УДК 517.937

В. П. Игумнов

О построении решений систем интегро-дифференциальных уравнений в виде рядов Ли

Теория рядов Ли, введенных в рассмотрение Софусом Ли, систематически изложена в работе [1]. Свое дальнейшее развитие теория рядов Ли получила в работах А. Н. Филатова (см., например, [2—5]). В работе [4] впервые дается распространение аппарата рядов Ли на интегро-дифференциальные уравнения. В этой работе вводится понятие квазиполиномиальных функций с интегральными операторами и, в частности, показывается их связь с представлением решений уравнений теории вязкоупругости.

В настоящей статье рассматриваются вопросы, связанные с вычислением коэффициентов рядов Ли при решении интегро-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу Коши

$$Y_j(0) = y_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$dY_j(t)/dt = f_j[t, Y_1(t), \ldots, Y_n(t)] + \int_0^t K_j[t, \tau, Y_1(\tau), \ldots, Y_n(\tau)]\, d\tau, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Пусть функции f_j и K_j разлагаются в сходящиеся ряды Маклорена. Введем в рассмотрение линейные дифференциальные операторы

$$D_t = \partial/\partial t, \quad D_\tau = \partial/\partial\tau,$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} \left\{ f_i[t, y_1(t), \ldots, y_n(t)] + \int_0^t K_i[t, \tau, y_1(\tau), \ldots, y_n(\tau)]\, d\tau \right\} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

и положим $D^* = D + D_\tau + D_t$. Тогда формальное решение задачи Коши (1), (2) определится следующими операторными рядами;

$$Y_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} (D^*)^\nu y_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3}$$

После выполнения всех дифференцирований и последующих вычислений при $\tau = t = 0$ ряды Ли (3) будут представлять собой обычные степенные ряды

$$Y_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(j)} t^\nu, \quad j = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Ряды (4) сходятся (см., например, [6]). В [6] указан интервал сходимости рядов (4). При отыскании итерированного оператора $(D^*)^\nu$ будем учитывать, что не все слагаемые, входящие в определение D^*, являются перестановочными операторами. Легко, например, проверить, что $D_t D f_j(t, y_1, \ldots, y_n) \neq \neq D D_t f_j(t, y_1, \ldots, y_n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Обратимся к задаче вычисления коэффициентов рядов Ли (3). В случае, когда функция K_j не входит под знак интеграла, переменную τ, входящую под знак функции K_j в качестве независимой переменной, не будем заменять на t, имея, однако, в виду, что $\tau = t$. Получаем

$$(D^*)^{\nu+1} y_j = (D^*)^\nu f_j(t, y_1, \ldots, y_n) + (D^*)^\nu \int_0^t K_j(t, \tau, y_1, \ldots, y_n)\, d\tau, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{5}$$

$$(D^*)^{\nu}\int_0^t K_j(t,\tau,y_1,\ldots,y_n)\,d\tau=\int_0^t D_t^{\nu}K_j(t,\tau,y_1,\ldots,y_n)\,d\tau+\sum_{i=1}^{\nu}(D^*)^{i-1}\times$$
$$\times D_t^{\nu-i}K_j(t,\tau,y_1,\ldots,y_n),\quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{6}$$

Соотношение (6) доказано в [7]. В дальнейшем аргументы функций f_j и K_j будем опускать. Преобразуем (6). При любом $p\geqslant 1$

$$(D^*)^pD_t^{\nu-i}K_j=(D_\tau+D_t)^pD_t^{\nu-i}K_j+\sum_{l=1}^{p}(D^*)^{p-l}D\,(D_\tau+D_t)^{l-1}D_t^{\nu-i}K_j,$$
$$1\leqslant j\leqslant n,$$

что легко доказывается методом математической индукции. Полагая $p=i-1$, последнее соотношение представим в виде

$$(D^*)^{i-1}D_t^{\nu-i}K_j=\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i-1}{k}D^k(D_\tau+D_t)^{i-1-k}D_t^{\nu-i}K_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

Здесь $\binom{i-1}{k}$ — биномиальные коэффициенты. С учетом полученного соотношения преобразуем (6):

$$(D^*)^{\nu}\int_0^t K_jd\tau=\int_0^t D_t^{\nu}K_jd\tau+\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i-1}{k}D^k(D_\tau+D_t)^{i-1-k}D_t^{\nu-i}K_j=$$
$$=\int_0^t D_t^{\nu}K_jd\tau+\sum_{k=0}^{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu-k}D^k\left[\sum_{p=i}^{\nu-k}\binom{k+p-1}{k}\binom{p-1}{p-i}\right]D_\tau^{i-1}D_t^{\nu-k-i}K_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

Принимая во внимание, что $\sum\limits_{p=i}^{\nu-k}\binom{k+p-1}{k}\binom{p-1}{p-i}=\binom{i+k-1}{k}\binom{\nu}{i+k}$, получаем

$$(D^*)^{\nu}\int_0^t K_jd\tau=\int_0^t D_t^{\nu}K_jd\tau+\sum_{k=0}^{\nu-1}D^k\sum_{i=1}^{\nu-k}\binom{i+k-1}{k}\binom{\nu}{i+k}D_\tau^{i-1}D_t^{\nu-k-i}K_j,$$
$$1\leqslant j\leqslant n. \tag{7}$$

Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор

$$D_k=\sum_{j=1}^{n}c_{k+1}^{(j)}\frac{\partial}{\partial y_j},\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{8}$$

где $c_{k+1}^{(j)}$ — коэффициенты рядов (4). Преобразуя (5) с учетом соотношения (7) и принимая во внимание результаты работ [8, 9], сформулируем теорему о вычислении коэффициентов рядов Ли (3).

Теорема. *Пусть*

1) *функции* f_j *и* K_j, $j=\overline{1,n}$ *разлагаются в сходящиеся ряды Маклорена;*

2) D_t *и* D_τ — *операторы дифференцирования по* t *и* τ *соответственно;*

3) D_k — *линейный дифференциальный оператор, определенный согласно* (8).

Тогда решение задачи Коши (1), (2) *может быть представлено рядами Ли* (3), *а их коэффициенты могут быть вычислены по формулам*

$$(D^*)^{\nu+1}y_j=D_t^{\nu}f_j+\sum_{i=1}^{\nu}\binom{\nu}{i}D_\tau^{i-1}D_t^{\nu-i}K_j+\int_0^t D_t^{\nu}K_jd\tau+$$

$$+\sum_{x_1+2x_2+\ldots+\nu x_\nu=\nu} \frac{\nu!}{x_1!\,x_2!\,\ldots\,x_\nu!} D_0^{x_1} D_1^{x_2}\ldots D_{\nu-1}^{x_\nu} f_j +$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu-1}\Bigg\{\sum_{x_1+2x_2+\ldots+kx_k=k} \frac{k!}{x_1!\,x_2!\,\ldots\,x_k!} D_0^{x_1} D_1^{x_2}\ldots D_{k-1}^{x_k}\Bigg[\binom{\nu}{k} D_t^{\nu-k} f_j +$$

$$+\sum_{i=1}^{\nu-k}\binom{i+k-1}{k}\binom{\nu}{i+k} D_\tau^{i-1} D_t^{\nu-k-1} K_j\Bigg]\Bigg\},\quad j=\overline{1,n};\quad \nu=0,1,2,\ldots,$$

где суммирование выполняется по всем целым неотрицательным решениям уравнений $x_1+2x_2+\ldots+kx_k=k$, $k=1, 2, \ldots, \nu-1$, *и после выполнения всех дифференцирований следует положить* $\tau=t=0$.

1. *Gröbner W.* Die Lie — Reihe und ihre Anwendungen.— Berlin, 1967.— 176 S.
2. *Филатов А. Н.* Обобщенные ряды Ли и их приложения.— Ташкент: Фан, 1963.— 107 с.
3. *Филатов А. Н.* О некоторых классах операторных рядов и их применениях // Вопр. вычисл. математики и техники.— 1964.— Вып. 4.— С. 3—165.
4. *Матвеев П. Н., Филатов А. Н.* Квазиполиномиальные функции с интегральными операторами // Докл. АН УзССР.— 1977.— № 10.— С. 8—9.
5. *Бондаренко Б. А., Филатов А. Н.* Квазиполиномиальные функции и их приложения к задачам теории упругости.— Ташкент: Фан, 1978.— 174 с.
6. *Гурьянов И. Н.* К аналитической теории интегро-дифференциальных уравнений // Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии.— 1961.— Вып. 1.— С. 251—263.
7. *Noble B.* The numerical solution of nonlinear integral equations and related topics // Nonlinear Integral Equations.— Madison: Uniw. Wis. press, 1964.— P. 215—318.
8. *Игумнов В. П.* Теорема о дифференцировании суперпозиции функций нескольких переменных // Математика, некоторые ее приложения и методика преподавания.— Ростов н/Д: Рост. пед. ин-т, 1973.— С. 46—48.
9. *Гвоздецкий О. М., Игумнов В. П.* О представлении решений обыкновенных дифференциальных уравнений в виде рядов Ли // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 2.— С. 218—220.

Ставроп. политехн. ин-т

Получено 07.01.87