УДК 519.21

*В. В. Анисимов, А. П. Юрачковский*

# Принцип усреднения для стохастических разностных уравнений

Под «принципом усреднения» понимают теоремы, устанавливающие сближение решений уравнений, зависящих от параметра и неоднородных по времени (детерминированных либо стохастических), с решениями уравнений с усредненными (по времени или случайности) коэффициентами, а также поведение величины их отклонения [1—6]. В последнем случае основным моментом доказательства является его сведение к доказательству некоторой «стандартной» функциональной предельной теоремы (чаще всего центральной). В данной работе для разностных уравнений предложена общая схема такого сведения, позволяющая расширить класс исследуемых уравнений и предельных законов для нормированных отклонений.

Пусть при $n = 1, 2, \ldots$ заданы: поток $\sigma$-алгебр $(\mathcal{F}_{ni},\ i = \overline{0, m_n})$ на вероятностном пространстве $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$, разбиений $0 = t_{n0} < t_{n1} < \ldots \ldots < t_{nm_n+1} = 1$ отрезка $[0, 1]$, $\mathcal{F}_{ni+1}$-согласованная последовательность $(\beta_{ni},\ i = \overline{0, m_n - 1})$ со значениями в $R^d$, $\mathcal{F}_{n0}$-измеримая случайная величина $X_{n0} \in R^d$, случайные $\mathcal{B}^d \times \mathcal{F}_{ni}$-измеримые функции $a_{ni}(x) = a_{ni}(x, \omega_n) \in \in R^d$, $i = \overline{0, m_n - 1}$ $(x \in R^d, \omega_n \in \Omega_n$, $\mathcal{B}^d$ — борелевская $\sigma$-алгебра в $R^d)$. Определим последовательность $(X_{ni}, i = \overline{1, m_n})$ формулой

$$X_{ni+1} = X_{ni} + a_{ni}(X_{ni})\,\Delta t_{ni} + \beta_{ni} \tag{1}$$

(здесь и далее символ $\Delta$ означает правую разность: $\Delta t_{ni} = t_{ni+1} - t_{ni}$). Обозначим через $L$ различные константы, $q(\cdot)$ — неубывающие функции такие, что $q(+0) = 0$ (запись $L_N, q_N(\cdot)$ указывает на зависимость от параметра $N$); $\xrightarrow{D}$ — слабая сходимость мер, порожденных случайными процессами в пространстве Скорохода $D[0, 1]$; $x^{(j)}$ — $j$-я координата вектора $x$ в выбранном базисе; $D\xi = M(\xi - M\xi)(\xi^* - M\xi^*)$ — матрица ковариаций случайного вектора $\xi$, $\Delta_{ni} = [t_{ni}, t_{ni+1})$, $i < m_n$, $\Delta_{nm_n} = [t_{nm_n}, 1]$. Соотношения для случайных величин, записанные без знака вероятности, предполагаются выполненными с вероятностью 1. Пределы, если не оговорено противное, понимаются при $n \to \infty$.

Исследуем поведение отклонения $(X_{ni})$ от некоторой неслучайной последовательности серий $(\overline{X}_{ni},\ i = \overline{0, m_n})$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть $B_n \to \infty$ —

неслучайная последовательность. Положим

$$\xi_{ni} = B_n (X_{ni} - \overline{X}_{ni}),$$

$$\gamma_{ni} = B_n \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{nj} + B_n \sum_{j=0}^{i-1} (a_{ni} (\overline{X}_{ni}) \Delta t_{ni} - \Delta \overline{X}_{ni}),$$

$$\xi_n (t) = \xi_{ni}, \quad \gamma_n (t) = \gamma_{ni} \text{ при } t \in \Delta_{ni}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\max_i \Delta t_{ni} \to 0, \tag{2}$$

$$M | \gamma_{nk} - \gamma_{nj} | \leqslant L | t_{nk} - t_{nj} |, \tag{3}$$

$$| a_{ni} (\overline{X}_{ni} + x) - a_{ni} (\overline{X}_{ni}) | \leqslant L (B_n^{-1} + | x |), \tag{4}$$

*для любого* $N > 0$ *при* $|x| \vee |y| \leqslant N$

$$B_n | a_{ni} (\overline{X}_{ni} + B_n^{-1} x) - a_{ni} (\overline{X}_{ni} + B_n^{-1} y) | \leqslant q_N (| x - y |) + c_{ni}^N,$$

$$\sum_i c_{ni}^N \Delta t_{ni} \xrightarrow{P} 0; \tag{5}$$

*существуют неслучайная функция* $f (t, x)$ *и заданные на одном вероятностном пространстве случайная величина* $\xi_0$ *и процесс* $\gamma (\cdot)$ *такие, что*

$$B_n \sum_{t_{ni} < t} (a_{ni} (\overline{X}_{ni} + B_n^{-1} x) - a_{ni} (\overline{X}_{ni})) \Delta t_{ni} \xrightarrow{P} \int_0^t f (u, x) \, du,$$

$$(t, x) \in [0, 1) \times R^d, \tag{6}$$

$$| f (t, x) - f (t, y) | \leqslant L_N | x - y |, \quad | x | \vee | y | \leqslant N, \tag{7}$$

$$(\xi_{n0}, \gamma_n (\cdot)) \xrightarrow{D} (\xi_0, \gamma (\cdot)). \tag{8}$$

*Тогда уравнение*

$$\xi (t) = \xi_0 + \int_0^t f (u, \xi (u)) \, du + \gamma (t) \tag{9}$$

*имеет на* $[0, 1]$ *единственное решение и* $\xi_n (\cdot) \xrightarrow{D} \xi (\cdot)$.

Доказательство. Из (3), (8) по теореме Фату получаем

$$M | \gamma (t) - \gamma (s) |^2 \leqslant L | t - s |. \tag{10}$$

Покажем, что

$$| f (t, x) | \leqslant L (1 + | x |). \tag{11}$$

В силу (4) $| a_{ni}^{(j)} (\overline{X}_{ni} + B_n^{-1} x) - a_{ni}^{(j)} (\overline{X}_{ni}) | \leqslant L B_n^{-1} (1 + | x |)$. Отсюда и из (6), (2) получаем

$$\left| \int_s^t f^{(j)} (u, x) \, du \right| \leqslant L (1 + | x |) (t - s),$$

что приводит к (11).

При условиях (7), (10) и (11) существование и единственность решения уравнения (9) доказывается так же, как в [7]. Далее, стандартный прием урезания начальных значений позволяет без ограничения общности считать, что

$$| \xi_{n0} | \leqslant L. \tag{12}$$

Покажем, что последовательность $\xi_n (\cdot)$ слабо компактна в $D$. Обозначим

$$\nu_{ni} = \xi_{ni} - \gamma_{ni}, \quad H_{nj} = B_n \sum_{i=0}^{j-1} (a_{ni} (X_{ni}) - a_{ni} (\overline{X}_{ni})) \, \Delta t_{ni},$$

$H_n(t) = H_{nj}, \quad t \in \Delta_{nj}$. Из (1) имеем

$$\Delta\xi_{ni} = B_n(a_{ni}(\overline{X}_{ni} + B_n^{-1}\xi_{ni}) - a_{ni}(\overline{X}_{ni}))\Delta t_{ni} + \Delta\gamma_{ni}, \tag{13}$$

$$\xi_n(t) = \xi_{n0} + H_n(t) + \gamma_n(t), \tag{14}$$

$$\Delta\nu_{ni} = B_n(a_{ni}(\overline{X}_{ni} + B_n^{-1}\nu_{ni} + B_n^{-1}\gamma_{ni}) - a_{ni}(\overline{X}_{ni}))\Delta t_{ni}. \tag{15}$$

Достаточно показать, что

$$\lim_{N\to\infty}\sup_n P\{\max_i|\xi_{ni}| > N\} = 0. \tag{16}$$

Если это выполнено, то ввиду (4), (2) для любого $\varepsilon > 0$ $\lim_{c\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\sup_{|t-s|\leqslant c}|H_n(t) - H_n(s)| > \varepsilon\} = 0$, что вместе с (8), (14) дает требуемое. В силу (8) для доказательства (16) достаточно установить стохастическую ограниченность последовательности $\max_i|\nu_{ni}|$, $n \geqslant 1$. Обозначим $v_{nk} = M\max_{i\leqslant k}|\nu_{ni}|^2$. Из (15) с учетом (4) получаем

$$\max_{j\leqslant k+1}|\nu_{ni}|^2 \leqslant 2|\xi_{n0}|^2 + 4L^2 t_{nk+1}\sum_{j=0}^{k}(1 + |\nu_{nj}|^2 + |\gamma_{nj}|^2)\Delta t_{nj},$$

откуда с учетом (3) и (12) следует $v_{nk+1} \leqslant L\left(1 + \sum_{j=0}^{k} v_{nj}\Delta t_{nj}\right)$. По лемме Гроноулла — Беллмана $v_{nm_n} \leqslant L$, что и требовалось.

Опираясь на неравенства (12), (3) и (4), получаем с помощью аналогичных рассуждений $M\max_{j\leqslant i\leqslant k}|\nu_{ni} - \nu_{nj}|^2 \leqslant L(t_{nk} - t_{nj})$, откуда в силу (3)

$$M|\xi_{nk} - \xi_{nj}|^2 \leqslant L|t_{nk} - t_{nj}|. \tag{17}$$

Построим процессы $\eta_n(t) = \eta_{ni}$, $t \in \Delta_{ni}$, где $\eta_{n0} = \xi_{n0}$, $\Delta\eta_{ni} = \int_{\Delta_{ni}} f(u, \eta_{ni})\,du + \Delta\gamma_{ni}$.

Пользуясь соотношениями (5)—(7), (12) и (17), убеждаемся с помощью стандартных рассуждений [8], (см. также [9]), что $\max_t|\xi_n(t) - \eta_n(t)| \xrightarrow{P} 0$. Слабая сходимость по распределению $\eta_n(\cdot)$ к $\xi(\cdot)$ доказывается также стандартно с помощью конечноразностных аппроксимаций [7, 10]. Теорема доказана. Основная трудность в ее применении заключается в проверке условий (3), (8) (проверка (8) представляет собой доказательство самостоятельной функциональной предельной теоремы). Исследуем одну схему, в которой эти условия принимают более конкретный вид.

Согласно определению представим $\gamma_n(t)$ в виде $\gamma_n(t) = \psi_n(t) + \zeta_n(t)$, где $\psi_n(t) = \psi_{nj}$, $\zeta_n(t) = \zeta_{nj}$ при $t \in \Delta_{nj}$, $\psi_{nj} = B_n\sum_{i=0}^{j-1}(a_{ni}(\overline{X}_{ni})\Delta t_{ni} - \Delta\overline{X}_{ni})$, $\zeta_{nj} = B_n\sum_{i=0}^{j-1}\beta_{ni}$. Нас будет интересовать случай, когда процессы $\zeta(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ асимптотически независимы.

Предположим следующее.

А. $a_{ni}(x) = a_{ni}(x, z_{ni})$, где $(z_{ni})$ — последовательность случайных элементов со значениями в измеримом пространстве $(Z, \mathfrak{Z})$, согласованная с потоком $(\mathcal{F}_{ni})$, $a_{ni}(x, z)$ — неслучайные $\mathcal{B}^d \times \mathcal{F}_{ni}$-измеримые функции.

Б. Существует σ-алгебра $\mathfrak{S}_n \subset \mathcal{F}_n$ такая, что величины $\xi_{n0}$, $z_{ni}$, $i = \overline{0, m_n - 1}$ $\mathfrak{S}_n$-измеримы, а $\beta_{ni}$, $i = \overline{0, m_n - 1}$, условно независимы в совокупности относительно $\mathfrak{S}_n$.

В. Последовательность $(\overline{X}_{ni})$ задается формулой $\Delta\overline{X}_{ni} = \overline{a}_{ni}(\overline{X}_{ni})\Delta t_{ni}$, где $\overline{a}_{ni}(x) = Ma_{ni}(x, z_{ni})$.

Обозначим $\varphi_n(i, j) = \sup_{E_1, E_2 \in \mathfrak{Z}}|P\{z_{ni} \in E_1, z_{nj} \in E_2\} - P\{z_{ni} \in E_1\}P\{z_{nj} \in E_2\}|$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $A - B$, (2), (4), (5), (7) (*с заменой* $a_{ni}(x)$ *на* $a_{ni}(x, z_{ni})$)

$$B_n^2 \max_i \Delta t_{ni} \leqslant L, \tag{18}$$

$$B_n^2 \sum_{j=e}^{k-2} \sum_{i=j+1}^{k-1} \sqrt{\varphi_n(i, j)}\, \Delta t_{ni} \Delta t_{nj} \leqslant L (t_{nk} - t_{nl}), \tag{19}$$

$$M(\beta_{ni}/\mathfrak{S}_n) = 0, \quad \| D(\beta_{ni}/\mathfrak{S}_n) \| \leqslant L B_n^{-2} \Delta t_{ni}, \tag{20}$$

$$M\, | a_{ni}(\bar{X}_{ni}, z_{ni}) |^4 \leqslant L, \tag{21}$$

$$B_n \sum_{t_{ni} < t} (\bar{a}_{ni}(\bar{X}_{ni} + B_n^{-1} x) - \bar{a}_{ni}(\bar{X}_{ni}))\, \Delta t_{ni} \to \int_0^t f(u, x)\, du, \quad (t, x) \in [0, 1) \times R^d; \tag{22}$$

*существует неслучайная функция* $K(s, t, \lambda)$ *такая, что для любых* $s, t, \lambda$

$$\prod_{s \leqslant t_{ni} < t} M \exp\{ i B_n (\lambda, \beta_{ni}) \} / \mathfrak{S}_n] \xrightarrow{P} K(s, t, \lambda), \tag{23}$$

*где* $i = \sqrt{-1}$; *существует мартингал* $(\psi(t), \mathcal{G}(t),\ t \in [0, 1])$ и $\mathcal{G}(0)$-*измеримая случайная величина* $\xi_0$ *такие, что*

$$(\xi_{n0}, \psi_n(\cdot)) \xrightarrow{D} (\xi_0, \psi(\cdot)). \tag{24}$$

*Тогда*

$$1.\ (\xi_{n0}, \psi_n(\cdot), \zeta_n(\cdot)) \xrightarrow{D} (\xi_0, \psi(\cdot), \zeta(\cdot)), \tag{25}$$

*где* $\zeta(\cdot)$ — *независящий от* $(\xi_0, \psi(\cdot))$ *стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями (ПНП), у которого* $M\zeta(t) \equiv 0$, $\| D\zeta(t) \| \leqslant L$, $M \exp\{ \iota(\lambda, \zeta(t)) \} = K(0, t, \lambda)$.

2. *Уравнение*

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t f(u, \xi(u))\, du + \psi(t) + \zeta(t)$$

*имеет единственное решение.*

3. $\xi_n(\cdot) \xrightarrow{D} \xi(\cdot)$.

Доказательство. Из условий (20) и Б вытекает слабая компактность в $D$ последовательности $\zeta_n(\cdot)$ (теорема 3 § 3 гл. 2 [8]). Пусть $\zeta(\cdot)$ — предел ее сходящейся последовательности. Воспользовавшись (23), неслучайностью $K(s, t, \lambda)$ и ограниченностью левой части (24), убеждаемся с помощью предельного перехода, что $\zeta(\cdot)$ — ПНП. Из условий (20) и Б следует неравенство $\| D\zeta_n(t) \| \leqslant L$ и стохастическая непрерывность $\zeta(\cdot)$. По теореме Фату $\| D\zeta(t) \| \leqslant L$, а по известному признаку равномерной интегрируемости $M\zeta(t) = \lim M\zeta_n(t) = 0$. Из изложенного и из (24) вытекает (25), причем $\zeta(\cdot)$ не зависит от $(\xi_0, \psi(\cdot))$ в силу (23), Б.

Далее вследствие (4) $| \bar{a}_{ni}^{(j)}(\bar{X}_{ni} + B_n^{-1} x) - \bar{a}_{ni}^{(j)}(\bar{X}_{ni}) | \leqslant L B_n^{-1} (1 + |x|)$, что вместе с (22) дает (11) (см. доказательство теоремы 1). Покажем, что выполнено неравенство (3) (этим самым будет установлено (10) и доказаны существование и единственность решения). Поскольку $\gamma_{ni} = \psi_{ni} + \zeta_{ni}$ и для величин $\zeta_{ni}$ неравенство типа (3) выполнено в силу условий (20) и Б, то достаточно установить его для $\psi_{ni}$. Обозначим $\alpha_{ni} = a_{ni}(\bar{X}_{ni}, z_{ni}) - \bar{a}_{ni}(x_{ni})$. По предположению $B$ $\psi_{nk} - \psi_{nj} = B_n \sum_{i=j}^{k-1} \alpha_{ni} \Delta t_{ni}$. При этом в силу (21) $| M\alpha_{ni}^{(\gamma)} \alpha_{nj}^{(\gamma)} | \leqslant L \sqrt{\varphi_n(i, j)}$ (теорема 17.2.2 [11]). Отсюда

$$M(\psi_{nk}^{(\gamma)} - \psi_{nl}^{(\gamma)})^2 = B_n^2 M \Big( \sum_{i=l}^{k-1} \alpha_{ni}^{(\gamma)} \Delta t_{ni} \Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant LB_n^2 \sum_{i=l}^{k-1} (\Delta t_{ni})^2 + LB_n^2 \sum_{j=l}^{k-2} \sum_{i=j+1}^{k-1} \sqrt{\varphi_n(i,j)}\, \Delta t_{ni} \Delta t_{nj} \leqslant L(t_{nk} - t_{nl})$$

(последнее неравенство записано на основании (18), (19)), что и требовалось.

Осталось проверить условие (6). В силу (4)

$$B_n |a_{ni}(\bar{X}_{ni} + B_n^{-1}x) - a_{ni}(\bar{X}_{ni}) - \bar{a}_{ni}(\bar{X}_{ni} + B_n^{-1}x) - \bar{a}_{ni}(\bar{X}_{ni})| \leqslant$$
$$\leqslant L(1 + |x|),$$

а в силу (19) $\sum_{j=0}^{m_n-1} \sum_{i=j+1}^{m_n-1} \varphi_n(i,j)\, \Delta t_{ni} \Delta t_{nj} \leqslant LB_n^{-2} \to 0$. Используя теорему 17.2.1 [11], получаем, что разность левых частей в (6) и (22) стремится к 0 в среднеквадратическом и сами эти соотношения эквивалентны. Теорема доказана.

Замечание 1. Достаточные критерии проверки (23) в терминах коэффициента перемешивания рассматривались в [12].

Замечание 2. Если усилить (21) до требования

$$|a_{ni}(\bar{X}_{ni}, z_{ni})| \leqslant L, \tag{26}$$

то в (19) можно заменить $\sqrt{\varphi_n(i,j)}$ на $\varphi_n(i,j)$ (см. теорему 17.2.1 [11]).

Замечание 3. Если выполнено условие (18) и $\varphi_n(i,j) \leqslant \varphi_n(|i-j|)$, что для выполнения условия (19) достаточно, чтобы $\overline{\lim\limits_n} \sum\limits_k \sqrt{\varphi_n(k)} < \infty$.

Замечание 4. Предположим, что

$$\sup_{n,i} |\bar{X}_{ni}| \leqslant L, \tag{27}$$

в точках $\bar{X}_{ni}$ существуют производные $\partial \bar{a}_{ni}^{(r)}/\partial x^{(j)}$, $r, j = \overline{1, d}$, и для любого $N > 0$

$$\sup_{|x| \leqslant N} \max_i \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \| \bar{a}'_{ni}(\bar{X}_{ni} + \theta B_n^{-1}x) - \bar{a}'_{ni}(\bar{X}_{ni}) \| \xrightarrow{P} 0, \tag{28}$$

где $\bar{a}'_{ni}(x)$ — матрица Якоби функции $\bar{a}_{ni}(x)$. По формуле конечных приращений [13] (гл. 10, § 1) $B_n(\bar{a}_{ni}(\bar{X}_{ni} + B_n^{-1}x) - \bar{a}_{ni}(\bar{X}_{ni})) = \bar{a}_{ni}(\bar{X}_{ni}) + \rho_{ni}(x)$, где $\sup\limits_{|x| \leqslant N} \max\limits_i \|\rho_{ni}(x)\| \to 0$ $\forall N > 0$. Следовательно, векторная функция $f(t, x)$ в (22) имеет вид $f(t)x$, где $f(t)$ — матричная функция, определяемая из соотношения

$$\sum_{t_{ni} < t} \bar{a}'_{ni}(\bar{X}_{ni})\, \Delta t_{ni} \to \int_0^t f(u)\, du, \tag{29}$$

которое в данном случае эквивалентно (22).

Пример. Пусть $m_n = n - 1$, $t_{ni} = i/n$, $B_n = \sqrt{n}$, $X_{n0} = \bar{X}_{n0} = 0$, $\Delta X_{ni} = a_{ni}(X_{ni}, z_i)/n + b_{ni}(X_{ni}, z_i)\eta_i/n$, где $(z_i, i \geqslant 0)$ — однородная равномерно эргодическая цепь Маркова, $(\eta_i, i \geqslant 0)$ — не зависящая от $(z_i)$ последовательность независимых случайных величин со значениями в $R^d$, $b_{ni}(x, z)$ — матричные $\mathscr{B}^d \times \mathfrak{Z}$-измеримые функции. Пусть $a(t, x) \in R^d$ — неслучайная функция, удовлетворяющая условиям типа (7), (11), а $x(\cdot)$ — решение уравнения на $[0, 1]$ $dx(t) = a(t, x(t))\, dt$, $x(0) = 0$ (при указанных условиях решение существует и единственно). Положим $x_{ni} = x(t_{ni})$, $\bar{X}_{n0} = 0$, $\Delta \bar{X}_{ni} = \int_{\Delta_{ni}} a(u, \bar{X}_{ni})\, du$, $\bar{X}_n(t) = \bar{X}_{ni}$, $t \in \Delta_{ni}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (4), (26), (27), (29)

$$\| b_{ni}(\bar{X}_{ni}, z_i) \| \leqslant L, \tag{30}$$

$$\| b_{ni}(\overline{X}_{ni}+x, z_i) - b_{ni}(\overline{X}_{ni}, z_i) \| \leqslant q(|x|), \tag{31}$$

$$M\eta_i = 0, \quad D\eta_i = I, \tag{32}$$

$$M|\eta_i|^4 \leqslant L, \tag{33}$$

*для всех* $t \in [0, 1)$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{[nt]} \Big(\overline{a}_{ni}(\overline{X}_{ni}) - n \int\limits_{\Delta_{ni}} a(u, \overline{X}_{ni})\, du\Big) \to 0,$$

$$\frac{1}{n} D\Big(\sum_{i=0}^{[nt]} a_{ni}(\overline{X}_{ni}, z_i)\Big) \to \int\limits_0^t g^2(u)\, du, \tag{34}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{[nt]} M b_{ni}(\overline{X}_{ni}, z_i)\, b_{ni}^*(\overline{X}_{ni}, z_i) \to \int\limits_0^t b^2(u)\, du. \tag{35}$$

*Тогда последовательность* $\xi_n(\cdot)$ *слабо сходится в* $D$ *к решению уравнения*

$$\xi(t) = \int\limits_0^t f(u)\, \xi(u)\, du + \int\limits_0^t \sqrt{g^2(u) + b^2(u)}\, dw(u). \tag{36}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2 и замечаниями 2—4. Имеем

$$\beta_{ni} = b_{ni}(\overline{X}_{ni}, z_i)\,\eta_i/n = b_{ni}(\overline{X}_{ni}, z_i)\,\eta_i/n + (b_{ni}(\overline{X}_{ni} + \xi_{ni}/\sqrt{n}, z_i) -$$

$$- b_{ni}(\overline{X}_{ni}, z_i))\,\eta_i/n = \beta_{ni}^{(1)} + \beta_{ni}^{(2)}, \quad \Delta\psi_{ni} = \Big(a_{ni}(\overline{X}_{ni}, z_i) -$$

$$- n \int\limits_{\Delta_{ni}} a(u, \overline{X}_{ni})\, du\Big)/\sqrt{n} = (a_{ni}(\overline{X}_{ni}, z_i) - a_{ni}(\overline{X}_{ni}))/\sqrt{n} +$$

$$+ \Big(\overline{a}_{ni}(\overline{X}_{ni}) - n \int\limits_{\Delta_{ni}} a(u, \overline{X}_{ni})\, du\Big)/\sqrt{n}, \quad \xi_0 = 0,$$

$$\psi(t) = \int\limits_0^t g(u)\, dw_1(u), \quad \zeta(t) = \int\limits_0^t b(u)\, dw_2(u),$$

$w_1(\cdot)$, $w_2(\cdot)$ — независимые винеровские процессы (очевидно $\psi(\cdot) + \zeta(\cdot)$ совпадает по распределению с процессом $\int\limits_0^t \sqrt{g^2(u) + b^2(u)}\, dw(u)$, $t \in [0, 1]$).

Известно [14, с. 180], что коэффициент равномерно сильного перемешивания $\alpha(i)$ равномерно эргодической цепи Маркова удовлетворяет условию

$$\alpha(i) \leqslant L\rho^i, \quad i > 0, \quad \rho < 1. \tag{37}$$

Отсюда и из (27) на основании упоминавшихся результатов [11] получаем

$$M[|\psi_{nk} - \psi_{nj}|^2/\mathcal{F}_{nj}] \leqslant L(t_{nk} - t_{nj}), \tag{38}$$

$$M|\psi_n(t)|^4 \leqslant L. \tag{39}$$

Из (38) следует [15] слабая компактность в $D$ последовательности $\psi_n(\cdot)$. В силу (2), (26) любой ее частичный предел будет непрерывным процессом, а на основании (37) он будет ПНП. Из (34) и (38) следует, что вся последовательность $\psi_n(\cdot)$ сходится к процессу $\psi(\cdot)$, имеющему указанный выше вид. Далее $\zeta_n(t) = \zeta_n^{(1)}(t) + \zeta_n^{(2)}(t)$, где $\zeta_n^{(k)}(t) = \sqrt{n} \sum_{i=0}^{[nt]} \beta_{ni}^{(k)}$, $k = 1, 2$. В силу (30) — (32) и стохастической ограниченности $\max_i |\xi_{ni}|$, $\zeta_n^{(2)}(\cdot) \xrightarrow{D} 0$. Вследствие (30), (33) $M|\zeta_n^{(1)}(t)|^4 \leqslant L$, поэтому последовательность $\zeta_n^{(1)}(t)$ равномерно интегрируема. При этом на основании (32) и независимости

$(\eta_i)$ от $(z_i)$ $D\zeta^{(1)}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{[nt]} Mb_{ni}(\overline{X}_{ni}, z_i)\, b_{ni}^{*}(\overline{X}_{ni}, z_i)$. Теперь из (35) получаем, что процесс $\zeta(\cdot)$ имеет указанный выше вид. Остальные условия теоремы 2 вытекают из замечаний 2—4 (условие (27) в замечании 4 есть простое следствие (26)) и условий данной теоремы, которая тем самым доказана.

Замечание 5. Очевидно, в условиях теоремы последовательность процессов $\sqrt{n}\,(X_n(t) - x(t))$, $t \in [0, 1]$, $n \geqslant 1$ сходится к тому же пределу.

Замечание 6. Если для любых $N > 0$, $t \in [0, 1)$

$$\sup_{|x| \leqslant N} \Big| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{[nt]} \overline{a}'_{ni}(x) - \int_0^t h(u, x)\, du \Big| \to 0,$$

где $h(t, x)$ удовлетворяет условиям типа (7), (11), то функция $f(t)$ в (29), (36) имеет вид $f(t) = h(t, x(t))$.


1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Киев: Изд-во АН УССР. 1945— 137 с.
2. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журнал.— 1952.— **4**, № 2.— С. 215—218.
3. *Хасьминский Р. З.* О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями со случайным параметром // Теория вероятностей и ее применения.— 1966.— **11**, вып. 2.— С. 240—259.
4. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М. : Сов. радио, 1961.— 558 с.
5. *Kushner H. J.* A martingale method for the convergence of a sequence of processes to a jump—diffusion process // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1980.— **50**, N. 1.— S. 207—219.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев : Наук. думка, 1968.— 356 с.
7. *Гихман И. И., Ссороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.— М. : Наука, 1977.— 568 с.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1975.— Т. 3.— 496 с.
9. *Юрачковский А. П.* Предельная теорема для стохастических разностных схем без запаздывания // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986.— № 7.— С. 24—26.
10. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 612 с.
11. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные случайные величины.— М. : Наука, 1965.— 524 с.
12. *Анисимов В. В.* Асимптотические методы анализа стохастических систем.— Тбилиси : Мецниереба, 1984.— 180 с.
13. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1981.— 544 с.
14. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1956.— 604 с.
15. *Григелионис Б. И.* Об относительной компактности множеств вероятностных мер в $D_{\mathfrak{X}}[0, \infty)$ // Лит. мат. сб.— 1973.— **13**, № 4.— С. 83—96.



Киев. ун-т Получено 17.02.87