УДК 531.36

С. П. Сосницкий

Об устойчивости неголономных систем Чаплыгина

При исследовании устойчивости равновесия неголономных систем [1, 2], особенно с помощью второго метода Ляпунова, последние иногда целесообразно интерпретировать как возмущенные голономные, сводя при некоторых естественных ограничениях результат действия неголономных связей к малым в окрестности исследуемого положения равновесия возмущениям. В соответствии с такой точкой зрения предложенный в [3] подход к исследованию устойчивости натуральных систем удается развить на случай неголономных систем Чаплыгина [2, 4].

1. Рассмотрим неголономную систему

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}\right)\delta q=0,\quad q\in D\subset R^n\times R^l, \tag{1}$$

$$\dot{q}_{n+i}=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q)\,\dot{q}_j,\quad i=\overline{1,l}, \tag{2}$$

$$L(q,\dot{q})=T_2(q,\dot{q})-\Pi(q)=\frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\,\dot{q}-\Pi(q),$$

где $L(q,\dot{q})$, $b_{ij}(q)\in C_q^2(D)$, квадратичная форма $\dot{q}^T A(0)\,\dot{q}$ положительно определена. Предположим, что лагранжиан L, а также коэффициенты $b_{ij}(q)$ не зависят от координат $q_{n+1},\dots,q_{n+l}$. Тогда, как известно [4], система (1), (2) сводится к уравнениям Чаплыгина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L^*}{\partial q_i}-\sum_{i=1}^{l}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n+i}}\right)^*\beta_{jm}^i\dot{q}_m=0,$$

$$\beta_{jm}^i=\partial b_{ij}/\partial q_m-\partial b_{im}/\partial q_j,\quad j,m=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где звездочка означает результат операции исключения соответственно из выражений L и $\partial L/\partial\dot{q}_{n+i}$ обобщеннных скоростей $\dot{q}_{n+i}$ с помощью уравнений связей (2). При этом лагранжиан L^*, в частности, имеет вид $L^*=T_2^*-\Pi=\frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T B(\bar{q})\,\dot{\bar{q}}-\Pi(\bar{q})$, $\dot{\bar{q}}^T=(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)$, $\bar{q}^T=(q_1,\dots,q_n)$, где квадратичная форма $T_2^*(0, \bar{\dot{q}})$ положительно определена, как следствие положительной определенности $T_2(0, \dot{q})$.

Поскольку связи (2) однородны по $\dot{q}$, а исходный лагранжиан L не зависит от t, то уравнения (3) допускают первый интеграл

$$T_2^* + \Pi = h = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Пусть точка $\bar{q} = 0$ является критической для функции $\Pi(\bar{q})$ и $\Pi(0) = 0$.

Полагая $\partial L^*/\partial\bar{\dot{q}} = p$ и опуская в дальнейшем для упрощения записи черточки над $\dot{q}$ и q, представляем уравнения (3) в виде

$$dq/dt = \partial H/\partial p, \quad dp/dt = -\partial H/\partial q + O(\|p\|^2), \tag{5}$$

$$H = \frac{1}{2} p^T B^{-1} p + \Pi = h = \mathrm{const}. \tag{6}$$

Наряду с (5) рассмотрим укороченную систему

$$dq/dt = \partial H/\partial p, \quad dp/dt = -\partial H/\partial q, \tag{7}$$

сохранив в ней прежние обозначения зависимых переменных q и p. Представляя соответствующую системе (7) функцию действия по Гамильтону в форме

$$S_1 = \int_0^t (p\dot{q} - H)\, d\tau, \tag{8}$$

аналогично работе [3] подставим в подынтегральное выражение равенства (8) вместо q и p величины

$$q = q(t, q_0, p_0), \quad p = p(t, q_0, p_0), \quad q_0 = q(t = 0), \quad p_0 = p(t = 0), \tag{9}$$

которые являются общими решениями системы (7), и проинтегрируем. В результате получим

$$S_1 = \tilde{S}_1(\tau, q_0, p_0)\big|_0^t \in C_{tq_0p_0}^{(1,1,1)}(I \times s_\delta), \tag{10}$$

где $\tilde{S}_1(t, q_0, p_0)$ соответствует значению функции $\tilde{S}_1$ в текущий момент времени t, $\tilde{S}_1(0, q_0, p_0) = \tilde{S}_1^0$ — в момент $\tau = 0$, I $(I \subseteq R)$ — максимальный интервал, на котором решение $(q(t), p(t))$ принадлежит окрестности $s_\varepsilon = \{(q, p) \in D \times R^n, \|q \oplus p\| < \varepsilon\}$ при условии, что $(q_0, p_0) \in s_\delta \subset s_\varepsilon$. Обращая затем соотношения (9) и подставляя результат обращения в (10), находим

$$S_1 = \tilde{S}_1^*(\tau, q, p)\big|_0^t \in C_{tqp}^{(1,1,1)}(I \times s_\varepsilon), \quad S^*_{1_{\tau=0}} = \tilde{S}_1^0. \tag{11}$$

Предположив, что в точке $q = 0$ функция $\Pi(q)$ не имеет минимума, определим множества $\omega = \{q \in s_\varepsilon^* = \{q \in D^*, \|q\| < \varepsilon\} : \Pi(q) < 0\}$, $\Omega = \{(q, p) \in s_\varepsilon : H = 0\}$.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$S_1^*(\tau, q, -p) = -S_1^*(\tau, q, p) \;\forall\; (q, p) \subset \Omega, \tag{12}$$

где (q, p) — *решение системы* (7).

Доказательство непосредственно следует из представления действия S_1 в виде

$$S_1 = \int_0^t p\,dq - Ht = \int_0^t p\,dq \quad \forall\; (q, p) \subset \Omega.$$

Следствие 1. *Пусть* $G = \{(q, p) \in s_\varepsilon : \partial H/\partial p = 0, \quad \partial H/\partial q = 0\}$ — *множество критических точек функции* H *в окрестности* s_ε. *Тогда на основании* (11), (12) $S_1^*(\tau, q, 0) = 0 \;\forall\; (q, 0) \in G \cap \Omega$.

С л е д с т в и е 2. *На множестве* Ω функция $S_1^*(\tau, q, p)$ *принимает значения разных знаков.*

Л е м м а 2. *На движениях системы* (7), *принадлежащих множеству* Ω, $\partial S_1/\partial t = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим производную от функции S_1 по векторному полю, определяемому вспомогательной системой

$$dq/dt = \partial H^*/\partial p, \quad dp/dt = -\partial H^*/\partial q, \quad H^* = -H, \tag{13}$$

получающейся из системы (7) при замене в ней p на $(-p)$. В результате имеем

$$\left.\frac{dS_1}{dt}\right|_{(q,p)\in(13)} = \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\partial S_1}{\partial q}\frac{\partial H^*}{\partial p} - \frac{\partial S_1}{\partial p}\frac{\partial H^*}{\partial q} = 2\frac{\partial S_1}{\partial t} -$$

$$-\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\partial S_1}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial S_1}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 2\frac{\partial S_1}{\partial t} - \tilde{L}, \quad \tilde{L} = \frac{1}{2}p^TB^{-1}p - \Pi. \tag{14}$$

С другой стороны, так как действие по Гамильтону, соответствующее системе (13), равно $S_2 = \int\limits_0^t (p\dot{q} - H^*)\,d\tau = -\int\limits_0^t \tilde{L}d\tau$ и, следовательно, $S_2|_{(q,p)\in(13)} = -S_1|_{(q,p)\in(7)}$, то отсюда, учитывая лемму 1, получаем равенство

$$S_2(t, q, p)|_{(q,p)\in(13)} = S_1(t, q, -p)|_{(q,p)\in(7)} = S_1(t, q, p)|_{(q,p)\in(13)}$$

$$\forall\,(q, p) \subset \Omega, \tag{15}$$

на основании которого

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\partial S_1}{\partial q}\frac{\partial H^*}{\partial p} - \frac{\partial S_1}{\partial p}\left.\frac{\partial H^*}{\partial q}\right|_{(q,p)\in(13)} = \frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial q}\frac{\partial H^*}{\partial p} -$$

$$-\frac{\partial S_2}{\partial p}\left.\frac{\partial H^*}{\partial q}\right|_{(q,p)\in(13)} = \left.\frac{dS_2}{dt}\right|_{(q,p)\in(13)} = -\tilde{L} \quad \forall\,(q, p) \subset \Omega. \tag{16}$$

Сопоставляя (14) и (16), с учетом (12) и (15) убеждаемся в справедливости леммы.

Л е м м а 3. *Положение равновесия* $q = p = 0$ *системы* (7) *является критической точкой функции* S_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно равенствам (8)—(11), учитывая известные теоремы о предельном переходе под знаком интеграла [5, с. 539], имеем

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_0} = \int\limits_0^t \left(\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial q_0} + \frac{\partial L}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q_0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q_0}\right)d\tau,$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial p_0} = \int\limits_0^t \left(\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p_0} + \frac{\partial L}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial p_0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p_0}\right)d\tau. \tag{17}$$

Поскольку

$$\partial L/\partial q = \partial(p\dot{q} - H)/\partial q = -\partial H/\partial q, \quad \partial L/\partial\dot{q} = p,$$

$$\partial L/\partial p = \partial(p\dot{q} - H)/\partial p = \dot{q} - \partial H/\partial p = 0,$$

то из равенств (17) получаем

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_0} = \int\limits_0^t \left(-\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial q_0} + p\,\frac{\partial(B^{-1}p)}{\partial q_0}\right)d\tau,$$

(18)

$$\frac{\partial S_1}{\partial p_0} = \int\limits_0^t \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_0} + p \frac{\partial (B^{-1} p)}{\partial p_0} \right) d\tau.$$

Замечая, что множество G является инвариантным для системы (7), а равенства $\partial H/\partial p = 0$ и $p = 0$ эквивалентны $\forall (q, p) \in G$, на основании (18) имеем

$$\partial S_1/\partial q_0 = 0, \quad \partial S_1/\partial p_0 = 0 \quad \forall (q_0, p_0) \in G. \tag{19}$$

С другой стороны, учитывая (9), (11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial q_0} &= \frac{\partial S_1^*}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial q_0} + \frac{\partial S_1^*}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q_0} - \frac{\partial S_1^0}{\partial q_0}, \\ \frac{\partial S_1}{\partial p_0} &= \frac{\partial S_1^*}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_0} + \frac{\partial S_1^*}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\partial S_1^0}{\partial p_0}. \end{aligned} \tag{20}$$

Так как согласно (8), (10) $\| \partial \tilde{S}_1^0/\partial q_0, \partial \tilde{S}_1^0/\partial p_0 \| = O(\| q_0 \oplus p_0 \|)$, то отсюда заключаем, что

$$\partial \tilde{S}_1^0/\partial q_0 = \partial \tilde{S}_1^0/\partial p_0 |_{q_0 = p_0 = 0} = 0. \tag{21}$$

На основании (11) $\partial S_1^*/\partial q = \partial S_1/\partial q$, $\partial S_1^*/\partial p = \partial S_1/\partial p$, поэтому представляя (20) в виде

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial S_1}{\partial q_0} \\ \dfrac{\partial S_1}{\partial p_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial q_0} & \dfrac{\partial q}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial p}{\partial q_0} & \dfrac{\partial p}{\partial p_0} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial S_1}{\partial q} \\ \dfrac{\partial S_1}{\partial p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial S_1^0}{\partial q_0} \\ \dfrac{\partial S_1^0}{\partial p_0} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где первый сомножитель в правой части (22) является транспонированной матрицей Якоби $2n$-го порядка, согласно (19), (21), (22) и равенству

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial q_0} & \dfrac{\partial q}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial p}{\partial q_0} & \dfrac{\partial p}{\partial p_0} \end{pmatrix}^T = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial q_0} & \dfrac{\partial q}{\partial p_0} \\ \dfrac{\partial p}{\partial q_0} & \dfrac{\partial p}{\partial p_0} \end{pmatrix} = 1$$

получаем $\partial S_1/\partial q = \partial S_1/\partial p |_{q=p=0} = 0$. Поскольку $\{0, 0\} \in \Omega$, то с учетом леммы 2 отсюда следует вывод о справедливости леммы 3.

Обозначим в дальнейшем через S значение функции S_1 на решениях системы (5), т. е. $S_1(t, q, p)_{(q,p)\in(5)} = S(t, q, p)$. Так как множества уровня интеграла $H(q, p)$ для систем (5), (7) совпадают, то вполне естественно использовать ниже, по аналогии с [3], функцию S для исследования устойчивости системы (5).

Теорема 1. *Пусть при сколь угодно малом* $\varepsilon > 0$ $(D^*(a) \supset \bar{s}_\varepsilon^*)$ *выполняются условия*: 1) $\omega \neq \varnothing$, 2) $0 \in \partial\omega$, 3) $\partial\Pi/\partial q \neq 0$ $\forall q \in \mathbf{s} \setminus \{0\}$. *Тогда положение равновесия* $q = p = 0$ *системы* (5) *неустойчиво и существуют решения, асимптотически стремящиеся к точке* $q = p = 0$ *при* $t \to \infty$ *и* $t \to -\infty$.

Доказательство. Обозначив через Λ^+ множество положительных предельных точек траекторий системы (5), будем различать случаи: 1) $\Lambda^+ \cap \Omega \setminus \{0, 0\} = \Lambda^+_{\Omega \setminus \{0,0\}} \neq \varnothing$, 2) $\Lambda^+_{\Omega \setminus \{0,0\}} = \varnothing$.

Пусть $\Lambda^+_{\Omega \setminus \{0,0\}} \neq \varnothing$. Поскольку $\Lambda^+_{\Omega \setminus \{0,0\}}$ как множество положительных предельных точек траекторий системы (5), принадлежащих $\Omega \setminus \{0, 0\}$, компактно, то оно содержит минимальное множество $\Gamma \subset \Lambda^+_{\Omega \setminus \{0,0\}}$ [6, с. 401], причем отличное от точки покоя согласно условию 3 теоремы.

Множество Γ также компактно, так как является замкнутым подмножеством множества $\Lambda^{+}_{\Omega\setminus\{0,0\}}$. Следовательно, на основании теоремы Биркгофа [6, с. 402] любая траектория, принадлежащая Γ, рекуррентна и, стало быть, устойчива по Пуассону [6, с. 363], т. е. существует такая последовательность $\{t_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \| q(t_k, q_0, p_0) \oplus p(t_k, q_0, p_0) \| = \| q_0 \oplus p_0 \|$ $\forall\, (q_0, p_0) \in \Gamma$.

Рассмотрим производную по t функции S по векторному полю, определяемому системой (5). В результате получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial S}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + $$
$$+ \frac{\partial S}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q} + O(\| p \|^2)\right) = \tilde{L} + O(\| p \|^2)\,\partial S/\partial p. \tag{23}$$

Представив равенство (23) в виде

$$dS = \frac{\partial S}{dt}dt + \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial p}dp = (\tilde{L} + O(\| p \|^2)\,\partial S/\partial p)\,dt, \tag{24}$$

проинтегрируем его вдоль отрезка положительной полутраектории $\gamma^{+}_{0,k} \subset \Gamma$ ($\gamma^{+}_{0,k} = \{q(t), p(t) : t \in [0, t_k] \subset I^{+} = [0, \infty[, t_k \in \{t_k\}\}$) системы (5). Замечая, что на основании лемм 2, 3 $\partial S/\partial p = o(1)$ $\forall\, (q, p) \subset \Omega$, в итоге получаем

$$\int\limits_{\gamma^{+}_{0,k}} dS = \int\limits_{0}^{t_k} [p^T B^{-1} p + O(\| p \|^2)\, o(1)]\,dt. \tag{25}$$

Переходя к вычислениям в обеих частях равенства (25), заметим, что функция $S(t, q, p)$ на фазовых траекториях системы (5), принадлежащих окрестности s_ε, в общем случае может быть неограниченной как сверху, так и снизу, однако свои предельные значения $S = \pm\infty$ (что может иметь место согласно (11) лишь при $|t| = \infty$) в данной окрестности она не принимает. Действительно, согласно следствию 1 из леммы 1 в рассматриваемом положении равновесия $S(t, 0, 0) = 0$. Любую же из точек $(q, p) \in s_\varepsilon \setminus \{0, 0\}$ фазового пространства системы (5), учитывая условие 3 теоремы, можно окружить такой окрестностью $s_\eta \subset s_\varepsilon$, что изображающая точка соответствующей фазовой траектории будет находиться в ней конечное время, и, следовательно, ни одному из множества значений S в области $s_\varepsilon \setminus \{0, 0\}$ нельзя отнести момент времени $|t| = \infty$. Таким образом, множество значений функции S на фазовых траекториях системы (5) в окрестности s_ε в условиях теоремы 1 не содержит бесконечно удаленных точек, и тем самым максимальный промежуток ее определения по t при $(q, p) \in s_\varepsilon$ можно ограничить рассматриваемым выше открытым множеством $I \subseteq R$. Последнее обстоятельство позволяет результат интегрирования левой части равенства (25) представить в виде

$$\int\limits_{\gamma^{+}_{0,k}} dS = S^*(t, q(t), p(t))\,\big|_0^{t_k},$$

откуда с учетом леммы 2 имеем

$$\int\limits_{\gamma^{+}_{0,k}} dS = S^*(q(t), p(t))\,\big|_0^{t_k}. \tag{26}$$

На основании (26) заключаем, что левая часть равенства (25) вследствие возвращаемости $\gamma^{+}_{0,k}$ стремится при $k \to \infty$ к нулю. Правая, поскольку соответствующее подынтегральное выражение при достаточно малом $\varepsilon > 0$ неотрицательно, причем $p^T B^{-1} p \not\equiv 0$, при $k \to \infty$ превышает некоторое малое положительное число. Таким образом, равенство (25) противоречиво, и, стало быть, предположение о том, что, $\Lambda^{+}_{\Omega\setminus\{0,0\}} \neq \varnothing$ неверно. В качестве следствия отсюда, в частности, вытекает неустойчивость рассматриваемого положения равновесия $q = p = 0$.

Итак, $\Lambda^{+}_{\Omega\setminus\{0,0\}} = \varnothing$, что позволяет предположить следующее: 1) система (5) допускает решение, стремящееся к точке $q = p = 0$ при $t \to \infty$; 2) все решения системы (5) с началом на $\Omega\setminus\{0, 0\}$ оставляют s_ε при $t \to \infty$. В первом случае в соответствии с обратимостью исходной системы (3) по отношению к t заключаем также о существовании решения, асимптотически стремящегося к точке $q = p = 0$ при $t \to -\infty$, и тем самым теорема доказана.

Пусть осуществляется вторая возможность, т. е. все решения системы (5), проходящие через $\Omega\setminus\{0, 0\}$, оставляют s_ε при $t \to \infty$. Следуя в данном случае схеме доказательства теоремы Красовского о грубой неустойчивости [7, с. 77] в интерпретации [3], заключаем о существовании траектории γ^-, примыкающей к точке $q = p = 0$ при $t \to -\infty$, что с учетом обратимости системы (3) эквивалентно доказательству теоремы 1.

Известно [7, с. 102], что существование решения системы (3), асимптотически стремящегося к положению равновесия при $t \to -\infty$, является признаком грубой неустойчивости последнего, которая не разрушается при достаточно малом возмущении системы. Природа малого возмущения при этом не столь существенна, оно даже может выводить систему из класса консервативных, для которых не существует интеграл энергии (4).

С л е д с т в и е [3]. *Изолированное положение равновесия натуральных систем неустойчиво, причем неустойчивость является грубой (вследствие существования асимптотических к исследуемому положению равновесия движений), если при исходных предположениях в отношении класса гладкости лагранжиана $L(q, \dot{q})$ потенциальная энергия $\Pi(q)$ в положении равновесия не имеет локального минимума.*

З а м е ч а н и е. Если система (5) содержит точки покоя на множестве $s_\varepsilon\setminus\Omega$, то функция S в данных точках достигает предельных значений $\pm\infty$ на замкнутой вещественной оси $\bar{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$, вследствие чего равенство (26) может не выполняться.

2. Предложенный выше подход к вопросу устойчивости систем (3) при некоторых дополнительных ограничениях допускает распространение на случай неизолированного исследуемого положения равновесия. Однако в данной ситуации в отличие от теоремы 1 не удается доказать существование движений, асимптотически стремящихся к рассматриваемому положению равновесия при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$.

Т е о р е м а 2. *Пусть при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ $(D^*(q) \supset \vec{s}^*_\varepsilon)$ выполняются условия 1, 2 теоремы 1 и, кроме того: 3′) $\partial\Pi/\partial q \neq 0$ $\forall q \in S^*_\varepsilon\setminus\partial\omega$. Тогда положение равновесия $q = p = 0$ системы (5) неустойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что исследуемое положение равновесия устойчиво. Тогда, поскольку исходная система (3) обратима, и, стало быть, система (5) допускает движения с противоположными направлениями вектора p, на основании следствия 2 леммы 1 непусто множество $\Omega^* = \{(q, p) \in \Omega : S^*(t, q, p) > 0,\ t \in I \cap I^+\} \neq \varnothing$. Множество Ω^* при достаточно малом $\varepsilon > 0$ согласно (23) и определению [8] с учетом соотношения $\partial S/\partial p = 0$ (1) $A(q, p) \subset \Omega$ является абсолютным сектором, и, таким образом, $\Lambda^+ \cap \Omega^* = \Lambda^+_{\Omega^*} \neq \varnothing$. Следовательно, непусто минимальное множество $\Gamma^* \subset \Lambda^+_{\Omega^*}$. Согласно следствию 1 леммы 1 и определению Ω^* множество Γ^* отлично от точки покоя и аналогично изложенному выше рекуррентно. Поэтому, следуя далее схеме доказательства теоремы 1 и рассматривая, в частности, равенство (25) на отрезке траектории $\gamma^+_{0,k} \subset \Gamma^*$ при $k \to \infty$, с учетом (26) приходим к противоречию, позволяющему заключить о справедливости теоремы 2.

С л е д с т в и е *Пусть в окрестности точки $q = 0$ функция $\Pi(q)$ является аналитической при сохранении остальных предположений в отношении класса гладкости лагранжиана L и коэффициентов $b_{ij}(q)$. Тогда* *положение равновесия $q = p = 0$ системы* (5) *неустойчиво, если в точке $q = 0$ потенциальная энергия $\Pi(q)$ не имеет локального минимума*

Действительно, в данном случае при достаточно малом $\varepsilon > 0$ все критические точки функции $\Pi(q)$ принадлежат множеству $\partial\omega \cap s_\varepsilon^*$ [9], и, стало быть, всегда выполняются условия одной из теорем 1, 2.

Если неголономные связи отсутствуют, то из доказанных теорем получаем критерии неустойчивости положения равновесия натуральных систем, представляющие самостоятельный интерес (см. [8], гл. III).

1. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика.— М.; Л.: ОНТИ, 1937.— 500 с.
2. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем.— М. : Наука, 1967.— 519 с.
3. *Сосницкий С. П.* Действие по Гамильтону как аналог функции Ляпунова для натуральных систем // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 2.— С. 215—220.
4. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды.— М. : Наука, 1976.— 495 с.
5. *Грауэрт Г., Либ И., Фишер В.* Дифференциальное и интегральное исчисление.— М. : Мир, 1971.— 680 с.
6. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949.— 550 с.
7. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М. : Физматгиз, 1959.— 211 с.
8. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М. : Мир, 1980.— 300 с.
9. *Souček J., Souček V.* Morse — Sard theorem for real-analytic functions // Comment. math. Univ. carol.— 1972.— **13**, N 1.— P. 45—51.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 18.11.87