УДК 517.9

О. Б. Лыкова, В. Н. Владимиров

О применении знакопостоянных функций в теории интегральных многообразий

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dx/dt = X(t, x), \tag{1}$$

правая часть которого определена и непрерывна на произведении

$$I \times U = \Omega, \tag{2}$$

где I — произвольный интервал вещественной оси R, U — некоторая область из R^n.

Под интегральным многообразием уравнения (1), как и принято, будем понимать некоторое многообразие $\mathfrak{M}$ в расширенном фазовом пространстве (2), инвариантное относительно интегральных кривых этого уравнения.

Известно [1—3], что задачу определения интегрального многообразия рассматриваемой системы нелинейных дифференциальных уравнений можно свести к задаче нахождения неподвижной точки некоторого отображения, которая задает в расширенном фазовом пространстве данной системы уравнений многообразие. Чтобы, пользуясь определением интегрального многообразия, убедиться в том, что это многообразие является искомым интегральным многообразием, нужно решать соответствующую задачу Коши. Более конструктивно этот вопрос решается с помощью доказанных в работах [4—6] теорем, формулирующих легко проверяемые достаточные, а также необходимые условия того, что некоторое заданное многообразие является интегральным многообразием рассматриваемой системы уравнений. Указанные результаты были получены в предположении, что правые части рассматриваемой системы уравнений удовлетворяют в точках многообразия условиям, обеспечивающим единственность решений.

Представляет интерес получить аналогичные результаты для случая, когда в точках многообразия условия единственности решений данной системы уравнений не выполняются.

В настоящей работе эта задача решается с помощью аппарата знакопостоянных функций [7—9].

Введем вначале некоторые определения.

Определение 1. *Под интегральным многообразием вправо (r-интегральным многообразием или $r — \mathfrak{M}$) (влево (l-интегральным многообразием или $l — \mathfrak{M}$)) уравнения* (1) *будем понимать некоторое многообразие $\mathfrak{M}$ расширенного фазового пространства* (2), *обладающее тем свойством, что для любой точки (t_0, x_0) из соотношения $(t_0, x_0) \in \mathfrak{M}$ следует $(t, x(t, t_0, x_0)) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \geqslant t_0$ $(t \leqslant t_0)$ из максимального интервала существования решения $x(t, t_0, x_0)$.*

Замечание 1. Если некоторое многообразие является интегральным многообразием рассматриваемых уравнений как вправо, так и влево, то оно является и интегральным многообразием в смысле общепринятого определения.

Верно также и обратное утверждение.

Рассмотрим теперь скалярную функцию $V(t, x)$, определенную на множестве Ω.

Определение 2. *Действительная скалярная функция $V(t, x)$ называется знакоположительной (знакоотрицательной) на множестве Ω с ядром $L \subseteq \Omega$, если $V(t, x) \geqslant 0$ $(V(t, x) \leqslant 0)$ при $(t, x) \in \Omega$ и если $V(t, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $(t, x) \in L$.*

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы некоторое многообразие $\mathfrak{M} \subset \Omega$ было r-интегральным (l-интегральным) многообразием уравнения* (1), *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $V(t, x)$, определенная на Ω и обладающая следующими свойствами*:

1) $V(t, x)$ — *знакоположительная функция на Ω с ядром $\mathfrak{M}$;*

2) *для произвольного решения $x(t, t_0, x_0)$ уравнения* (1) *функция $V(t, x(t, t_0, x_0))$ не возрастает (не убывает) при $t \geqslant t_0$ $(t \leqslant t_0)$, где $(t_0, x_0) \in \Omega$.*

Доказательство проведем для случая $r — \mathfrak{M}$ (случай $l — \mathfrak{M}$ доказывается аналогично).

Доказательство. Достаточность. Пусть существует некоторая функция $V(t, x)$, определенная на Ω, обладающая свойствами 1 и 2, а многообразие $\mathfrak{M}$ не является r-интегральным многообразием уравнения (1).

Тогда найдется точка $(t', x') \in \mathfrak{M}$ такая, что существует интегральная кривая $\Gamma: (t, x(t, t', x'))$, проходящая через эту точку, и найдется момент $t'' > t'$ такой, что точка $(t'', x(t'', t', x')) \in \Gamma$ не принадлежит $\mathfrak{M}$.

Согласно свойству 1 функция V при $t = t''$ удовлетворяет неравенству $V(t'', x(t'', t', x')) > 0$, что противоречит условию 2 теоремы, так как $V(t, x(t, t', x'))$ в момент $t = t'$ равна $V(t', x') = 0$, поскольку $(t', x') \in \mathfrak{M}$. Это противоречие доказывает, что $\mathfrak{M}$ — r-интегральное многообразие.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{M}$ — r-интегральное многообразие. Положим

$$V(t', x') = \sup_{t \geqslant t'} \rho(t, t', x'), \tag{3}$$

где $\rho(t, t', x') = \sup\limits_{x \in F_{t'}^{t}(x'), t \geqslant t'} \rho(x, \mathfrak{M}_t)$, $\rho(x, \mathfrak{M}_t)$ — расстояние между x и сечением многообразия $\mathfrak{M}$ в момент времени t, $F_{t'}^{t}(x')$ — движение, т. е. совокупность точек фазового пространства U, принадлежащих всем проекциям интегральных кривых на U, проходящим через точку (t', x'), в некоторый фиксированный момент $t \geqslant t'$.

Легко видеть, что функция (3) удовлетворяет условию 1 теоремы. Покажем, что имеет место свойство 2. Выберем некоторое значение $t_1 > t'$.

Рассмотрим $\rho(t, t_1, x)$, где $x \in F_{t'}^{t_1}(x')$. Имеем $F_{t_1}^{t}(x) \subset F_{t'}^{t}(x')$ при $t \geqslant t_1$ и любом $x \in F_{t'}^{t_1}(x')$. Поэтому $\rho(t, t_1, x_1) \leqslant \rho(t, t', x')$ при $t \geqslant t_1$ и любом $x \in F_{t'}^{t_1}(x')$, откуда получаем

$$V(t_1, x) = \sup_{t \geqslant t_1} \rho(t, t_1, x_1) \leqslant \sup_{t \geqslant t'} \rho(t, t', x') \leqslant V(t', x'). \tag{4}$$

Из (4) следует, что функция $V(t, x)$ обладает также свойством 2. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Условие 2 теоремы 1 означает, что функция $V(t, x(t, t', x'))$ дифференцируема вдоль интегральных кривых уравнения (1) почти для всех t и при этом выполняется неравенство $dV/dt \leqslant 0$ ($dV/dt \geqslant 0$) [10].

Следствие 1. *Если существует непрерывная локально удовлетворяющая условию Липшица по x равномерно относительно t функция $V(t, x)$, определенная на Ω, обладающая свойствами:*

1) $V(t, x)$ — знакопостоянная функция на Ω с ядром $\mathfrak{M}$;

2) $DV(t, x) \leqslant 0$ ($DV(t, x) \geqslant 0$) на Ω, где $DV(t, x)$ — одна из производных Дини функции $V(t, x)$ вдоль решений дифференциального уравнения (1) [11], *то многообразие $\mathfrak{M}$ — r-интегральное (l-интегральное) многообразие уравнения* (1).

Доказательство следствия 1 очевидно, если учесть, что из условия 2 следствия 1 следует условие 2 теоремы 1.

Если $V(t, x) \in C^1$, то

$$DV(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} X(t, x). \tag{5}$$

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} dx/dt &= t^{-1}(-2y^{5/3}(tx)^{-2} - 1 - x) \equiv f(t, x, y), \\ dy/dt &= (tx)^{-2} y^{2/3} \equiv g(t, x, y), \end{aligned} \tag{6}$$

определенную на множестве

$$\Omega = \{(t, x, y) : t > 0,\ x > 0,\ y \in R\}, \tag{7}$$

и многообразие $\mathfrak{M}$, заданное в неявном виде

$$\mathfrak{M} = \{(t, x, y) : y^2 + tx + 1 = 0,\ t > 0,\ x > 0\}. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$V(t, x, y) = (tx + 1 + y^2)^2 \tag{9}$$

и проверим для нее выполнение условий теоремы 1.

Очевидно, $V(t, x, y) \geqslant 0$ для любой точки $(t, x, y) \in \Omega$ и $V(t, x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $(t, x, y) \in \mathfrak{M}$.

Далее, в силу (5) имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(t, x, y) = 2(tx + 1 + y^2)x +$$

$$+ 2(tx + 1 + y^2) t t^{-1}(-2y^{5/3}(tx)^2 - 1 - x) + 2(tx + 1 + y^2) 2y (tx)^{-2} y^{2/3} =$$

$$= 2(tx + 1 + y^2)(x - 2y^{5/3}(tx)^{-2} - 1 - x + 2y^{5/3}(tx)^{-2}) = 2(tx + 1 + y^2)(-1) \leqslant 0$$

в Ω. Следовательно, многообразие (8) является r-интегральным многообразием системы (6).

Из теоремы 1 и замечания 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. *Для того чтобы некоторое многообразие $\mathfrak{M} \subset \Omega$ было интегральным многообразием уравнения* (1), *необходимо и достаточно, чтобы существовали скалярные функции $V(t, x)$ и $W(t, x)$, заданные на Ω и обладающие свойствами:*

1) $V(t, x)$ и $W(t, x)$ — знакоположительные функции на Ω с ядром $\mathfrak{M}$;

2) для любого решения $x(t, t_0, x_0)$ уравнения (1) *функция $V(t, x(t, t_0, x_0))$ не возрастает при $t \geqslant t_0$ и соответственно функция $W(t, x(t, t_0, x_0))$ не убывает при $t \leqslant t_0$.*

Проиллюстрируем теорему 2 на следующем примере.

Пример 2. Покажем, что интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений

$$dx/dt = -x - t^2x^{1/2}y^2 \equiv f(t, x, y),\ dy/dt = t^2x^{-2}(y-2) \equiv g(t, x, y), \tag{10}$$

определенной на

$$\Omega = \{(t, x, y) : t > 0,\ x > 0,\ y \in R\}, \tag{11}$$

является многообразие

$$\mathfrak{M} = \{(t, x, y) : y = 2,\ t > 0,\ x > 0\}. \tag{12}$$

Введем в рассмотрение функции $V(t, x, y) = e^{-t^2x^{-2}}(y-2)^2$; $W(t, x, y) = (y-2)^2$. Очевидно, эти функции удовлетворяют условию 1 теоремы 2. Проверим выполнение условия 2. Имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(t, x, y) = -2tx^{-2}e^{-t^2x^{-2}}(y-2)^2 +$$

$$+2t^2x^{-3}e^{-t^2x^{-2}}(y-2)^2(-x - t^2x^{1/2}y^2) + 2t^2x^{-2}(y-2)^2e^{-t^2x^{-2}} =$$

$$= 2tx^{-2}e^{-t^2x^{-2}}(y-2)^2(-1 + tx^{-1}(-x - t^2x^{1/2}y^2) + t) =$$

$$= 2tx^{-2}e^{-t^2x^{-2}}(y-2)^2(-1 - t^3x^{-1/2}y^2) \leqslant 0,$$

а также

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} f(t, x, y) + \frac{\partial W}{\partial y} g(t, x, y) = 2(y-2)^2t^2x^{-2} \geqslant 0.$$

Следовательно, многообразие (12) является интегральным многообразием системы (10).

Пример 3. Пусть дана система уравнений

$$dx/dt = \frac{1}{2}x^{-1}(3ty^{2/3} - 1) \equiv f(t, x, y),\ dy/dt = 3ty^{2/3} \equiv g(t, x, y), \tag{13}$$

определенная на

$$\Omega = \{(t, x, y) : t \in R,\ x > 0,\ y \in R\}, \tag{14}$$

и многообразие

$$\mathfrak{M} = \{(t, x, y) : y = t + x^2,\ x > 0\}. \tag{15}$$

Введем в рассмотрение функцию $V_0(t, x, y) = (y - t - x^2)^2$. Легко видеть, что функция V_0 удовлетворяет условию 1 теоремы 2. Далее, так как

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{\partial V_0}{\partial x} f(t, x, y) + \frac{\partial V_0}{\partial y} g(t, x, y) = -2(y - t - x^2) -$$

$$-4(y - t - x^2)x \cdot \frac{1}{2}x^{-1}(3ty^{2/3} - 1) + 2(y - t - x^2) - 3ty^{2/3} =$$

$$= -2(y - t - x^2)(1 + 3ty^{2/3} - 1 - 3ty^{2/3}) \equiv 0,$$

то функцию $V_0(t, x, y)$ можно рассматривать как в качестве функции $V(t, x, y)$, так и в качестве функции $W(t, x, y)$. Следовательно, $\mathfrak{M}$—интегральное многообразие системы (13).

Представляет интерес рассмотреть вместо функций V и W одну функцию

$$V(t, \tau, x) = \begin{cases} V(t, x), & t > \tau, \\ W(t, x), & t < \tau, \\ \max\{V(\tau, x),\ W(\tau, x)\}, & t = \tau. \end{cases}$$

Тогда можно сформулировать следующую теорему, эквивалентную теореме 2.

Теорема 3. *Для того чтобы некоторое многообразие $\mathfrak{M} \subset \Omega$ было интегральным многообразием уравнения* (1), *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $V(t, \tau, x)$, заданная на множестве $\Omega_1 = I \times I \times U$ и обладающая свойствами:*

1) $V(t, \tau, x)$ — *знакоположительная функция на Ω с ядром $\mathfrak{M}$, т. е. $V(t, \tau, x) \geqslant 0$ при $(t, \tau, x) \in \Omega_1$ и $V(t, \tau, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $(t, x) \in \mathfrak{M}$;*

2) *для любого решения* $x(t, t_0, x_0)$ *уравнения* (1) *функция* $V(t, \tau; x(t, t_0, x_0))$ *не возрастает при всех* $t \geqslant \tau$ *и не убывает при всех* $t \leqslant \tau$.

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Львов : Изд-во АН УССР, 1945.— 137 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1958.— 408 с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
4. *Лыкова О. Б.* Ограниченные интегральные многообразия систем нелинейных дифференциальных уравнений // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям.— Киев : Наук. думка, 1984.— Т. 1.— С. 245—248.
5. *Барис Я. С.* Афинные интегральные многообразия систем дифференциальных уравнений : Уч. пособие.— Гомель : Гомель. ун-т, 1981.— 35 с.
6. *Лыкова О. Б., Владимиров В. Н.* Об интегральных многообразиях систем дифференциальных уравнений.— Киев, 1986.— 32 с.— (Препринт / Ин-т математики АН УССР; 86.8).
7. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— М. : Изд-во АН СССР, 1956.— 475 с.— (Собр. соч. В 4-х т.; Т. 2).
8. *Зубов В. И.* Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение).— М. : Высш. шк., 1984.— 232 с.
9. *Самойленко А. М.* Изучение динамических систем с помощью знакопостоянных функций // Укр. мат. журн.— 1972.— **24**, № 3.— С. 374—384.
10. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М. : Мир, 1979.— 587 с.
11. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М. : Мир, 1980.— 300 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 19.08.86