УДК 519.21

В. С. Королюк, А. В. Свищук

Центральная предельная теорема для неоднородных полумарковских случайных эволюций

В работе доказывается центральная предельная теорема (ЦПТ) и ЦПТ в схеме фазового усреднения для неоднородных полумарковских случайных эволюций (ПМСЭ) в схеме серии, которые задаются семейством неоднородных полугрупп операторов. Рассматривается приложение данных теорем к процессу переноса.

ЦПТ и ЦПТ в схеме фазового укрупнения для однородных ПМСЭ изучались соответственно в работах [1, 2].

1. Определение неоднородных ПМСЭ в схеме серий. Рассмотрим измеримое фазовое пространство $(X, \mathfrak{X})$ со счетно-порожденной σ-алгеброй $\mathfrak{X}$ и регулярный полумарковский процесс $\varkappa(t)$ (ПМП) $\varkappa(t)$, построенный по процессу марковского восстановления $\{x_n, \theta_n;\ n \geqslant 0\}$ с полумарковским ядром $Q(x, A, t)$, причем $P(x, A) = Q(x, A, +\infty)$ — переходные вероятности вложенной цепи Маркова $\{x_n;\ n \geqslant 0\}$, $G_x(t) = Q(x, X, t)$ — распределение времен пребывания в состояниях, $x \in X$, $A \in \mathfrak{X}$ $t \geqslant 0$ [3].

На сепарабельном банаховом пространстве B рассмотрим семейство $\{\Gamma_x^\varepsilon(s, t);\ x \in X;\ s, t \geqslant 0;\ \varepsilon > 0\}$ сильно непрерывных сжимающих полугрупп операторов: $\Gamma_x^\varepsilon(s, s) = I$ — единичный оператор, $\forall x \in X$, $s \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$,

$$\Gamma_x^\varepsilon(s, u)\,\Gamma_x^\varepsilon(u, t) = \Gamma_x^\varepsilon(s, t), \qquad s \leqslant u \leqslant t,\ \forall x \in X,$$

и соответствующую этому семейству совокупность производящих операторов $\{\Gamma^\varepsilon(s, x);\ x \in X;\ s \geqslant 0;\ \varepsilon > 0\}$ с областью определения B_0, не зависящей от x и s, и плотной в B.

Неоднородный ПМСЭ в схеме серий, построенной по ПМП $\varkappa(t/\varepsilon)$ и семейству $\{\Gamma_x^\varepsilon(s, t);\ x \in X;\ s, t \geqslant 0;\ \varepsilon > 0\}$ называется

$$W_\varepsilon(s, s + t) := \Gamma_{x_0}^\varepsilon(s, s + \varepsilon\tau_1)\,\Gamma_{x_1}^\varepsilon(s + \varepsilon\tau_1, s + \varepsilon\tau_2) \ldots$$

$$\dots \Gamma^{\varepsilon}_{\varkappa(t/\varepsilon^2)}(s + \varepsilon\tau(t/\varepsilon^2), s + t/\varepsilon), \tag{1}$$

где $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k$, $\tau(t) = \tau_{\nu(t)}$, $\nu(t) = \max\{n : \tau_n \leqslant t\}$.

2. **ЦПТ для неоднородных ПМСЭ в схеме серий.** Предположим, что выполнены следующие условия.

А. Операторы $\{\Gamma^{\varepsilon}(s, x);\ x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ допускают асимптотическое разложение вида $\Gamma^{\varepsilon}(s, x) f = \Gamma_1(s, x) f + \varepsilon\Gamma_2(s, x) f + o_{s,x}(\varepsilon) f$ при $\varepsilon \to 0$, где $f \in B_0$ — плотная в B и не зависящая от x и s общая область определения операторов $\Gamma_i(s, x)$, $i = 1, 2$; $o_{s,x}(\varepsilon)$ понимается в сильном смысле равномерно по x и s.

Б. $\{x_n;\ n \geqslant 0\}$ имеет один эргодический класс X со стационарным распределением $\rho(A)$, $A \in \mathfrak{X}$.

В. Первый $m(x)$ и второй $m_2(x)$ моменты $G_x(t)$ равномерно ограничены по x.

Г. Выполняется условие баланса: $\forall f(z, s) \in B_0 \times C^1(R_+)$:

$$\int_X \rho(dx)\, m(x) \left[\Gamma_1(s, x) + \frac{d}{ds}\right] f(z, s) = 0. \tag{2}$$

Оператор $\Gamma_1(s, x)$ действует по переменной z.

Пусть

$$\mathcal{M} := \left\{ f(z, s) : f(z, s) \in B_0 \times \mathbb{C}^3(R_+) : \int_X \rho(dx)\, m(x) \left[\Gamma_1(s, x) + \frac{d}{ds}\right] f(z, s) = 0 \right\}.$$

Замечание Множество функций $\mathcal{M}$ в условии Г непусто. Приведем примеры. 1. $\Gamma_1(s, x) = v(z, s, x)\, d/dz$. Тогда (2) в условии Г имеет вид $\hat{v}(z, s) \frac{d}{dz} f + \frac{d}{ds} f = 0$, где $\hat{v}(z, s) = \int_X \rho(dx)/m(x)\, v(z, s, x)/m$, $m = \int_X \rho(dx)\, m(x)$, а данное уравнение имеет нетривиальные решения [4].

2. $\Gamma_1(s, x) = \gamma_x(s)\,\Gamma$, где Γ — замкнутый оператор, порождающий полугруппу, $\gamma_x(s)$ — измеримая и ограниченная фунция, не равная нулю. В этом случае уравнение (2) имеет вид $\hat{\gamma}^{(s)}\Gamma f(z, s) + \frac{d}{ds} f(z, s) = 0$, где

$$\hat{\gamma}^{(s)} = \int_X \rho(dx)\, m(x)\, \gamma_x(s)/m. \tag{3}$$

Его решение представляется в виде

$$f(z, s) = \exp\left\{-\Gamma \int_0^s \hat{\gamma}(u)\, du\right\} \varphi(z),\ \ \varphi(z) = f(z, 0). \tag{4}$$

Значит, уравнение (2) имеет решение (4).

Решение (2) формально можно записать в виде

$$f(z, s) = \exp\left\{-\int_0^s \hat{\Gamma}(u)\, du\right\} \varphi(z),$$

$$\hat{\Gamma}(u) = \int_X \rho(dx)\, m(x)\, \Gamma_1(u, x)/m,\ \ \varphi(z) = f(z, 0),$$

при условии, что замыкание $\int_0^s \Gamma(u)\, du$ порождает полугруппу при каждом $s \geqslant 0$.

В общем случае при изучении решения уравнения $dx/ds = A(s)\, x$ предполагается, что $\forall s$ оператор $A(s)$ линейный, замкнутый и имеет плотную в B область определения [5—7]. Детально на этом мы здесь не останавливаемся, так как все вопросы, связанные с решением таких уравнений, изложены в работах [5, с. 579—587; 6, с. 231—240; 7, с. 292—295].

Теорема. *Если выполнены условия А — Г, то* $\forall f_x(z, s) \in \mathcal{M}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda t} M_x [W_\varepsilon(s, s+t) f_{\varkappa(t/\varepsilon^2)}(z, s)]\, dt = [\lambda I - m^{-1} L(s)]^{-1} \hat{f}(z, s),$$

где

$$L(s) = \int_X \rho(dx)\, m(x)\left[\Gamma_1(s, x) + \frac{d}{ds}\right] R_0 m(x)\left[\Gamma_1(s, x) + \frac{d}{ds}\right] +$$

$$+\int_X \rho(dx)\, m_2(x)\,\Gamma_1(s, x)\frac{d}{ds} + \int_X \rho(dx)\, m(x)\,\Gamma_2(s, x) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_X \rho(dx)\, m_2(x)\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{2}\int_X \rho(dx)\, m_2(x)\,\Gamma_1^2(s, x),$$

$$\hat{f}(z, s) = \int_X \rho(dx)\, m(x) f_x(z, s)/m.$$

Доказательство. Для преобразований Лапласа от усредненной неоднородной ПМСЭ

$$\tilde{\omega}_\varepsilon(z, s, \lambda, x) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} M_x [W_\varepsilon(s, s+t) f_{\varkappa(t/\varepsilon^2)}(z, s)]\, dt$$

строим уравнение марковского восстановления:

$$\tilde{\omega}_\varepsilon(z, s, \lambda, x) - \int_X\int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon^2 v} Q(x, dy, dv)\,\Gamma_x^\varepsilon(s, s+\varepsilon v)\,\tilde{\omega}_\varepsilon(z, s+\varepsilon v, \lambda, y) =$$

$$= \varepsilon^2\int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon^2 v}\overline{G}_x(v)\,\Gamma_x^\varepsilon(s, s+\varepsilon v) f_x(z, s)\, dv. \tag{5}$$

Находим асимптотическое разложение уравнения (5):

$$\Big[I - P - \varepsilon\left(m(x)\,\Gamma_1(s, x) P + m(x) P\frac{d}{ds}\right) + \varepsilon^2\big(\lambda m(x) P - m(x)\,\Gamma_2(s, x) P -$$

$$-\frac{1}{2} m_2(x)\,\Gamma_1^2(s, x) P - m_2(x)\,\Gamma_1(s, x) P\frac{d}{ds} - \frac{1}{2} m_2(x) P\frac{d^2}{ds^2}\Big) +$$

$$+ o_{s,x}(\varepsilon^2)\Big]\tilde{\omega}_\varepsilon(z, s, \lambda, x) = \varepsilon^2 [m(x) f_x(z, s) + O_{s,x}(\varepsilon)].$$

Используя теорему обращения операторов, возмущенных на спектре (3) и учитывая условие Г, получаем для $f \in \mathcal{M}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\Big[I - P - \varepsilon\left(m(x)\,\Gamma_1(s, x) P + m(x) P\frac{d}{ds}\right) +$$

$$+\varepsilon^2\Big(\lambda m(x) P - m(x)\,\Gamma_2(s, x) P - \frac{1}{2} m_2(x)\,\Gamma_1^2(s, x) P -$$

$$- m_2(x)\,\Gamma_1(s, x) P\frac{d}{ds} - \frac{1}{2} m_2(x) P\frac{d^2}{ds^2}\Big) + o_{s,x}(\varepsilon^2)\Big]^{-1} f =$$

$$= [\lambda I - m^{-1} L(s)]^{-1}\,\Pi f,$$

где $\Pi f_x(z, s) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_X \rho(dx) f_x(z, s)\, \mathbf{1}(x)$, $\mathbf{1}(x) \equiv 1$, $\forall x \in X$.

3. Ц П Т в схеме фазового усреднения для неоднородных ПМСЭ в схеме серий. В данном случае ПМП рассматривается в схеме серий $\varkappa_\varepsilon(t)$, причем $Q_\varepsilon(x, A, t) = P_\varepsilon(x, A) G_x(t)$ — полумарковское ядро, $P_\varepsilon(x, A)$ — переходные вероятности возмущенной цепи Маркова $\{x_n^\varepsilon;\ n \geqslant 0\}$, $P_\varepsilon(x, A) = P(x, A) + \varepsilon B(x, A)$ [2], $G_x(t)$ — распределения времен пребывания в состояниях, $x \in X$, $t \geqslant 0$.

Неоднородный ПМСЭ, построенный по $\varkappa_\varepsilon(t)$ и семейству $\{\Gamma_x^\varepsilon(s, t);\ x \in X;\ s, t \geqslant 0;\ \varepsilon > 0\}$ в шкале времени t/ε^2 называется $W^\varepsilon(s, s+t) := \Gamma_{x_0^\varepsilon}^\varepsilon(s, s + \varepsilon\tau_1)\Gamma_{x_1^\varepsilon}^\varepsilon(s + \varepsilon\tau_1, s + \varepsilon\tau_2) \ldots \Gamma_{\varkappa_\varepsilon(t/\varepsilon^2)}^\varepsilon(s + \varepsilon\tau(t/\varepsilon^2), s + t/\varepsilon)$.

Предположим, что выполняются условия:

Д. Фазовое пространство X допускает эргодическую декомпозицию

$$X = \bigcup_{v \in V} X_v,\ X_u \cap X_v = \varnothing,\ u \neq v,\ \forall v \in V\ X_v \in \mathfrak{X},\ \forall T \in \mathcal{V}\colon X_T = \bigcup_{v \in T} X_v \in \mathfrak{X},$$

где $(V, \mathcal{V})$ — измеримое пространство с σ-алгеброй $\mathcal{V}$, содержащей одноточечные множества, причем $\hat{v}(x) = v \Leftrightarrow x \in X_v$, $\hat{v}(\cdot)$ — функция укрупнения.

Е. Переходные вероятности невозмущенной цепи Маркова $\{x_n^0;\ n \geqslant 0\}$ — $\{P(x, A);\ x \in X,\ A \in \mathfrak{X}\}$ — согласованы с расщеплением X (см. условие Д): $P(x, X_v) = \begin{cases} 1, & x \in X_v, \\ 0, & x \bar{\in} X_v, \end{cases}$ причем $\{x_n^0;\ n \geqslant 0\}$ равномерно эргодическая в каждом классе X_v со стационарным распределением $\rho_v(A)$, $A \in \mathfrak{X}$, $v \in V$.

Ж. $b(v) = -\int\limits_{X_v} \rho_v(dx) B(x, X_v) > 0$, $v \in V$, $b(v, \Delta) = \int\limits_{X_v} \rho_v(dx) B(x, X_\Delta) > 0$, $v \bar{\in} \Delta$, $\Delta \in \mathcal{V}$.

З. ПМП $\varkappa_\varepsilon(t/\varepsilon^2)$ допускает укрупнение до однородного скачкообразного эргодического марковского процесса $\breve{\varkappa}(t)$ в фазовом пространстве $(V, \mathcal{V})$ (см. условие Д) [3] с производящим оператором $\Pi B R_0 B \Pi$, где B — оператор, порожденный ядром $B(x, A)$; R_0 — потенциал цепи $\{x_n^0;\ n \geqslant 0\}$; Π — проектор, порожденный $\rho_v(\cdot)$. В дальнейшем везде рассматриваются функции $f_x(z, s) : f_x(z, s) \in b(X) \times B_0 \times \mathbb{C}^3(R)$, где $b(X)$ — измеримые и ограниченные функции по x.

И. $\forall \hat{f}_v(z, s) \in [\Pi b(X)] \times B_0 \times \mathbb{C}^3(R)$ $\Pi B \hat{f}_v(z, s) = 0$, $\forall z, s$.

Пусть $\mathcal{N} := \{\hat{f}_v(z, s) : \hat{f}_v(z, s) \in [\Pi b(X)] \times B_0 \times \mathbb{C}^3(R)\colon\ \Pi \hat{B} f_v(z, s) = 0\}$.

Замечание. Множество $\mathcal{N}$ непусто, так как по условию З $\breve{\varkappa}(t)$ — эргодический и если $\pi(\cdot)$ — его стационарная мера, то функция $\tilde{f}(\cdot, \cdot) := \int\limits_V \pi(dv) \hat{f}_v(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет уравнению $\Lambda(\hat{P} - I)\tilde{f} = 0$, где $\Lambda(\hat{P} - I) = \Pi B$; Λ — оператор умножения на $b(v)/m(v)$, $\hat{P}$ — оператор, порожденный ядром $\hat{P}(v, \Delta) = b(v, \Delta)/b(v)$ (см. условие Ж), $m(v) = \int\limits_{X_v} \rho_v(dx) m(x)$.

Пусть

$$\mathcal{R} := \{f_x(z, s) : f_x(z, s) \in b(X) \times B_0 \times \mathbb{C}^3(R)\colon$$

$$\int\limits_{X_v} \rho_v(dx) m(x) \left[\Gamma_1(s, x) + \frac{d}{ds}\right] f_x(z, s) = 0,\ \forall v \in V,\ x \in X\}.$$

Теорема 2. *Если выполнены условия В п. 1, Д — И п. 2, и* $f_x(z, s) \in \mathcal{N} \times \mathcal{R}$, *то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} M_x [W^\varepsilon(s, s+t) f_{\varkappa_\varepsilon(t/\varepsilon^2)}(z, s)]\, dt =$$

$$= [\lambda I - m^{-1}(v)\,\tilde{L}(s, v)]^{-1}\,\hat{f}_v(z, s) \qquad \forall x \in X_v,$$

где

$$\hat{L}(s, v) = \int\limits_{X_v} \rho_v(dx)\, L(s, x),$$

$$L(s, x) = m(x)\,\Gamma_1(s, x)\,R_0 m(x)\,\Gamma_1(s, x) + m(x)\,\Gamma_2(s, x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\, m_2(x)\,\Gamma_1^2(s, x) + [m(x)\,\Gamma_1(s, x)\,R_0 + m_2(x)\,\Gamma_1(s, x) + BR_0 + R_0 B]\,\frac{d}{ds} +$$

$$+ BR_0 m(x)\,\Gamma_1(s, x) + m(x)\,\Gamma_1(s, x)\,R_0 B - BR_0 B + \frac{1}{2}\, m_2(x)\,\frac{d^2}{ds^2},$$

$$\hat{f}_v(z, s) = \int\limits_{X_v} \rho_v(dx)\, m(x)\, f_x(z, s)/m(v).$$

Доказательство. Для преобразований Лапласа от усредненной неоднородной ПМСЭ

$$\tilde{\omega}^{\varepsilon}(z, s, \lambda, x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} M_x\,[W^{\varepsilon}(s, s + t)\, f_{\varkappa_{\varepsilon}(t/\varepsilon^2)}(z, s)]\, dt$$

строим уравнение марковского восстановления:

$$\tilde{\omega}^{\varepsilon}(z, s, \lambda, x) - \int\limits_X \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda\varepsilon^2 u} Q_{\varepsilon}(x, dy, du)\,\Gamma_x^{\varepsilon}(s, s + \varepsilon u)\,\tilde{\omega}^{\varepsilon}(z, s + \varepsilon u, \lambda, y) =$$

$$= \varepsilon^2 \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda\varepsilon^2 u}\,\overline{G}_x(u)\;\Gamma_x^{\varepsilon}(s, s + \varepsilon u)\, f_x(z, s)\, du. \tag{6}$$

Находим асимптотическое разложение уравнения (6)

$$\Big[I - P - \varepsilon\left(m(x)\,\Gamma_1(s, x)\,P + m(x)\,P\,\frac{d}{ds} + B\right) + \varepsilon^2\Big(\lambda m(x)\,P -$$

$$- m(X)\,\Gamma_2(s, x)\,P - \frac{1}{2}\, m_2(x)\,\Gamma_1^2(s, x)\,P - m_2(x)\,\Gamma_1(s, x)\,P\,\frac{d}{ds} -$$

$$- m_2(x)\,P\,\frac{d^2}{ds^2}\Big) + o(\varepsilon^2)\Big]\,\tilde{\omega}^{\varepsilon}(z, s, \lambda, x) = \varepsilon^2\,[m(x)\, f_x(z, s) + O(\varepsilon)]. \tag{7}$$

Используя теорему обращения операторов, возмущенных на спектре [3], учитывая то, что $\Lambda(\hat{P} - I)\,\mathcal{N} = 0$ (условие 3)) и условие баланса (2), получаем для $f \in \mathcal{N} \times \mathcal{R}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \Big[I - P - \varepsilon\left(m(x)\,\Gamma_1(s, x)\,P + m(x)\,P\,\frac{d}{ds} + B\right) + \varepsilon^2\Big(\lambda m(x)\,P -$$

$$- m(x)\,\Gamma_2(s, x)\,P - \frac{1}{2}\, m_2(x)\,\Gamma_1^2(s, x)\,P - m_2(x)\,\Gamma_1(s, x)\,P\,\frac{d}{ds} -$$

$$- \frac{1}{2}\, m_2(x)\,P\,\frac{d^2}{ds^2}\Big) + O(\varepsilon^2)\Big]^{-1} f = [\lambda I - m^{-1}(v)\,\hat{L}(s, v)]^{-1}\,\Pi f,$$

что заканчивает доказательство.

3. Применение к процессу переноса. Пусть $Z_{\varepsilon}(s, t)$ — положение частицы в момент времени $s + t$ описывается уравнением

$$Z_{\varepsilon}(s, t) = z + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t v(Z_{\varepsilon}(s, u),\; s + u/\varepsilon,\; \varkappa(u/\varepsilon^2))\, du, \tag{8}$$

где $v(z, s, x): R\times R_+\times X\to R$ — измеримая и ограниченная функция по x, имеющая ограниченные и непрерывные производные $v'_z(z, s, x)$ по z и $v'_s(z,s,x)$ по s $\forall x\in X$. Множество $\mathcal{M}$ в данном случае имеет вид $\mathcal{M} = \left\{f(z, s): f(z, s)\in \mathbb{C}^3(R)\times\mathbb{C}^2(R_+): \hat{v}(z, s)\frac{\partial}{\partial z}f(z, s) + m\frac{\partial}{\partial s}f(z, s) = 0\right\}$, где $\hat{v}(z, s) = \int\limits_X \rho(dx)\, m(x)\, v(z, s, x)$, $m = \int\limits_X \rho(dx)\, m(x)$.

Следствие 1. *Если выполнены условия А, Б, п. 1 и* $f_x(z,s)\in\mathcal{M}$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}M_x[f_{\varkappa(t/\varepsilon^2)}(Z_\varepsilon(s, t), s)]\,dt = [\lambda I - m^{-1}\hat{L}^T(s, z)]^{-1}\hat{f}(z, s),$$

где

$$\hat{L}^T(s, z) = \int\limits_X \rho(dx)\, L^T(s, z, x),$$

$$L^T(s, z, x) = (m(x)\, v(z, s, x)\, R_0 m(x)\, v(z, s, x) + \frac{1}{2}m_2(x)\, v^2(z, s, x)\frac{\partial^2}{\partial z^2} +$$

$$+\left(m(x)\, v(z, s, x)\, R_0 m(x)\, v'_z(z, s, x) + \frac{1}{2}m_2(x)\, v(z, s, x)\, v'_z(z, s, x)\right)\frac{\partial}{\partial z} +$$

$$+(m(x)\, v(z, s, x)\, R_0 m(x) + m_2(x)\, v(z, s, x))\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial z} +$$

$$+(m(x)\, R_0 m(x)\, v'_s(z, s, x))\frac{\partial}{\partial s} +$$

$$+\left(m(x)\, R_0 m(x)\, v(z, s, x) + \frac{1}{2}m_2(x) + m(x)\, R_0 m(x)\right)\frac{\partial^2}{\partial s^2}. \tag{9}$$

Доказательство. Следует из теоремы 1, определения ПМСЭ $W_\varepsilon(s, s+t)$ и того, что $\hat{\Gamma}(s)$ в этом случае имеет вид

$$\hat{\Gamma}(s) = \left[\int\limits_X \rho(dx)\, m(x)\, v(z, s, x)/m\right]\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \Gamma_2(s, x)\equiv 0.$$

Пусть теперь $Z^\varepsilon(s,t)$ описывается следующим уравнением:

$$Z^\varepsilon(s, t) = z + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t v(Z^\varepsilon(s, u),\ s + u/\varepsilon^2,\ \varkappa_\varepsilon(u(\varepsilon^2))\,du,$$

где $v(z, s, x)$ определена в (8), а $\varkappa_\varepsilon(u(\varepsilon^2))$ — ПМП, определенный в п. 2. Множество $\mathcal{R}$ в данном случае имеет вид

$$\mathcal{R} = \Big\{f_x(z, s):\ f_x(z, s)\in b(X)\times\mathbb{C}^3(R)\times\mathbb{C}^3(R_+):$$

$$\hat{v}(z, s, v)\frac{\partial}{\partial z}f_x(z, s) + \hat{m}(v)\frac{\partial}{\partial s}f_x(z, s) = 0\Big\},$$

где $\hat{v}(z, s, v) = \int\limits_{X_v}\rho_v(dx)\, m(x)\, v(z, s, x)$, $\hat{m}(v) = \int\limits_{X_v}\rho_v(dx)\, m(x)$.

Следствие 2. *Если выполнены условия Б п.* 1, *Д — З п.* 2, *и* $f_x(z, s)\in\mathcal{N}\times\mathcal{R}$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}M_x[f_{\varkappa_\varepsilon(t/\varepsilon^2)}(Z^\varepsilon(s, t), s)]\,dt = [\lambda I - \hat{m}^{-1}(v)\,\hat{L}^T(s, v)]^{-1}\hat{f}_v(z, s),$$

где

$$\hat{L}^T(s, v) = \int\limits_{X_v} \rho_v(dx) L_T(s, x) + \Pi B R_0 B \Pi,$$

$$L_T(s, x) = L^T(s, x) + BR_0 m(x) v(z, s, x) \frac{\partial}{\partial z} + BR_0 \frac{\partial}{\partial s} +$$

$$+ m(x) v(z, s, x) R_0 B \frac{\partial}{\partial z} + R_0 B \frac{\partial}{\partial s},$$

$L^T(s, x)$ *определен в* (9).

Доказательство следует из теоремы 2, определения неоднородной ПМСЭ $W^\varepsilon(s, s+t)$ и того, что

$$\hat{\Gamma}(s, v) = \left[\int\limits_{X_v} \rho_v(dx) m(x) v(z, s, x) / \hat{m}(v) \right] \frac{\partial}{\partial z}.$$

1. *Королюк В. С., Свищук А. В.* ЦПТ для полумарковских случайных эволюций // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 3.— С. 300—304.
2. *Королюк В. С., Свищук А. В., Королюк В. В.* ЦПТ в схеме фазового укрупнения для ПМСЭ // Там же.— 1987.— **39**, № 3.— С. 314—319.
3. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 218 с.
4. *Степанов В. В.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Гостехтеоретиздат, 1952.— 468 с.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1967.— 624 с.
6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные операторы в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 464 с.
7. *Функциональный* анализ: Справочник / Под ред. С. Г. Крейна.— М. : Наука, 1972.— 544 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 24.04.88