УДК 517.917

В. Н. Шевело, А. Ф. Иванов

Осцилляторные свойства решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$x^{(n)}(t) + p(t) f(x(\tau(t))) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

в предположении, что $f(v)$, $p(t)$, $\tau(t)$ определены и непрерывны при всех $v \in \mathbb{R}$ и при всех $t \in \mathbb{R}$ (или при $|t| \geqslant t_0 \geqslant 0$) и удовлетворяют условиям: $p(t)$ не меняет знак, $vf(v) > 0$ при $v \neq 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \tau(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to-\infty} \tau(t) = +\infty. \tag{2}$$

Под решением уравнения (1) понимается n раз непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая ему при всех достаточно больших $|t|$.

Под осциллирующим решением понимается решение, имеющее последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$ (или к $-\infty$). В противном случае говорят, что решение неосциллирующее. Из рассмотрения исключаются решения, тождественно равные нулю при всех достаточно больших $|t|$. Заметим, что уравнения с отклонениями вида (2) меняют, вообще говоря, тип на рассматриваемом промежутке. Вследствие этого их решения могут иметь принципиально новые свойства, обнаружение и описание которых представляет значительный интерес.

Некоторые результаты изучения свойств решений уравнения (1) содержатся в [1, 2]. В работе [1] изложены результаты изучения осцилляторных свойств решений линейного уравнения ($f(x) \equiv x$) с отклонением аргумента $\tau(t) \equiv h - t$. Статья [2] посвящена исследованию этих же свойств нелинейного уравнения (1) при $n = 1$. Результат, полученный в настоящей статье, обобщает утверждения об осцилляции решений из этих работ на случай уравнения (1), а также дает более общее условие осцилляции решений для уравнения, рассмотренного в [1].

Заметим, что простейшее уравнение вида (1) $x^{(n)}(t) + p_0 x(h - t) = 0$ сводится повторным дифференцированием к уравнению $x^{(2n)}(t) + (-1)^{n+1} p_0^2 \times x(t) = 0$, и, таким образом, все C^{2n}-решения первого уравнения являются решениями обычного дифференциального уравнения.

Такой метод сведения к обычным дифференциальным уравнениям в ряде случаев достаточно эффективен при исследовании свойств решений дифференциальных уравнений с отклонением аргумента [2, 3], однако применительно к уравнению (1) он, вообще говоря, не применим.

Другой возможный подход заключается в непосредственном установлении свойств решений уравнения (1) по его структуре.

Для этого уравнения справедлива следующая лемма.

Лемма. *Каждое осциллирующее решение уравнения* (1) *имеет последовательности нулей, сходящиеся как к $+\infty$, так и к $-\infty$.*

Доказательство. Действительно, если решение $x(t)$ имеет последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$, то каждая его производная $x^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, меняет знак бесконечное число раз на полуоси $\mathbb{R}^+ = \{t \mid t \geqslant 0\}$. Поэтому, если $x(\tau(t))$ сохраняет знак при $t \geqslant t_1$, то из (1) следует, что $x^{(n)}(t)$ не меняет знак при всех достаточно больших t, что противоречит первому замечанию.

Следствие. *Все производные до порядка n включительно любого осциллирующего решения уравнения* (1) *меняют знак бесконечное число раз на каждой из полуосей $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^-$. Все производные до порядка n включительно любого неосциллирующего решения уравнения* (1) *не меняют знак при всех достаточно больших $|t|$.*

Следующее утверждение составляет основное содержание работы. Его можно рассматривать как обобщение теорем 3 и 5 из [1], а также теорем 1 и 3 из [2].

Теорема. *Если выполняются условия* $\int\limits_{R+} p(t)\,dt = \infty$, $\int\limits_{R-} p(t)\,dt = \infty$, *то каждое решение уравнения* (1) *при нечетном* n *осциллирует, а при четном* n *либо осциллирует, либо для достаточно больших* $|t|$ *удовлетворяет условию* $x(t)\,x(\tau(t)) < 0$ *при* $p(t) \geqslant 0$ *и* $x(t)\,x(\tau(t)) > 0$ *при* $p(t) \leqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $p(t) \geqslant 0$.

1. Предположим, что n — нечетное и уравнение (1) имеет неосциллирующее решение $x(t)$. Тогда в силу следствия из леммы существует $t_1 > 0$ такое, что $x^{(k)}(t)$, $x^{(k)}(\tau(t))$, $k = 0, 1, \ldots, n$, не меняют знак при $t > t_1$. Пусть, для определенности, $x(t) > 0$, и предположим сначала, что $x(\tau(t)) > 0$, $t \geqslant t_1$. Тогда в силу уравнения (1) $x^{(n)}(t) \leqslant 0$ при $t \leqslant t_2$. Покажем, однако, что при сделанных предположениях должно выполняться: $x^{(k)}(t) \geqslant 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $t \leqslant t_2$, что противоречит условию $x^{(n)}(t) \leqslant 0$, $t \leqslant t_2$. Действительно, поскольку $x^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $t \leqslant t_2$, не меняет знак и $x^{(n)}(t) \leqslant 0$, то существует четное l, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, такое, что $x^{(k)}(t) > 0$, $k = 0, 1, \ldots, l$, $(-1)^k x^{(k)}(t) > 0$, $k = l, l+1, \ldots, n$, $t \leqslant t_2$ [1, 4]. Если предположить, что $l = 0$, т. е. $x'(t) \leqslant 0$, $t \leqslant t_2$, то $x(t) \geqslant x_0 > 0$ при $t \leqslant t_2$. Тогда из (1) следует $x^{(n)}(t) = -p(t)\,f(x(\tau(t))) \leqslant -f_0 p(t)$, $t > t_3$, f_0 — const > 0, что в свою очередь дает $x^{(n-1)}(t) \leqslant x^{(n-1)}(t_3) - f_0 \int\limits_{t_3}^{t} p(s)ds$. Следовательно, $x^{(n-1)}(t)$ отрицательно при достаточно больших t, что вместе с условием $x^{(n)}(t) \leqslant 0$, $t \geqslant t_1$, противоречит предположению о положительности $x(t)$, $t \geqslant t_1$. Таким образом, $l \neq 0$. Если предположить, что $l = 2$, то тогда $x'''(t) \leqslant 0$ и $x''(t)$ не возрастает на промежутке $t \leqslant t_2$. Но тогда $x''(t) \geqslant x''(t_2) > 0$ и, следовательно, $x(t) > x_0 > 0$ при всех $t \leqslant t_2$. Последнее, как уже показано, ведет к противоречию $x(t) < 0$ при $t \geqslant t_3$. Продолжая эти рассуждения, приходим к заключению, что $x^{(k)}(t) \geqslant 0$, $t \leqslant t_2$, для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим теперь другую возможность: $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) < 0$ при $t \geqslant t_1$. Покажем, что $x(t) > x_0 > 0$ при $t \geqslant t_1$ для некоторого x_0. Действительно, так как $x^{(k)}(t)$, $t \geqslant t_1$, $k = 0, 1, \ldots, n$, не меняет знак и $x(t) > 0$, $x^{(n)}(t) > 0$, то существует нечетное l, $1 \leqslant l \leqslant n$, такое, что $x^{(k)}(t) > 0$, $k = 0, 1, \ldots, l$, $(-1)^{k+1} x^{(k)}(t) > 0$, $k = l, \ldots, n$. Следовательно, $x'(t) \geqslant 0$, и тогда $x(t) > x(t_1) > 0$, $t \geqslant t_1$. В силу уравнения (1) $x^{(n-1)}(s) - x^{(n-1)}(t) = -\int\limits_{t}^{s} p(\xi) \times f(\tau(\xi))\,d\xi \leqslant -f_0 \int\limits_{t}^{s} p(\xi)d\xi$, $t < s$, f_0—const>0. Отсюда $x^{(n-1)}(t) \geqslant x^{(n-1)}(s) + f_0 \int\limits_{t}^{s} p(\xi)\,d\xi$. Принимая во внимание условия теоремы, из последнего неравенства находим $x^{(n-1)}(t) \geqslant x_1 > 0$, или же $x(t) \geqslant x_2 > 0$ при всех $t \leqslant t_2$ для некоторого t_2, что противоречит предположению $x(\tau(t)) < 0$ при $t \geqslant t_1$.

Случай $x(t) < 0$, $t \geqslant t_1$, рассматривается аналогично. Первая часть теоремы, таким образом, доказана.

2. Предположим, что n — четное, и уравнение (1) имеет неосциллирующее решение $x(t)$. Пусть, для определенности, $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$, $t \geqslant t_1$. Тогда $x^{(n)}(t) \leqslant 0$, $t \geqslant t_1$, и можно указать нечетное l, $l \leqslant n-1$, такое, что $x^{(k)}(t) \geqslant 0$, $k = 0, 1, \ldots, l$, $(-1)^{k+1} x^{(k)}(t) \geqslant 0$, $k = l, \ldots, n$, $t \geqslant t_1$. Поскольку $l \geqslant 1$, то $x(t) \geqslant x(t_1) > 0$ при $t \geqslant t_1$ и $x^{(n-1)}(t) = x^{(n-1)}(t_2) + \int\limits_{t}^{t_2} p(s)\,f(x(\tau(s)))\,ds \geqslant x^{(n-1)}(t_2) + f_0 \int\limits_{t}^{t_2} p(s)\,ds$, $f_0 = \text{const} > 0$, $t < t_2$. Следовательно, $x^{(n-1)}(t) \to +\infty$ при $t \to -\infty$. Но тогда $x^{(n-2)}(t) \leqslant -a < 0$ для некоторого $a > 0$, $t \leqslant t_3$ и $x(t)$ должно быть отрицательным при $t \to$

$\to -\infty$, что противоречит предположению. Следовательно, $x(t)x(\tau(t)) < 0$ при $t \geqslant t_1$. Случай $x(t) < 0$, $x(\tau(t)) < 0$, $t \geqslant t_1$, рассматривается аналогично. Теорема для случая $p(t) \geqslant 0$ доказана.

3. Если $p(t) \leqslant 0$, то, выполнив замену переменной $t = -s$ и обозначив $\tau_1(s) = -\tau(-s)$, $p_1(s) = p(-s)$, $x_1(s) = x(-s)$, вместо уравнения (1) получим уравнение $x_1^{(n)}(s) + (-1)^n p_1(s) f(x_1(\tau_1(s))) = 0$. Последнее уравнение при нечетном n есть уравнение типа (1) с неотрицательным коэффициентом $p(t)$.

Последний случай ($p(t) \leqslant 0$, n — четное) рассматривается аналогично п. 2 доказательства теоремы.

В заключение заметим, что дифференциально-функциональные уравнения все чаще используются в математических моделях реальных явлений и процессов. Поэтому представляет практический интерес выяснение того нового, что привносит отклонение аргумента. Некоторые закономерности влияния отклонения аргумента на осцилляторные свойства решений описаны в работах [5—6]. Обратим здесь внимание на принципиально новое свойство решений уравнения (1).

Хорошо известно, что асимптотическое при $t \to +\infty$ поведение решений соответствующего (1) обычного дифференциального уравнения ($\tau(t) \equiv t$) существенно зависит от знака коэффициента $p(t)$: при $p(t) \geqslant 0$ типично свойство A, а при $a(t) \leqslant 0$ — свойство B (см. [4]). Рядом авторов выделены классы дифференциальных уравнений с отклонением аргумента вида $\lim\limits_{t\to-\infty} \tau(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty$, для которых сохраняется типичность этих свойств (см. [6]).

Теорема настоящей работы описывает новую закономерность: все решения уравнения (1) с отклонением вида (2) осциллируют при нечетном n как при $p(t) \geqslant 0$, так и при $p(t) \leqslant 0$.

Отметим также, что в случае четного n уравнение (1) может иметь неосциллирующие решения различных типов. Так, уравнение $x^{(2k)}(t) + x(\tau(t)) = 0$ при $\tau(t) \equiv -t$ имеет решение $x(t) = e^t - e^{-t}$, стремящееся к бесконечности при $|t| \to \infty$ вместе со всеми своими производными. Это же уравнение при $\tau(t) \equiv -t^{2k+1}/(2k)!$ обладает решением $x(t) = 1/t$, стремящимся к нулю при $|t| \to \infty$ вместе со всеми своими производными.

1. *Fite W.* Properties of the solutions of certain functional differential equations // Trans. Amer. Math. Soc.— 1921.— 22, N 3.— P. 311—319.
2. *Шарковский А. Н., Шевело В. Н.* О колеблемости и асимптотическом поведении решений одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний.— Киев : Наук. думка, 1977.— С. 257—263.
3. *Шарковский А. Н.* Дифференциально-функциональные уравнения с конечной группой преобразований аргумента // Асимптотическое поведение решений дифференциально-функциональных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978.— С. 118—147.
4. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси : Тбилис. ун-т, 1975.— 351 с.
5. *Митропольский Ю. А., Шевело В. Н.* Некоторые аспекты теории нелинейных колебаний систем с запаздыванием (последействием) // Прикл. механика.— 1976.— 12, № 12.— С. 3—11.
6. *Митропольский Ю. А., Шевело В. Н.* О развитии теории осцилляции решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Укр. мат. журн.— 1977.— 29, № 3.— С. 313—323.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 13.06.86