УДК 517.9

А. Ф. Иванов

Притягивающие циклы отображений интервала, порождающие периодические решения одного дифференциально-разностного уравнения

1. В 1985 г. А. Н. Шарковский [1] сформулировал задачу о нахождении условий, при которых дифференциально-разностное уравнение

$$\nu\dot{x}(t) + x(t) = f(x(t-1)) \qquad (1)$$

с малым параметром $\nu > 0$ обладает асимптотически устойчивыми периодическими решениями, отвечающими притягивающим циклам одномерного отображения

$$f : x \to f(x). \qquad (2)$$

Следует отметить, что наличие притягивающих циклов отображения (2) само по себе еще не гарантирует существования «близких» к ним периодических решений уравнения (1). Это легко показать на простом примере. Если отображение f интервала $[-1, 1]$ в себя определить так, чтобы $f(x) \equiv 0$ при $|x| \leqslant h$, $h > 1/2$, то независимо от конкретного вида функции $f(x)$ на множестве $\{x : 1 \geqslant |x| > h\}$ каждое решение x уравнения (1) удовлетворяет условию $\lim x(t) = 0$ (при любом $\nu > 0$) [2]. Вместе с тем на множестве $\{x : 1 \geqslant |x| > h\}$ функцию $f(x)$ можно определить так, чтобы отображение (2) имело притягивающие циклы любого четного наперед заданного периода. Следовательно, циклам отображения (2) с так выбранной функцией $f(x)$ не отвечают периодические решения уравнения (1). Это явление связано с наличием аттрактора отображения f (для рассмотренного примера — притягивающей неподвижной точки $x = 0$) с «относительно большой» областью непосредственного притяжения [3].

В настоящей работе предлагаются условия существования периодических решений уравнения (1), связанные с наличием притягивающих циклов интервалов отображения (2). Определяется форма периодических решений при $\nu \to +0$ в случае, когда на цикле интервалов существует единственный притягивающий цикл отображения f. Вопрос об устойчивости периодических решений остается открытым.

Отметим также работы [4—6], касающиеся периодических решений уравнения (1). В работе [4] доказано существование периодических решений в случае, когда отображение f имеет единственную отталкивающую неподвижную точку x_0, причем $(f(x) - x_0)(x - x_0) < 0$, $x \neq x_0$. В работе [5] изучается форма таких решений при $\nu \to +0$, когда отображение f имеет единственный глобально притягивающий цикл периода два. В работе [6] содержатся результаты численного изучения периодических решений и их бифуркаций.

2. Предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна и как отображение (2) обладает инвариантным интервалом $I = [a, b]$: $f(I) = I$. Положим $\Phi = C([-1, 0], I)$. При каждом $\nu > 0$ и каждой начальной функции $\varphi \in \Phi$ существует единственное решение $x_\varphi^\nu(t)$ уравнения (1), определенное при всех $t > 0$, причем $x_\varphi^\nu(t) \in I$ [7, 8] (свойство инвариантности).

Будем говорить, что набор интервалов $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ образует цикл интервалов периода n отображения f, если $f(I_i) \subset I_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $f(I_n) \subset I_1$, $\operatorname{int} I_i \cap \operatorname{int} I_j = \varnothing$, $i \neq j$. Для заданного цикла интервалов $\{I_1, \ldots, I_n\}$ обозначим через J_k замкнутый интервал, расположенный между интервалами I_k, $I_{k+1 (\mathrm{mod}\, n)}$, концами которого служат концы интервалов I_k, $I_{k+1(\mathrm{mod}\, n)}$, $k = 1, \ldots, n$. Отметим, что J_k может состоять из одной точки. При каждом k для интервалов I_k, $I_{k+1(\mathrm{mod}\, n)}$, J_k определим их числовые характеристики:

$$l_1(I_k) = [\sup\{f(J_k)\} - \sup\{I_{k+1}\}]/[\sup\{f(J_k)\} - \sup\{f(I_k)\}], \quad \text{если}$$

$\sup\{f(J_k)\} > \sup\{f(I_k)\}$; $l_1(I_k) = 0$, если $\sup\{f(J_k)\} \leqslant \{f(I_k)\}$;

$$l_2(I_k) = [\inf\{I_{k+1}\} - \inf\{f(J_k)\}]/[\inf\{f(I_k)\} - \inf\{f(J_k)\}],\ \text{если}$$

$$\inf\{f(I_k)\} > \inf\{f(J_k)\};\quad l_2(I_k) = 0;\ \text{если}\ \inf\{f(I_k)\} \leqslant \inf\{f(J_k)\};$$

$$l(I_k) = \max\{l_1(I_k),\ l_2(I_k)\};$$

$$m(I_k) = [\inf\{f(I_k)\} - \inf\{I_{k+1}\}]/[\inf\{f(I_k)\} - \sup\{I_k\}],\ \text{если}$$

$$\sup\{I_k\} < \inf\{f(I_k)\};\quad m(I_k) = [\sup\{I_{k+1}\} - \sup\{f(I_k)\}]/[\inf\{J_k\} -$$

$$- \sup\{f(I_k)\}],\ \text{если}\ \sup\{f(I_k)\} < \inf\{I_k\};\ m(I_k) = 0,\ \text{если}\ \sup\{I_k\} =$$

$$= \inf\{f(I_k)\},\ \text{либо}\ \inf\{I_k\} = \sup\{f(I_k)\}.$$

Положим $\Phi_k = C([-1, 0], I_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1. *Предположим, что отображение f имеет цикл интервалов $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, для которого $m(I_k) > l(I_k)$ при всех $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда существует $\nu_0 > 0$ такое, что при каждом $0 < \nu \leqslant \nu_0$ уравнение* (1) *имеет периодическое решение $x = p(t)$ периода $T = n + O(\nu)$, $\nu \to +0$. Это периодическое решение обладает следующим свойством: существуют моменты времени $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < T$ такие, что $p(t_k + t) \in I_k$ $\forall\ t \in [-1, 0]$.*

Поскольку $l(I_k) \geqslant 0$, то из условий теоремы следует $m(I_k) > 0$ при всех $1 \leqslant k \leqslant n$. Условие $m(I_k) > 0$ означает (см. определение), что $\{f(I_k)\}$ является правильным подмножеством множества $\{I_{k+1(\mathrm{mod}\ n)}\}$, т. е. каждый из интервалов I_k отображается вовнутрь интервала $I_{k+1(\mathrm{mod}\ n)}$, $k = 1, \ldots, n$. Легко видеть, что тогда существует цикл интервалов $\{I_1', I_2', \ldots, I_n'\}$ такой, что $I_k' \subset I_k$, $I_k' \neq I_k$, $f(I_k') = I_{k+1(\mathrm{mod}\ n)}'$. В самом деле, следует положить $I_k' = \bigcap\limits_{i \geqslant 0} f^{ni}(I_k)$, где f^j — j-я итерация отображения f. Цикл интервалов $\{I_1', \ldots, I_n'\}$ (возможно совпадающий с периодической траекторией) является аттрактором, а множество $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ составляет часть (правильную) его области непосредственного притяжения. Условия $m(I_k) > l(I_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, грубо говоря, отражают тот факт, что множество $I_1 \cup \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ «существенно больше» множества $I_1' \cup I_2' \cup \ldots \cup I_n'$.

В случае, когда цикл интервалов $\{I_1', \ldots, I_n'\}$ представляет собой периодическую траекторию, теорему 1 можно существенно уточнить.

Теорема 2. *Предположим, что отображение f имеет цикл интервалов $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, для которого $m(I_k) > l(I_k)$ при всех $1 \leqslant k \leqslant n$. Если этот цикл интервалов содержит единственный цикл $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ отображения f, то периодическое решение $p(t)$, гарантированное теоремой 1, сходится при $\nu \to +0$ к функции $p_0(t) = A_k$ при $t \in [k-1, k)$ (mod n). Сходимость равномерная на каждом компактном подмножестве $\mathbb{R}$, не содержащем точки $t = k$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Заметим, что хотя в условиях теоремы 2 имеет место сходимость $p(t) \to p_0(t)$, $\nu \to +0$, единственность периодического решения $p(t)$ не утверждается. Более того, таких периодических решений может быть несколько, или даже счетное число [8, 9].

Доказательство теоремы 1 непосредственно вытекает из следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. *Если выполняется неравенство $m(I_k) > l(I_k)$, то существует $\nu_0^{(k)} > 0$ такое, что при любом $0 < \nu \leqslant \nu_0^{(k)}$ и каждом $\varphi \in \Phi_k$ можно указать $\tau_k = \tau_k(\varphi)$ такое, что $1 < \tau_k \leqslant 1 + M_k\nu$, $x_\varphi^\nu(\tau_k + s) \in \Phi_{k+1(\mathrm{mod}\ n)}$, $s \in [-1, 0]$, где M_k — постоянная, зависящая только от $f(x)$.*

Лемма 1 позволяет определить при каждом $1 \leqslant k \leqslant n$ оператор F_k, отображающий Φ_k в $\Phi_{k+1(\mathrm{mod}\ n)}$ следующим образом: $(F_k\varphi)(s) = x_\varphi^\nu(\tau_k + s)$, $s \in [-1, 0]$, $\varphi \in \Phi_k$. Очевидно, что оператор $F = F_n \circ F_{n-1} \circ \ldots \circ F_1$ отображает Φ_1 в себя и имеет в силу теоремы Шаудера неподвижную точку $\varphi_0 \in \Phi_1$. Тогда функция $p(t) = x_{\varphi_0}^\nu(t)$ — периодическое решение уравнения (1), удовлетворяющее заключению теоремы.

Отметим, что условия $m(I_k) > l(I_k)$, $k = 1, \ldots, n$, теоремы 1 обобщают ранее приведенные условия [10].

Доказательство теоремы 2 опирается на следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $[s_1, s_2]$ — *фиксированный подынтервал начального множества* $[-1, 0]$. *Каковы бы ни были положительные числа* ε, δ, *можно указать* $\nu_0 > 0$ *такое, что при каждом* $0 < \nu \leqslant \nu_0$ $\sup\{|x_\varphi^\nu(t) - f(\varphi(t-1))|,\ t \in [s_1 + 1 + \delta, s_2 + 1]\} \leqslant \varepsilon$.

Так как $f(x)$ — непрерывная функция, то из того, что $\sup\{|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|,\ s \in [t', t''] \subset [-1, 0]\}$ мало, следует, что $\sup\{|f(\varphi_1(s)) - f(\varphi_2(s))|,\ s \in [t', t'']\}$ также мало. Поэтому из леммы 2 вытекает, что каковы бы ни были начальная функция $\varphi \in \Phi$ и положительные числа ε, δ, а также натуральное число N_0, можно указать $\nu_0 > 0$ такое, что при каждом $0 < \nu \leqslant \nu_0$ и каждом $0 \leqslant k \leqslant N_0$ $\sup\{|x_\varphi^\nu(t) - f^k(\varphi(t-k))|,\ t \in [k - 1 + \delta, k]\} \leqslant \varepsilon$. Для завершения доказательства теоремы нужно выбрать $\varphi \in \Phi_1$ и принять во внимание, что: а) $F^i\varphi \in \Phi_1$ для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$; б) для произвольного ε_1 существует N_1 такое, что при $i \geqslant N_1$ $\sup\{|A_k - f^{ni+k-1}(\varphi(s))|,\ s \in [-1, 0]\} \leqslant \varepsilon_1$, $k = 1, \ldots, n$.

3. Доказательство леммы 1. Пусть k фиксировано. Положим $I_k = [a_k, b_k]$, $I_{k+1 (\mathrm{mod}\, n)} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$, $f(I_k) = [a'_{k+1}, b'_{k+1}]$. Для определенности будем считать, что $b_k \leqslant a_{k+1}$. Тогда $J_k = [b_k, a_{k+1}]$. Поскольку $m(I_k) > 0$, то $a'_{k+1} > a_k$.

Утверждение 1. *Для каждого* $\varphi \in \Phi_k$ *существует момент времени* $t_1 = t_1(\varphi) \geqslant 0$ *такой, что* $x_\varphi^\nu(t_1) = b_k$.

В самом деле, так как $\inf\{f(I_k)\} = a'_{k+1} > b_k$, то решение $x_\varphi^\nu(t)$ монотонно возрастает при всех тех $t > 0$, для которых $x_\varphi^\nu(t) < a'_{k+1}$. Если при этом $x_\varphi^\nu(t) \leqslant b_k$, то из уравнения (1) находим $\dot{x}_\varphi^\nu(t) \geqslant (1/\nu)(a'_{k+1} - b_k)$. Отсюда и следует существование t_1 такого, что $x_\varphi^\nu(t_1) = b_k$. Отметим, что поскольку $\varphi(0) \in I_k$, то $t_1 \leqslant \nu \ln[(a'_{k+1} - a_k)/(a'_{k+1} - b_k)]$.

В силу утверждения 1 в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением подмножества начальных функций $\Phi_k^0 = \{\varphi \in \Phi_k \mid \varphi(0) = b_k\}$.

Утверждение 2. *Можно указать* $\nu'_0 > 0$ *такое, что при любом* $0 < \nu \leqslant \nu'_0$ *для каждого* $\varphi \in \Phi_k^0$ *существует момент времени* $t_2 = t_2(\varphi, \nu)$, *для которого* $x_\varphi^\nu(t_2) = a_{k+1}$, $x_\varphi^\nu(t)$ *монотонно возрастает при* $t \in [0, t_2]$, $x_\varphi^\nu(t) \in I_{k+1 (\mathrm{mod}\, n)}$ $\forall t \in [t_2, 1]$.

Действительно, поскольку $f(I_k) = [a'_{k+1}, b_{k+1}] \subset I_{k+1 (\mathrm{mod}\, n)}$, $a'_{k+1} > b_k$, $\varphi(0) = b_k$, то $\forall t \in [0, 1]$ получаем оценку $\alpha(t) \leqslant x_\varphi^\nu(t) \leqslant \beta(t)$, где $\alpha(t) = a'_{k+1} + (b_k - a_{k+1}) \exp(-t/\nu)$, $\beta(t) = b'_{k+1} + (b_k - b'_{k+1}) \exp(-t/\nu)$. Из полученной оценки непосредственно следует, что утверждение справедливо при $\nu'_0 = 1/\ln[(a_{k+1} - b_k)/(a'_{k+1} - a_{k+1})]$, причем $t_2 \leqslant \nu \ln[(a'_{k+1} - b_k)/(a_{k+1} - a_{k+1})]$.

Утверждение 3. *Если выполняется неравенство* $m(I_k) > l(I_k)$, *то можно указать* $\nu''_0 > 0$ *такое, что при любом* $0 < \nu \leqslant \nu''_0$ *для каждого* $\varphi \in \Phi_k^0$ *соответствующее решение* $x_\varphi^\nu(t)$ *удовлетворяет условию* $x_\varphi^\nu(t) \in I_{k+1 (\mathrm{mod}\, n)}$ $\forall t \in [1, 1 + t_2]$.

Поскольку $x_\varphi^\nu(t-1) \in J_k$ $\forall t \in [1, 1 + t_2]$, то на промежутке $[1, 1 + t_2]$ получаем оценку $\alpha(t) \leqslant x_\varphi^\nu(t) \leqslant \beta(t)$, где $\alpha(t) = \xi_k + (\alpha(1) - \xi_k) \times \exp\{-(t-1)/\nu\}$, $\beta(t) = \eta_k + (\beta(1) - \eta_k) \exp\{-(t-1)/\nu\}$, $\xi_k = \inf\{f(x),\ x \in J_k\}$, $\eta_k = \sup\{f(x),\ x \in J_k\}$. Учитывая соотношения $\alpha(1) = a'_{k+1} + (b_k - a'_{k+1}) \exp(-1/\nu)$, $\beta(1) = b_{k+1} + (b_k - b_{k+1}) \exp(-1/\nu)$, а также неравенства $m(I_k) > l_1(I_k)$, $m(I_k) > l_2(I_k)$, $t_2 \leqslant \nu \ln[(a'_{k+1} - b_k)/(a'_{k+1} - a_{k+1})]$, находим, что существует ν''_0 такое, что при всех $0 < \nu \leqslant \nu''_0$ выполняется $\alpha(1 + t_2) \geqslant a_{k+1}$, $\beta(1 + t_2) \leqslant b_{k+1}$. Так как $\alpha(t)$ убывает, а $\beta(t)$ возрастает, то из последних неравенств следует требуемое соотношение $x_\varphi^\nu(t) \in I_{k+1(\mathrm{mod}\, n)}$, $t \in [1, 1+t_2]$. Для завершения доказательства леммы достаточно положить $\nu_0^{(k)} = \min(\nu_0', \nu_0'')$, $\tau_k = t_1 + t_2 + 1$, $M_k = \nu \ln[(a_{k+1}' - a_k)/(a_{k+1}' - a_{k+1})]$.

Доказательство леммы 2. В силу автономности уравнения (1) можно считать, что $s_1 = -1$. При всех $t \in [0, s_2 + 1]$ решение $x_\varphi^\nu(t)$ уравнения (1) представимо в виде

$$x_\varphi^\nu(t) = \varphi(0)\exp(-t/\nu) + (1/\nu)\int_0^t \exp\{(s-t)/\nu\} f(\varphi(s-1))\, ds.$$

Используя соотношение $\exp(-t/\nu) + (1/\nu)\int_0^t \exp\{(s-t)/\nu\}\, ds = 1$, получаем

$$|x_\varphi^\nu(t) - f(\varphi(t-1))| \leqslant |\varphi(0) - f(\varphi(t-1))| \exp(-t/\nu) +$$

$$+ (1/\nu)\int_0^t \exp\{(s-t)/\nu\} |f(\varphi(s-1)) - f(\varphi(t-1))|\, ds, \quad t \in [0, s_2 + 1].$$

При фиксированных ε, δ можно указать $\nu_0' > 0$ такое, что $\sup\{|\varphi(0) - f(\varphi(t-1))| \exp(-t/\nu),\ t \in [\delta, s_2 + 1]\} \leqslant \varepsilon/3$. Так как $f(\varphi(s))$ равномерно непрерывна на интервале $[s_1, s_2]$, то для заданного $\varepsilon > 0$ существует $\sigma > 0$ такое, что $|f(\varphi(t')) - f(\varphi(t''))| \leqslant \varepsilon/3$, лишь только $|t' - t''| \leqslant \sigma$. Имеем

$$(1/\nu)\int_0^{t-\sigma} \exp\{(s-t)/\nu\} |f(\varphi(s-1)) - f(\varphi(t-1))|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant M'(1/\nu)\int_0^{t-\sigma} \exp\{(s-t)/\nu\}\, ds \leqslant \varepsilon/3$$

при всех $0 < \nu \leqslant \nu_0''$ для некоторых M', $\nu_0'' > 0$. Кроме того, $(1/\nu) \times \int_{t-\sigma}^t \exp\{(s-t)/\nu\} |f(\varphi(s-1)) - f(\varphi(t-1))|\, ds \leqslant \sup\{|f(\varphi(s-1)) - f(\varphi(t-1))|, s : |s-t| < \sigma\} \leqslant \varepsilon/3$. Следовательно, $\sup\{|x_\varphi^\nu(t) - f(\varphi(t-1))|,\ t \in [\delta, s_2 + 1]\} \leqslant \varepsilon$ при $0 < \nu \leqslant \nu_0 = \min(\nu_0', \nu_0'')$. Лемма доказана.

4. В качестве простого примера, иллюстрирующего условия теоремы, можно взять уравнение (1) с непрерывной функцией $f(x)$ близкой к кусочно постоянной.

Пусть $2 \leqslant n$ — фиксированное натуральное число. Возьмем два набора действительных чисел $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ и $\{A_1, \ldots, A_n\}$ таких, что $A_n < a_1 < A_1 < a_2 < A_2 < \ldots < a_{n-1} < A_{n-1}$, и малое положительное число δ (например, $\delta \leqslant \delta_0$, где $\delta_0 = \min\{(a_1 - A_n)/2,\ (a_i - a_{i-1})/2,\ i = 2, \ldots, n-1\}$. Определим непрерывную функцию $f_0(x)$ следующим образом: $f_0(x) = A_1$ при $x \leqslant a_1 - \delta$; $f_0(x) = A_k$ при $x \in [a_{k-1} + \delta, a_k - \delta]$, $k = 2, \ldots, n-1$; $f_0(x) = A_n$ при $x \geqslant a_{n-1} + \delta$; $f_0(x)$ — произвольная монотонная функция на промежутках $[a_k - \delta, a_k + \delta]$, $k = 1, \ldots, n-1$ (например, линейная). Легко видеть, что отображение f_0 имеет инвариантный интервал $I = [A_n, A_{n-1}]$, а также цикл интервалов $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ на нем, где $I_1 = [A_n, a_1 - \delta]$, $I_2 = [a_1 + \delta, a_2 - \delta]$, $\ldots$, $I_{n-1} = [a_{n-2} + \delta, a_{n-1} - \delta]$, $I_n = [a_{n-1} + \delta, A_{n-1}]$. Более того, существует притягивающий цикл $\{A_1, \ldots A_n\}$, область непосредственного притяжения которого содержит цикл интервалов $\{I_1, \ldots, I_n\}$. Используя определения, нетрудно убедиться, что $l_1(I_1) = (A_2 - a_2 + \delta)/(A_2 - A_1)$, $l_2(I_1) = 0, \ldots, l_1(I_{n-2}) = (A_{n-1} - a_{n-1} + \delta)/(A_{n-1} - A_{n-2})$, $l_2(I_{n-2}) = 0$, $l_1(I_{n-1}) = 0$, $l_2(I_{n-1}) = (a_{n-1} + \delta - A_n)/(A_{n-1} - A_n)$, $l_1(I_n) = (A_{n-1} - a_1 + \delta)/(A_{n-1} - A_n)$, $l_2(I_n) = 0$, $m(I_k) = (A_k - a_k - \delta)/(A_k - a_k + \delta)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Поскольку $\lim\limits_{\delta \to +0} l(I_k) < 1$, $\lim\limits_{\delta \to 0} m(I_k) = 1$ для всех k, то существует $\delta_1 > 0$ такое, что при каждом $0 < \delta \leqslant \delta_1$ выполняются предпосылки теоремы. Следовательно, уравнение (1) при $f(x) = f_0(x)$, $\delta \ll 1$ имеет периодическое решение $p(t)$ с периодом $n + O(\nu)$, $\nu \to +0$. Используя кусочно-постоянную форму $f_0(x)$ на интервалах I_k, $k = 1, \ldots, n$, периодическое решение $p(t)$ можно получить в явном виде. При $\nu \to +0$ $p(t)$ равномерно сходится на компактных множествах, не содержащих точки $t = i$, $i \in Z$, к кусочно-постоянной функции $p_0(t) = A_{i (\mathrm{mod}\, n)}$, $t \in [i - 1, i) (\mathrm{mod}\, n)$, $i \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что теорема остается справедливой при малых возмущениях $f_0(x)$.

1. *Шарковский А. Н.* О периодических решениях нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Успехи мат. наук.— 1985.— **40**, вып. 5.— С. 242.
2. *Иванов А. Ф.* О непрерывной зависимости и асимптотическом поведении решений сингулярно-возмущенных дифференциально-разностных уравнений.— Киев, 1985.— 24 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.64).
3. *Шарковский А. Н., Иванов А. Ф.* Сингулярные возмущения аттракторов разностных уравнений // Тез. докл. всесоюз. конф. «Функционально-дифференциальные уравнения».— Душанбе: Изд-во Душанб. ун-та, 1987.— Ч. 2.— С. 151—152.
4. *Hadaler K. P., Tomiuk J.* Periodic solutions of differential-difference equations // Arch. Ration. Mech. Anal.— 1977.— **65**.— P. 87—96.
5. *Mallet-Paret J., Nussbaum R. D.* Global continuation and asymptotic behavior for periodic solutions of differential delay equations.— Preprint N 85-15.— Brown University, 1985.
6. *Chow S. N., Green D.* Some results on singular delay differential equations // Lect. Notes Pure and Appl. Math.— 1985.— **98**.— P. 161—182.
7. *Сингулярные* возмущения разностных уравнений с непрерывным временем / С. Я. Алиев, А. Ф. Иванов, Ю. Л. Майстренко, А. Н. Шарковский.— Киев, 1984.— 41 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.33).
8. *Mallet-Paret J., Nussbaum R. D.* A bifurcation gap for a singularly perturbed delay equation // Chaotic Dynamics and Fractals.— New York : Acad. press, 1986.—P. 263—286.
9. *Алиев С. Я.* Асимптотические свойства решений одного дифференциально-разностного уравнения // Дифференциально-разностные уравнения и задачи математической физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 126—130.
10. *Иванов А. Ф.* Периодические решения сингулярно-возмущенных дифференциально-разностных уравнений // Дифференциально-функциональные уравнения и их приложения к нелинейным краевым задачам.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 11—17.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 17.09.87