УДК 517.432

Е. В. Черемных

О спектральном разложении одного возмущенного дифференциального оператора

Известно, что несамосопряженное возмущение непрерывного спектра приводит к появлению спектральных особенностей. Как правило, разложение по собственным функциям рассматривается в тех случаях, когда спектральные особенности «погружены» в непрерывный спектр [1, 2]. В работах [3, 4] рассмотрен случай, когда спектральные особенности находятся на концах, отрезка совпадающего с непрерывным спектром.

В настоящей статье показывается на примере, что схема [3, 4] применима также в случае, когда непрерывный спектр заполняет полуось.

Пусть L_0 — самосопряженный оператор в пространстве $H = L^2(0, \infty)$, порожденный дифференциальным выражением $ly = -y''$ и краевым условием $y(0) = 0$, и

$$Ly = L_0 y + \int_0^\infty k(s, t)\, y(t)\, dt, \quad D(L) = D(L_0),$$

где $k(s, t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s)\, \psi_i(t)$, $\varphi_i, \psi_i \in H$.

Если $f, g \in M$, а также $\varphi_i, \psi_i \in M$, $i = 1, \ldots, n$, где $M = \left\{ y \in H : \int_0^\infty |y(x)| \times e^{\varepsilon x} dx < \infty \right\}$, $\varepsilon > 0$, то выражение $(R_\lambda f, g)$, $R_\lambda = (L - \lambda)^{-1}$ допускает продолжение сверху $(R_\lambda f, g)_+$ (снизу $(R_\lambda f, g)_-$)/через $(0, \infty)$. Полюса $\sigma_k^\pm$, $k = 1, \ldots, N^\pm$, функции $(R_\lambda f, g)_\pm$, находящиеся в $(0, \infty)$, образуют конечное множество и называются спектральными особенностями оператора L. Спектральные проекторы определяются формулой $(P_{\sigma_k^\pm} f, g) = -\operatorname*{Res}_{\lambda=\sigma_k^\pm} (R_\lambda f, g)_\pm$ и могут быть интерпретированы с помощью подхода* [1]. Собственные значения $\lambda_k \notin [0, \infty)$, $k = 1, \ldots, N$, оператора L также образуют конечное множество. Положим $P_{\lambda_k} = -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_k} R_\lambda$. Используя метод контурного интегрирования, получаем

$$(f, g) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{|\lambda|=R} (R_\lambda f, g)\, d\lambda$$

или после стягивания контура на полуось

$$(f, g) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta\to 0} \left\{ \int_{|\lambda|=\delta} (R_\lambda f, g)\, d\lambda + \int_{\delta+}^{\infty} ((R_\sigma f, g)_- - (R_\sigma f, g)_+)\, d\sigma \right\} -$$
$$- \sum_{\sigma_k^-} \operatorname*{Res}_{\lambda=\sigma_k^-} (R_\lambda f, g)_- - \sum_{\lambda_k} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_k} (R_\lambda f, g), \tag{1}$$

*$\sigma_k^\pm$ могут быть собственными значениями.

где регулированный интеграл $\int\limits_{\delta+}^{\infty}$ строится согласно [1]. Скачок резольвенты на непрерывном спектре выражается через собственные функционалы, отвечающие непрерывному спектру операторов L и L^*. Нормировку собственных функционалов удобно выбрать иную, чем в [1], более удобную для изучения выражения $(R_\lambda f, g)$ в окрестности точки $\lambda = 0$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\eta > 0$. Для каждого элемента $f \in H$ введем его образ (обозначаемый заглавной буквой) $F(s) = Uf(s) = e^{\eta s} \int\limits_0^\infty \frac{\sin \sqrt{s}\xi}{\sqrt{s}} f(\xi)\, d\xi$, где интеграл сходится в среднем квадратичном. Оператор U является унитарным оператором, действующим из H в пространство L_σ^2, снабженное нормой $\| F \|_{L_\sigma^2}^2 = \int\limits_0^\infty |F(s)|^2 d\sigma(s)$, $d\sigma(s) = \frac{1}{\pi} e^{-2\eta s} \times \sqrt{s} ds$. Пусть $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, [0, \infty)) < \varepsilon_1\}$, где $\varepsilon_1 > 0$ выбрано так, что функция $F(z)$ голоморфна в Ω, если $f \in M$. Используя понятие ядра Бергмана, легко установить существование функции $p(z) > 0$ и константы $C > 0$ таких, что $(z = x + iy)$

$$\int\limits_0^\infty |F(s)|^2 d\sigma(s) \leqslant C \iint\limits_\Omega |F(z)|^2 p(z)\, dxdy, \quad F \in UM. \tag{2}$$

Пусть Φ — пространство функций, голоморфных в Ω, снабженное нормой

$$\| F \|_\Phi^2 = \iint\limits_\Omega |F(z)|^2 p(z)\, dxdy, \quad z = x + iy. \tag{3}$$

Рассмотрим оператор $\mathscr{C} : \Phi \to \Phi$, $\mathscr{C} F(s) = sF(s)$, $s \in \Omega$, с максимальной областью определения. Выражение $\mathfrak{R}_\zeta F(s) = \frac{F(s) - F(\zeta)}{s - \zeta}$ определяет псевдорезольвенту $\mathfrak{R}_\zeta$ в пространстве Φ. При этом $D(\mathfrak{R}_\zeta) = \Phi$, поскольку функция $p(z)$ в соотношении (3) может быть выбрана достаточно быстро убывающей. Очевидно $\mathfrak{R}_\zeta (\mathscr{C} - \zeta) = 1$.

Определение 1. *Пусть* R_ζ, $\zeta \in \Omega$,— *псевдорезольвента, заданная на произвольном гильбертовом пространстве* Φ. *Замкнутый оператор* $A, \overline{D(A)} = \Phi$, *называется ассоциированным с псевдорезольвентой, если* $\mathfrak{R}_\zeta (A - \zeta) = 1$, $\zeta \in \Omega$.

Определение 2. *Функция* $\tilde{\mathfrak{R}}_\zeta$, $\zeta \in \Omega$, *называется минимальным продолжением псевдорезольвенты* $\mathfrak{R}_\zeta$, *если* $\tilde{\mathfrak{R}}_\zeta$ *есть резольвента, действующая в некотором гильбертовом пространстве* $\tilde{\Phi}$ *и при этом*: 1) *для каждого* $\zeta \in \Omega$ *оператор* $\tilde{\mathfrak{R}}_\zeta$ *есть продолжение оператора* $\mathfrak{R}_\zeta$; 2) *резольвента* $\tilde{\mathfrak{R}}_\zeta$ *не имеет нетривиального сужения на подпространство, содержащее* Φ, *являющегося резольвентой.*

Теорема. *Пусть в произвольном гильбертовом пространстве* Φ *задана псевдорезольвента* $\mathfrak{R}_\zeta$ *с конечномерным ядром*, $\dim Z(\mathfrak{R}_\zeta) < \infty$ *и плотной областью значений*, $\overline{\mathfrak{R}(\mathfrak{R}_\zeta)} = \Phi$, $\zeta \in \Omega$.

Тогда для каждого оператора A, *ассоциированного с* $\mathfrak{R}_\zeta$, *существует продолжение* $\tilde{A}$ *на некоторое пространство* $\tilde{\Phi} \supset \Phi$, *обладающее следующими свойствами*: 1) $\Omega \subset \delta(\tilde{A})$; 2) *резольвента* $\tilde{\mathfrak{R}}_\zeta = (\tilde{A} - \zeta)^{-1}$ *является минимальным продолжением псевдорезольвенты* $\mathfrak{R}_\zeta$.

Доказательство аналогично [5], достаточно заменить $A^2(\Omega)$ на пространство $A_\rho^2(\Omega)$ с такой нормой $\| a \|_{A_\rho^2(\Omega)}^2 = \iint\limits_\Omega |a(z)|^2 \rho(z)\, dxdy$, что функции, голоморфные в Ω и убывающие как $O(1/\zeta)$ при $|\zeta| \to \infty$, принадлежат $A^2_\rho(\Omega)$.

Теорема о вычете псевдорезольвенты [6] обобщается на случай определения 1 без изменений.

Введем операторы $A, B : L^2_\sigma \to \mathbb{C}^n$, полагая

$$(AF)_j = \int_0^\infty F(s)\, \overline{\Phi_j(s)}\, d\sigma(s), \quad (BF)_j = \int_0^\infty F(s)\, \overline{\Psi_j(s)}\, d\sigma(s), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда образ $T = ULU^{-1}$ оператора L запишется $T = S + V$, где $SF(s) = sF(s)$, $V = A^*B$.

Теорема 2 работы [3] легко переносится на наш случай и дает следующее представление

$$(R_\zeta f, g) = (T_\zeta F, G)_{L^2_\sigma} = (F, b_{\bar{\zeta}})(a_\zeta, G)\, m(\zeta) + (\tilde{T}_\zeta F, WG)_{\tilde{\Phi}}, \quad |\zeta| < \varepsilon_1, \quad \zeta \notin [0, \infty), \tag{4}$$

где $T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}$, $\tilde{\Phi} = \Phi \oplus \overline{A^2_\rho(\Omega)}$, $\tilde{T}_\zeta, |\zeta| < \varepsilon_1$ — резольвента некоторого оператора $\tilde{T} : \tilde{\Phi} \to \tilde{\Phi}$, выражения $(F, b_{\bar{\zeta}})$ и (a_ζ, G) аналитичны при $|\zeta| < \varepsilon_1$ и представляют собственные функционалы непрерывного спектра операторов L и L^*, функция $m(\zeta)$ имеет скачок $r(\sigma) = \frac{1}{2\pi i}(m_+(\sigma) - m_-(\sigma)) \not\equiv 0$ при $\sigma \in (0, \varepsilon_1)$.

Подставляя (4) в (1), находим

$$(f, g) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \to 0} \Big\{ \int_{|\lambda| = \delta} (F, b_{\bar{\lambda}})(a_\lambda, G)\, m(\lambda)\, d\lambda - \int_{\delta +}^{\infty} (F, b_\sigma)(a_\sigma, G)\, r(\sigma)\, d\sigma \Big\} -$$

$$- \operatorname*{Res}_{\lambda = 0} (\tilde{T}_\lambda F, WG)_{\tilde{\Phi}} - \sum_{\sigma_k^-} \operatorname*{Res}_{\lambda = \sigma_k^-} (R_\lambda f, g)_- - \sum_{\lambda_k} \operatorname*{Res}_{\lambda = \lambda_k} (R_\lambda f, g). \tag{5}$$

Функции $(F, b_{\bar{\lambda}})$ и (a_λ, G) аналитичны при $|\lambda| < \varepsilon_1$, поэтому выражение в скобках в (5) не зависит от δ. Это выражение может быть в соответствии с [3] представлено как некоторый регуляризованный интеграл R^+ от произведения $(F, b_\sigma)(a_\sigma, G)$, $\sigma > 0$ Обозначив $P_0 = -\operatorname*{Res}_{\lambda = 0} \tilde{T}_\lambda$, получим

$$(f, g) = \langle (F, b_\sigma)(a_\sigma, G), R^+ \rangle + (P_0 F, WG)_{\tilde{\Phi}} + \sum_{\sigma_k^-} (P_{\sigma_k^-} f, g) + \sum_{\lambda_k} (P_{\lambda_k} f, g). \tag{6}$$

Отметим, что вклад точки $\lambda = 0$ в спектральном разложении (6) определяется проектором P_0 Область значений проектора P_0 содержит корневое пространство оператора T (при естественном вложении Φ в L^2_σ), отвечающее собственному значению $\lambda = 0$, поскольку оператор $\tilde{T}$ является продолжением $T|_\Phi$. Размерность корневого пространства в аналогичной ситуации рассмотрена в [4] Равенство (6) распространяется с элементов $f, g \in M$ на функции, квадрат модуля которых интегрируем с весом x^p, где число p определяется порядком спектральных особенностей.

Не ставя своей задачей анализ спектральных особенностей $\sigma_k^\pm$ и полюсов продолжений билинейной формы резольвенты через полуось, ограничимся примером, поясняющим построение проектора P_0.

Пусть $n = 1$, $\varphi(t) = \gamma e^{-2t} + \gamma_1 e^{-3t}$, $\psi(t) = e^{-t}$. Тогда

$$\Phi(s) = \left[\frac{\gamma}{4 + s} + \frac{\gamma_1}{9 + s} \right] e^{\eta s}, \quad \Psi(s) = \frac{e^{\eta s}}{1 + s}.$$

Вначале дадим более детальное представление для операторов, приведенных выше. Оператор $L = L_0 + (\cdot, \psi)\, \varphi$ подобен оператору

$$T = S + (\cdot, \Psi)_{L^2_\sigma} \Phi, \tag{7}$$

действующему в пространстве L_σ. Операторы $A, B : L^2_\sigma \to \mathbb{C}$ заданы соотношениями $AF = (F, \Phi)_{L^2_\sigma}$, $BF = (F, \Psi)_{L^2_\sigma}$. Очевидно, что оператор $A^* : \mathbb{C} \to L^2_\sigma$ задан соотношением $(A^*c)(s) = c\Phi(s)$ и $T = S + A^*B$. Сужая функции из $A^2_\rho(\Omega)$, заданные в полосе Ω, на полуось $(0, \infty)$, получаем некоторое многообразие в L^2_σ, инвариантное относительно оператора A^*B. Это позволяет рассматривать оператор (7) также в пространстве $A^2_\rho(\Omega)$, обозначим его $T = \mathscr{C} + A^*B$. Элемент $\{F, \overline{G}\}$ пространства $A^2_\rho(\Omega) \oplus \overline{A^2_\rho(\Omega)}$ записываем в виде $F + \overline{G}$, отождествляем $\{F, 0\}$ с элементом $F \in A^2_\rho(\Omega)$, это не приведет к неопределенности. Положим $\tilde{S}\{F, \overline{G}\} = \{\mathscr{C}F + \overline{(G, e)}_{A^2_\rho(\Omega)}e, \overline{\mathscr{C}^*G}\}$, $e(\zeta) \equiv 1$, $\zeta \in \Omega$. Оператор $\tilde{T}$, фигурирующий в равенстве (4), имеет вид $\tilde{T} = \tilde{S} + A^*\tilde{B}$, где $\tilde{B} : A^2_\rho(\Omega) \oplus \overline{A^2_\rho(\Omega)} \to \mathbb{C}$ — некоторое расширение оператора $B : A^2_\rho(\Omega) \to \mathbb{C}$. Резольвента оператора $\tilde{T}$ [3]

$$\tilde{T}_\zeta = \tilde{S}_\zeta - \tilde{S}_\zeta A^* N(\zeta)^{-1} \tilde{B}\tilde{S}_\zeta \tag{8}$$

записывается аналогично резольвенте $T_\zeta = S_\zeta - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} B S_\zeta$ оператора $T = S + A^*B$. В условиях рассматриваемого примера оператор $K(\zeta) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ задан выражением

$$K(\zeta) = 1 + \int_0^\infty \frac{\Phi(s)\overline{\Psi(s)}}{s - \zeta}\, d\sigma(s), \quad \zeta \notin [0, \infty).$$

Эта функция имеет $\zeta = 0$ точкой ветвления, тогда как функция

$$N(\zeta) = 1 + \int_0^\infty \frac{\Phi(s)\overline{\Psi(s)} - \Phi(\zeta)\overline{\Psi(\bar{\zeta})}}{s - \zeta}\, d\sigma(s) \tag{9}$$

голоморфна в окрестности $\zeta = 0$. Нам понадобится также интеграл

$$I_F(\zeta) \equiv \tilde{B}\tilde{S}_\zeta F = \int_0^\infty \frac{F(s)\overline{\Psi(s)} - F(\zeta)\overline{\Psi(\bar{\zeta})}}{s - \zeta}\, d\sigma(s). \tag{10}$$

Собственные функционалы b_ζ в условиях примера имеют вид

$$(F, b_\zeta) = F(\zeta) - \frac{\overline{\Phi}(\zeta)}{N(\zeta)} I_F(\zeta). \tag{11}$$

Они удовлетворяют соотношению

$$((T - \zeta)F, b_{\bar{\zeta}}) \equiv 0, \quad \zeta \in \Omega. \tag{12}$$

Пусть K_ζ — ядро Бергмана области Ω. Тогда [5]

$$\tilde{S}_\zeta F = \mathfrak{R}_\zeta F + F(\zeta)\overline{K}_\zeta \tag{13}$$

и из (8), (10) следует

$$\tilde{T}_\zeta F = \mathfrak{R}_{0\zeta} F + (F, b_{\bar{\zeta}})\overline{K}_\zeta, \tag{14}$$

где $\mathfrak{R}_{0s} F = \mathfrak{R}_\zeta F - \mathfrak{R}_\zeta A^* N(\zeta)^{-1} B S_\zeta F$ или в условиях примера

$$\mathfrak{R}_{0\zeta} F = \mathfrak{R}_\zeta F - \frac{1}{N(\zeta)} \mathfrak{R}_\zeta \Phi I_F(\zeta). \tag{15}$$

Отметим, что оператор $T : A^2_\rho(\Omega) \to A^2_\rho(\Omega)$ удовлетворяет соотношению

$$\mathfrak{R}_{0\zeta}(T - \zeta)F = F, \quad F \in D(T). \tag{16}$$

Сравнивая равенства (13) и (14), отмечаем, что $R_{0\zeta}$ в отличие от R_ζ в общем случае не является псевдорезольвентой. Действительно, ядро оператора 15) порождается элементом

$$F(s,\zeta)=\left(\int_0^\infty \frac{\overline{\Psi}(t)-\overline{\Psi(\bar\zeta)}}{t-\zeta}\,d\sigma(t)\right)\Phi(s)+1, \tag{17}$$

который при $\Psi(s)\neq \mathrm{const}$ зависит от ζ. Выберем произвольный элемент $F_0\neq 0$ такой, что $(F_0, b_{\bar\zeta})\neq 0$ в окрестности $\zeta=0$, и рассмотрим выражение

$$\mathfrak{R}_{1\zeta}F=\mathfrak{R}_{0\zeta}F-(F,\hat b_{\bar\zeta})\,\mathfrak{R}_{0\zeta}F_0,\quad (F,\hat b_{\bar\zeta})\equiv\frac{(F,b_{\bar\zeta})}{(F_0,b_{\bar\zeta})}. \tag{18}$$

Из уравнения $\mathfrak{R}_{1\zeta}F=0$ следует

$$F-(F,\hat b_{\bar\zeta})\,F_0=cF(\cdot,\zeta), \tag{19}$$

т. е.

$$F=cF(\cdot,\zeta)+c_0F_0. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), находим $c\,(F(\cdot,\zeta),\hat b_{\bar\zeta})\,F_0=0$. Подставляя (17) в (11), находим $(F(\cdot,\zeta),\hat b_{\bar\zeta})\equiv 1$. Поэтому $c=0$ и $F=c_0F_0$. Следовательно, ядро оператора $R_{1\zeta}$ одномерно, порождается элементом F_0 и не зависит от ζ. Из (16), (18) и (12) следует

$$\mathfrak{R}_{1\zeta}(T-\zeta)=1. \tag{21}$$

Поэтому $F-(T-\zeta)\,\mathfrak{R}_{1\zeta}F\in\{F_0\}^*$, т. е. произвольный элемент $F\in A^2_\rho(\Omega)$ допускает разложение $F=(T-\zeta)\,\tilde F+c_0F_0$, $\tilde F=\mathfrak{R}_{1\zeta}F$. Теперь легко установить резольвентное уравнение $(\zeta-\mu)\,\mathfrak{R}_{1\zeta}\mathfrak{R}_{1\mu}=\mathfrak{R}_{1\zeta}-\mathfrak{R}_{1\mu}$ проверкой на элементах вида $F=(T-\zeta)\,\tilde F$ и $F=F_0$. Итак, $\mathfrak{R}_{1\zeta}$ является псевдорезольвентой в пространстве $A^2_\rho(\Omega)$. Для удобства вычислений вспомогательный элемент F_0 выбираем так, что $I_{F_0}(0)=I'_{F_0}(0)=0$, $F_0(0)=1$. Тогда

$$\mathfrak{R}_{00}F_0=\mathfrak{R}_0F_0,\quad (F_0,b_0)=1. \tag{22}$$

Теперь вычислим область значений проектора P_0 на подпространстве $A^\rho_2(\Omega)$. Ограничимся случаем, когда резольвента $\tilde T_\zeta$ имеет в точке $\zeta=0$ полюс 1-го порядка, т. е. $N(0)=0$, $N'(0)\neq 0$.

Если $\Phi(0)=0$, то функция $(F,b_{\bar\zeta})$ голоморфна в точке $\zeta=0$ (см. (11)) и в силу (13), (15) $P_0F=-\operatorname{Res}_{\zeta=0}\tilde T_\zeta F=-\operatorname{Res}_{\zeta=0}\mathfrak{R}_{0\zeta}F=\dfrac{I_F(0)}{N'(0)}\mathfrak{R}_0\Phi$, т. е. P_0 проектирует $A^2_\rho(\Omega)$ на пространство, натянутое на элемент $\Phi_1=\mathfrak{R}_0\Phi$. С другой стороны, из (18) в силу (22) следует $\operatorname{Res}_{\zeta=0}\mathfrak{R}_{0\zeta}F=\operatorname{Res}_{\zeta=0}\mathfrak{R}_{1\zeta}F$. Так как псевдорезольвента $\mathfrak{R}_{1\zeta}$ ассоциирована с оператором T (т. е. выполняется (21)), то элемент $\mathfrak{R}_0\Phi$ является $\{F_0\}$-собственным элементом оператора T, отвечающим значению $^{**}\zeta=0$ [6]. Легко проверить, что $\mathfrak{R}_0\Phi$ является собственным элементом: $T\mathfrak{R}_0\Phi=0$.

Пусть теперь $\Phi(0)\neq 0$. Выражение $I_F(\zeta)$ в (11) выразим через $(F,b_{\bar\zeta})$ и подставим в (15). Полученным значением заменим $\mathfrak{R}_{0\zeta}F$ в (14). Тогда $\tilde T_\zeta F=\mathfrak{R}_\zeta F-\dfrac{F(\zeta)}{\Phi(\zeta)}\mathfrak{R}_\zeta\Phi+(F,b_{\bar\zeta})\left[\dfrac{\mathfrak{R}_\zeta\Phi}{\Phi(\zeta)}+\bar K_\zeta\right]$. Здесь $\operatorname{Res}_{\zeta=0}(F,b_{\bar\zeta})\neq 0$, поэтому P_0 проектирует $A^2_\rho(\Omega)$ на подпространство, порожденное элементом $\Phi_1=\mathfrak{R}_0\Phi+\Phi(0)\,\bar K_0$ и не принадлежащее $A^2_\rho(\Omega)$. Обращаясь к псевдоре-

* $\{F^0\}$ обозначает пространство, натянутое на элемент F_0.
** Т. е. по определению $TR_0\,\Phi\in\{\ldots\}$ вместо принадлежности $T\mathfrak{R}_0\,\Phi\in\{\ldots\}$ в случае собственного элемента.

зольвенте (18), в силу (22) получаем

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=0} \mathfrak{R}_{1\zeta} F = -\frac{1}{N'(0)} \mathfrak{R}_0 \Phi I_F(0) - \frac{\left(-\frac{\Phi(0)}{N'(0)}\right) I_F(0)}{(F_0, b_0)} \mathfrak{R}_{00} F_0 =$$

$$= -\frac{I_F(0)}{N'(0)} [\mathfrak{R}_0 \Phi - \Phi(0) \mathfrak{R}_0 F_0].$$

Легко проверить, что $T\mathfrak{R}_0 (\Phi - \Phi(0) F_0) = -\Phi(0) F_0$. Иначе говоря, проекция $\mathfrak{R}_0 \Phi$ элемента Φ_1 на $A_\rho^2(\Omega)$, «исправленная» с помощью (произвольно выбранного) элемента F_0, является $\{F_0\}$-собственным элементом $\mathfrak{R}_0 (\Phi - \Phi(0) F_0)$ оператора T, отвечающим значению $\zeta = 0$.

Приведем теперь значения параметров γ и γ_1, при которых реализуются указанные случаи. С помощью несложных вычислений находим

$$l(\zeta) \equiv \int_0^\infty \frac{d\sigma(s)}{s-\zeta} = l_0(\zeta) + i\sqrt{\zeta} e^{-2\eta\zeta}, \quad \operatorname{Im} \sqrt{\zeta} > 0, \quad \zeta \notin [0, \infty),$$

где функция $l_0(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} - \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\eta} e^{(u-2\eta)\zeta} \frac{du}{\sqrt{u}}$ голоморфна в точке $\zeta = 0$. Затем из (9) получаем

$$N(\zeta) = 1 + \gamma \left[\frac{-2}{3(4+\zeta)} + \frac{1}{3(1+\zeta)} - \frac{e^{2\eta\zeta}}{(4+\zeta)(1+\zeta)} l_0(\zeta) \right] +$$

$$+ \gamma_1 \left[\frac{-3}{8(9+\zeta)} + \frac{1}{8(1+\zeta)} - \frac{e^{2\eta\zeta}}{(9+\zeta)(1+\zeta)} l_0(\zeta) \right].$$

Положим $\eta = \frac{1}{2\pi}$. Тогда $N(0) = \frac{1}{36}(36 - 3\gamma - \gamma_1)$, $N'(0) = \gamma\left(\frac{1}{48} + \frac{1}{4\pi}\right) + \gamma_1\left(\frac{1}{324} + \frac{1}{9\pi}\right)$. В частности, при $\gamma = 48$, $\gamma_1 = -108$ получаем $\Phi(0) = N(0) = 0$, $N'(0) = \frac{18}{27} \neq 0$, собственный элемент оператора T имеет вид $(\mathfrak{R}_0\Phi)(s) = \frac{\Phi(s) - \Phi(0)}{s} = -\frac{60}{(4+s)(9+s)} e^{ns}$. Следовательно, оператор $Ly = -y'' + (y, \psi)\varphi$ имеет собственный элемент $y(t) = -12(e^{-2t} - e^{-\zeta t})$, отвечающий значению $\zeta = 0$.

1. *Лянце В. Э.* Вполне регулярное возмущение непрерывного спектра. I, II // Мат. сб.— Ч. I.— 1970.— **82**.— С. 126—156. Ч. II.— 1971.— **84**.— С. 141—158.
2. *Гасымов М. Г., Максудов Ф. Г.* О главной части резольвенты несамосопряженных операторов в окрестности спектральных особенностей // Функцион. анализ и его прил.— 1972.— **6**, вып. 1.— С. 16—24.
3. *Черемных Е. В.* Спектральный анализ некоторых несамосопряженных операторов // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 2.— С. 227—233.
4. *Черемных Е. В.* Спектральный анализ некоторых несамосопряженных разностных операторов // Там же.— 1983.— **35**, № 4.— С. 467—472.
5. *Черемных Е. В.* О минимальном продолжении псевдорезольвенты // Мат. заметки.— 1973.— **14**, вып. 1.— С. 95—99.
6. *Черемных Е. В.* Теорема о вычете псевдорезольвенты // Там же.— 1979.— **25**, вып. 3.— С. 445—454.

Львов. политехн. ин-т

Получено 09.12.86