УДК 517.9

М. Н. Астафьева

К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем с импульсным воздействием

При исследовании колебательных процессов с кратковременными возмущениями во многих физических задачах возникают кроме интегралов типа Френеля [1—4] осциллирующие суммы вида

$$S_k(t, \tau, \tau_j, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{t \leqslant \tau_j < t+\tau} f(\tau_j) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^{\tau_j} \langle k, \omega(\tau)\rangle \, d\tau\right\}, \tag{1}$$

где $t \in [0, \infty)$, $\tau \in [0, L]$ (L — некоторая положительная постоянная), τ_j, $j = 0, 1, \ldots,$ — фиксированные моменты времени, относительно которых будем предполагать, что $\tau_{j+d} = \tau_j + 2\pi\varepsilon$ для всех $j = 0, 1, \ldots$ и некоторого натурального d, $f(\tau)$ — действительная функция, $f(\tau) \in C^1([0, L])$, $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau))$ — достаточно гладкая вектор-функция, $k = (k_1, \ldots, k_m)$ — целочисленный вектор, $\|k\| = |k_1| + \ldots + |k_m| \neq 0$, $\langle k, \omega(\tau)\rangle = \sum\limits_{\nu=1}^{m} k_\nu \omega_\nu \times (\tau)$ — скалярное произведение, i — мнимая единица, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \ll 1$ — малый положительный параметр.

При $f(\tau) \not\equiv 0$ оценка $S_k(t, \tau, \tau_j, \varepsilon)$ существенно зависит от характера нулей функций $\langle k, \omega(\tau)\rangle$ и $\langle k, \omega(\tau)\rangle - n$, где n — целое число. В частности, если функции $\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau)$ линейно зависимы и $k \neq 0$ — целочисленный вектор такой, что $\langle k, \omega(\tau)\rangle = 0$, то $S_k(t, \tau, \tau_j, \varepsilon) = \mathrm{const}$. Пусть теперь $\omega(\tau) = (1 + \tau, \tau)$, $k = (1 - 1)$ ($\langle k, \omega(\tau)\rangle - 1 \equiv 0$). Хотя Вронскиан функций $\omega_1 = 1 + \tau$ и $\omega_2 = \tau$ отличен от нуля, т. е. $\omega_1(\tau)$, $\omega_2(\tau)$ линейно независимы, при $f(\tau) \equiv 1$, $r \in [0, 1]$, $\tau_j = 2\pi j\varepsilon$ и достаточно малых значениях параметра ε

$$|S_k(\tau, \tau_j, \varepsilon)| = \left|\varepsilon \sum_{0 \leqslant \tau_j < \tau} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^{\tau_j} \langle k, \omega(\tau)\rangle \, d\tau\right\}\right| \geqslant \frac{1}{4\pi}.$$

Приведем одно из достаточных условий, обеспечивающих эффективную равномерную оценку суммы (1).

Обозначим $W(\omega'(\tau)) = (\omega_p^{(l)}(t))_{l,p=1}^m$, $\quad \omega_p^{(l)}(t) = \dfrac{d^l}{dt^l}\omega_p(t)$.

Теорема 1. *Пусть* $|f(t)|$, $\left|\dfrac{d}{dt} f(t)\right|$ *и* $\|W^{-1}(\omega'(t))\|$ *равномерно ограничены постоянной, а* $\omega_p^{(l)}(t)$, $l = \overline{0, m}$, $p = \overline{1, m}$, *равномерно непрерывны* $\forall t \in [0, \infty)$. *Тогда существуют постоянные* ε_1, $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$, *и не зависящая от* t, τ *и* ε $C_1 > 0$ *такие, что для всех* $t \in [0, \infty)$, $\tau \in [0, L]$,

$\tau_j \in [t, t+\tau)$, *целочисленных* k, $\|k\| \neq 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *справедлива оценка*

$$|S_k(t, \tau, \tau_j, \varepsilon)| \leqslant C_1 \varepsilon^{\frac{1}{m+1}}. \tag{2}$$

Идея доказательства теоремы 1 состоит в разбиении отрезка $[t, t+\tau]$ на две части: конечное число непересекающихся резонансных зон шириной $2\mu + \frac{4}{d}\pi\varepsilon$ и $2\frac{\mu}{\|k\|} + \frac{4}{d}\pi\varepsilon$ соответственно и нерезонансную часть. Суммы (1) по резонансным зонам оцениваются величиной $C_2\mu + C_3\varepsilon$, а по их дополнениям — величиной вида $C_4\varepsilon\mu^{-m}$, где C_2, C_3, C_4 — постоянные, не зависящие от ε. Объединяя обе оценки и полагая $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{m+1}}$, убеждаемся в справедливости теоремы.

Оценка (2) позволяет обосновать применимость метода усреднения для импульсных систем второго порядка с медленно меняющимися параметрами как на асимптотически большом, так и на бесконечном интервале времени.

Пусть задана система

$$\begin{gathered}\varepsilon \frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{\omega^2(\tau)}{\varepsilon} x(\tau, \varepsilon) = X\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, \varepsilon\right), \quad \tau \neq \tau_j, \\ \Delta \frac{dx}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_j} = Y_j\left(x, \frac{dx}{d\tau}, \varepsilon\right),\end{gathered} \tag{3}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_m) \in D \subset R^m$, $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau))$, $\tau = \varepsilon t$ — «медленное» время, ε — малый положительный параметр, $X(\tau, x, \dot{x}, \varepsilon)$, $Y_j(x, \dot{x}, \varepsilon)$ — достаточно гладкие вектор-функции, τ_j, $j = 0, 1, \ldots,$ — моменты импульсного воздействия, относительно которого будем предполагать, что $\tau_{j+d} = \tau_j + 2\pi\varepsilon$, $Y_{j+d} = Y_j$ для всех $j = 0, 1, \ldots$ и некоторого натурального d.

С помощью стандартной замены Крылова—Боголюбова [5] перейдем от системы (1) к амплитудно-фазовым уравнениям

$$\begin{gathered}da/d\tau = F(\tau, a, \varphi), \quad d\varphi/d\tau = \omega(\tau)/\varepsilon + \Phi(\tau, a, \varphi), \quad \tau \neq \tau_j, \\ \Delta a|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon P_j(a, \varphi) + \varepsilon^2 \ldots, \quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon Q_j(a, \varphi) + \varepsilon^2 \ldots,\end{gathered} \tag{4}$$

где $a = (a_1, \ldots, a_m) \in G \subset R^m$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$.

Наряду с (4) рассмотрим усредненную по всем быстрым переменным систему уравнений первого приближения [6]:

$$\begin{gathered}\frac{d\bar{a}}{d\tau} = \left[F_0(\tau, \bar{a}) + \frac{1}{2\pi} P_0(\bar{a})\right], \\ \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \left[\Phi_0(\tau, \bar{a}) + \frac{1}{2\pi} Q_0(\bar{a})\right],\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$[F_0; \Phi_0] = (2\pi)^{-m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} [F(\tau, \bar{a}, \varphi); \Phi(\tau, \bar{a}, \varphi)]\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m,$$

$$[P_0; Q_0] = (2\pi)^{-m} \sum_{\eta=1}^{d} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} [P_\eta(\bar{a}, \varphi); Q_\eta(\bar{a}, \varphi)]\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m.$$

Теорема 2. *Пусть:*

а) $[X; Y_j] \in C^{l_1, l_2; l_3}_{\tau, x, \dot{x}}([0, L] \times D \times R^m, K)$, $\min\{l_1, l_2, l_3\} \geqslant m + 3$, *где через* $C^{l_1, l_2; l_3}_{\tau, x, \dot{x}}([0, L] \times D \times R^m, K)$ *обозначено множество вектор-функций, каждая компонента которых непрерывно дифференцируема* l_1 *раз по* τ, l_2 *раз по* x, l_3 *раз по* $\dot{x}$ *и ограничена вместе со своими частными производными в области* $[0, L] \times D \times R^m$ *постоянной* K;

б) *выполняются условия теоремы* 1;

в) *решение* $\bar{a}(\tau)$, $\bar{\varphi}(\tau)$ *усредненной системы* (5) *лежит в* $G \times \mathfrak{T}_m$ *вместе со своей* ρ_1*-окрестностью* $\forall \tau \in [0, L]$.

Тогда существуют такие постоянные $\varepsilon_2 > 0$ *и* $C_5 > 0$, *что* $\forall \tau \in [0, L]$ *и* $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ *справедлива оценка*

$$\| x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau) \| + \| dx(\tau, \varepsilon)/d\tau - d\bar{x}(\tau)/d\tau \| \leqslant C_5 \varepsilon^{\frac{1}{m+1}},$$

где $x(\tau, \varepsilon)$ — *решение системы* (3), *для которого* $x(0, \varepsilon) = \bar{x}(0)$, $dx(0, \varepsilon)/d\tau = d\bar{x}(0)/d\tau$, $\bar{x}(\tau)$ — *первое приближение* $x(\tau, \varepsilon)$.

Оказывается, что на бесконечном временном интервале имеет место близость лишь для медленных переменных (амплитуд).

Теорема 3. *Предположим, что:*

а) $\| W^{-1}(\omega'(\tau)) \|$ *равномерно ограничена,* $\omega_p^{(l)}(\tau)$, $l = \overline{0, m}$, $p = \overline{1, m}$, *равномерно непрерывны на полуоси* $\tau \geqslant 0$;

б) *функции* $X(\tau, x, \dot{x}, \varepsilon)$ *и* $Y_j(x, \dot{x}, \varepsilon)$ $r \geqslant m + 3$ *раз непрерывно дифференцируемы на множестве* $[0, \infty) \times D \times R^m$, *причем все их частные производные ограничены на указанном множестве;*

в) *существует ограниченное решение* $\bar{a} = \bar{a}(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, *уравнения для медленных переменных системы* (5), *содержащееся в* G *вместе со своей* ρ_2*-окрестностью;*

г) *фундаментальная матрица* $\Omega(\tau, t)$, $\Omega(\tau, \tau) = E$, *решений уравнения в вариациях* $\dfrac{dz}{d\tau} = \dfrac{\partial}{\partial \bar{a}} \left[F_0(\tau, \bar{a}(\tau)) + \dfrac{1}{2\pi} P_0(\bar{a}(\tau)) \right] z$ *удовлетворяет оценке* $\| \Omega(\tau, t) \| \leqslant M e^{-\gamma(\tau - t)}$, $\tau \geqslant t \geqslant 0$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$, $M = \mathrm{const} \geqslant 1$.

Тогда существуют такие постоянные $\varepsilon_3 > 0$ *и* $C_6 > 0$, *что при* $\tau \geqslant 0$ *и* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$ *имеет место оценка* $\| a(\tau, \varepsilon) - \bar{a}(\tau) \| \leqslant C_6 \varepsilon^{\frac{1}{m+1}}$, *где* $a(\tau, \varepsilon)$, $\varphi(\tau, \varepsilon)$ — *решение системы* (4), *для которого* $a(0, \varepsilon) = \bar{a}(0)$, $\varphi(0, \varepsilon) \in \mathcal{T}_m$.

1. *Бахтин В. И.* Об усреднении в многочастотных системах // Функц. анализ.— 1986.— **20**, вып. 2.— С. 1—7.
2. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения.— 1987.— **23**, № 2.— С. 267—278.
3. *Самойленко А. М., Петришин Р. И.* Равномерные оценки одномерных осциллирующих интегралов // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— № 11.— С. 12—14.
4. *Самойленко А. М., Петришин Р. И.* Метод усреднения в многочастотных системах с медленно меняющимися параметрами // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 4.— С. 493—500.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
6. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика.— 1971.— Вып. 9.— С. 101—117.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 18.05.89