (11) имеем

$$dS_2/dt = -p^T A^{-1} p \leqslant 0 \ \forall (t, q, p) \in I^+ \times \Omega. \qquad (15)$$

Предполагая, что положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ исходной системы (1) устойчиво по Ляпунову, ограничимся далее рассмотрением ее эквивалента (2). Обозначим через Λ^+ множество положительных предельных точек решений системы (2). Согласно лемме и предположению об устойчивости положения равновесия множество Ω не может содержать траекторий системы (2), примыкающих к точке $q = p = 0$ при $t \to \infty$, и, стало быть, $\Lambda^+ \cap \Omega \setminus \{0, 0\} = \Lambda^+_{\Omega \setminus \{0,0\}} \neq \varnothing$. Поскольку $\Lambda^+_{\Omega \setminus \{0,0\}}$ компактно, то оно содержит минимальное множество $\Gamma \subset \Lambda^+_{\Omega \setminus \{0,0\}}$ [5, с. 401], причем отличное от точки покоя согласно условию 3 теоремы. Множество Γ также компактно, так как является замкнутым (по определению) подмножеством множества $\Lambda^+_{\Omega \setminus \{0,0\}}$. Поэтому на основании теоремы Биркгофа [5, с. 402] любая траектория, принадлежащая Γ, рекуррентна и, таким образом, устойчива по Пуассону [5, с. 363], т. е. существует такая последовательность $\{t_k\}$, что

$$\lim_{k \to \infty} t_k = \infty, \ \lim_{k \to \infty} \| (q(t_k) - q_0) \oplus (p(t_k) - p_0) \| = 0$$

$$\forall (q(t), \ p(t)) \subset \Gamma. \qquad (16)$$

Представим равенство (15) в виде

$$dS_2 = \frac{\partial S_2}{\partial t} dt + \frac{\partial S_2}{\partial q} dq + \frac{\partial S_2}{\partial p} dp = -p^T A^{-1} p dt. \qquad (17)$$

Учитывая, что на $R \times s_\varepsilon^* \setminus \Omega$ согласно (8) дифференциал dS_2 также определен, а также то обстоятельство, что условие 3 теоремы исключает в окрестности s_ε^* (в частности, на $s_\varepsilon^* \setminus \Omega$) наличие точек, особых для функции S_2, в которых $S_2 = \pm\infty$ на замкнутой вещественной оси $\overline{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$, заключаем, что результат интегрирования равенства (17) по траекториям системы (2), принадлежащим Γ, является однозначным. Отметим, что необходимость рассмотрения значений функции S_2 в точках покоя системы на $\overline{R}$ обусловливается тем фактом, что, с одной стороны, точки покоя являются замкнутыми инвариантными множествами, с другой — функция S_2, монотонно возрастая или монотонно убывая на них, как на неподвижных точках фазового пространства, может достигать предельных значений $\pm\infty$.

Итак, на произвольно фиксированной положительной полутраектории $\gamma^+ \subset \Gamma$ в соответствии с (17) справедливо равенство

$$S_2(t_k - t_0, q(t_k), p(t_k)) - S_2(0, q_0, p_0) = -\int_{t_0}^{t_k} p^T A^{-1} p dt. \tag{18}$$

Поскольку абсолютная величина скорости изображающей точки при движении ее вдоль $\gamma^+ \subset \Gamma$ равномерно ограничена, а $p^T A^{-1} p \not\equiv 0 \ \forall (q(t), p(t)) \subset \subset \Gamma$, то, положив без ограничения общности рассмотрения $p^T A^{-1} p|_{t=t_0} = \lambda \neq 0$, с учетом возвращаемости γ^+ всегда можно указать такое число $\delta^* > 0$, что

$$p^T A^{-1} p > \mu > 0 \quad \forall\, t_k - \delta^* \leqslant t \leqslant t_k + \delta^*, \quad t_1 - \delta^* > t_0,$$
$$k = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

независимо от номера k, причем $[t_i - \delta^*, t_i + \delta^*] \cap [t_j - \delta^*, t_j + \delta^*] = \varnothing$ $\forall i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$. Тогда, замечая, что

$$\int_{t_0}^{t_k} p^T A^{-1} p dt > \sum_{k=1}^{m} \int_{t_k - \delta^*}^{t_k} p^T A^{-1} p dt, \tag{20}$$

из (18) — (20) имеем

$$S_2(t_k - t_0, q(t_k), p(t_k)) - S_2(0, q_0, p_0) < -\mu\delta^* m. \tag{21}$$

Устремляя в правой части неравенства (20) m к бесконечности, заключаем согласно (21), что действие S_2 не ограничено снизу. Тем самым приходим к противоречию, поскольку подынтегральное выражение функции

$$S_2 = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{2} p^T A^{-1} p - \Pi\right) d\tau$$

на решениях системы (2), принадлежащих множеству Ω, на котором $\Pi \leqslant \leqslant 0$, всегда неотрицательно. Итак, предположение об устойчивости исследуемого положения равновесия системы (1) неверно. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 1 вполне можно ограничится более слабым предположением о том, что $\Lambda^+_{\Omega \setminus \{0,0\}} \neq \varnothing$, не предполагая устойчивости исследуемого положения равновесия А поскольку предположение о непустоте множества $\Lambda^+_{\setminus \{0,0\}}$, как показано выше, приводит к противоречию, то на основании леммы заключаем, что в условиях теоремы 1 $\Lambda^+ \cap \Omega = \Lambda^- \cap \Omega = \{0, 0\}$, где Λ^+, Λ^- — соответственно множества положительных и отрицательных предельных точек решений систем (2), (3).

Замечание 2. Если исследуемое положение равновесия неизолировано, то особые точки $S_2 = \pm\infty$ функции S_2, соответствующие точкам покоя системы (2), принадлежащим $s^* \setminus \Omega$, могут повлечь неоднозначность результата интегрирования равенства (17) по фазовым траекториям системы (2), которые обходят данные точки.

Т е о р е м а 2. *Если выполняются условия теоремы* 1, *то существуют решения системы* (1), *асимптотически стремящиеся к положению равновесия* $q = q = 0$ *при* $t \to \infty$ *и* $t \to -\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По-прежнему, ограничиваясь рассмотрением движения системы (1) в форме (2) на множестве Ω, согласно замечанию 1 заключаем, что для решений системы (2), проходящих через Ω, реализуется одна из возможностей: или система (2) допускает решение, стремящееся к точке $q = p = 0$ при $t \to \infty$, или все решения системы (2) с началом на $\Omega \setminus \{0, 0\}$ оставляют $\overset{*}{s_\varepsilon}$ за конечное время t. Если имеет место первый случай, то в соответствии с обратимостью исходной системы (1) по отношению к t заключаем также о существовании решения, асимптотически стремящегося к точке $q=p=0$ при $t \to -\infty$, и тем самым теорема доказана. Поэтому предположим, что реализуется вторая возможность, т. е. все решения системы (2), проходящие через $\Omega \setminus \{0, 0\}$, оставляют s_ε^* за конечное время.

Следуя схеме доказательства теоремы Крассвского о грубой неустойчивости [6, с. 77], рассмотрим последовательность принадлежащих $\Omega \cap s_{\varepsilon_1}^*$, $\varepsilon_1 < \varepsilon$, точек $\{q_0^{(k)} \neq 0, p_0^{(k)} \neq 0\}$, сходящуюся при $k \to \infty$ к точке $q = p = 0$. Поскольку в данном случае множество $I^+ \times \Omega$ по определению [1] сочетает в себе свойства абсолютного сектора и абсолютного экспеллера, то все положительные полутраектории системы (2), проходящие через $\Omega \setminus \{0, 0\}$, являются уходящими из $s_{\varepsilon_1}^*$ и, таким образом, для каждого номера $k \geqslant 1$ можно указать число $t_k > 0$ такое, что норма $\| q(t, q_0^{(k)}, p_0^{(k)}) \oplus \oplus\, p(t, q_0^{(k)}, p_0^{(k)}) \|$ равна ε_1 при $t = t_k$ и меньше ε_1 при $0 \leqslant t < t_k$.

Рассмотрим последовательность точек $\{q(t_k, q_0^{(k)}, p_0^{(k)}), \ p(t_k, q_0^{(k)}, p_0^{(k)})\}$, принадлежащих $\partial s_{\varepsilon_1}^*$. Так как она ограничена, то тем самым имеет предельную точку (q^*, p^*). Из определения предельной точки следует, что $(q^*, p^*) \in \Omega \cap \partial s_{\varepsilon_1}^*$. Покажем, что траектория $\gamma^-(t, q^*, p^*)$ примыкает к точке $q = p = 0$ при $t \to -\infty$.

Почти дословно повторяя рассуждения из [6, с. 78], заключаем, что траектория γ^- при $t \in I^- =]-\infty, t_0]$ остается в $\Omega \cap \bar{s}_{\varepsilon_1}^*$ и, таким образом, множество отрицательных предельных точек $\Lambda^- \neq \varnothing$. Так как, с одной стороны, множество Λ^- инвариантно [1, с. 280], с другой — все траектории из $\Omega \setminus \{0, 0\}$ являются уходящими при $t \in I^+$, то $\Lambda^- = \{0, 0\}$. Стало быть, траектория γ^- примыкает к точке $q = p = 0$ при $t \to -\infty$. Из обратимости системы (1) по отношению к t заключаем о существовании траектории γ^+, асимптотической к положению равновесия $q = p = 0$, когда $t \to \infty$. Теорема 2 доказана.

Как известно [6, с. 102], наличие решения системы (1), асимптотически стремящегося к положению равновесия при $t \to -\infty$, является признаком грубой неустойчивости последнего, т. е. не разрушающейся при достаточно малом «шевелении» соответствующих уравнений.

З а м е ч а н и е 3. Для линейных систем вида (2), (3) $S_i(t - t_0, q, p) = 1/2\, qp + C_i$, $C_i = \mathrm{const}$, что проверяется дифференцированием функций S_i по векторным полям, определяемым соответствующими уравнениями. Так как в данном случае функции S_i не зависят от t и, следовательно, ограничены на $R \times s_\varepsilon^*$, то их непосредственно можно использовать в качестве функции Ляпунова, если только $\Pi(q)$ в точке $q = 0$ не имеет минимума.

1. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М.: Мир, 1980.— 300 с.
2. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем.— М. : ВИНИТИ, 1983.— 132 с.— (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика; Т. 6).
3. *Сосницкий С. П.* О некоторых случаях неустойчивости равновесия натуральных систем // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 1.— С. 124—127.
4. *Парс Л.* Аналитическая динамика.— М. : Наука, 1971.— 635 с.

5. *Немыцкий В. В.*, *Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.; Л. : Гостехтеориздат, 1949.— 500 с.
6. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М. : Физматгиз, 1959.— 211 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 02.04.85,
после доработки — 29.08.86