УДК 517.911

М. У. Ахметов, Н. А. Перестюк

О дифференцируемой зависимости решений импульсных систем от начальных данных

Во многих прикладных задачах [1—3] встречаются системы, подвергающиеся импульсному воздействию в момент достижения решением определенных точек в расширенном фазовом пространстве. Между тем такие системы, в отличие от уравнений, в которых решения подвергаются толчкам в фиксированные моменты времени, выбранные случайным образом [4, 5], изучены недостаточно.

В настоящей работе исследуются основные свойства дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях: существование и единственность решений, зависимость решений от начальных данных и параметров. Полученные результаты применяются затем для изучения периодических импульсных систем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dx/dt = f(t, x), \quad t \neq t_i(x), \quad \Delta x|_{t=t_i(x)} = I_i(x), \tag{1}$$

в которой $x \in R^n$, функции $f(t\, x)$, $I_i(x)$, $t_i(x)$ определены при всех $t \in R$, $x \in R^n$, $i \in Z$ (Z — множество целых чисел) и непрерывные по t и x. Каждый компакт из $R \times R^n$ пересекается с конечным числом поверхностей $t = t_i(x)$, и $t_i(x) > t_{i-1}(x)$ для всех $x \in R^n$ и $i \in Z$. Пусть $(t_0, x_0) \in R \times R^n$. Выделим ограниченное замкнутое множество $F\{(x, t, i) \mid \|x - x_0\| \leqslant d,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T,\ i = \overline{i_0, i_{0+p}}\}$, где $t = t_i(x)$, $i = \overline{i_0, i_0 + p}$, — все поверхности, пересекающиеся с областью $(t, x): t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$, $\|x - x_0\| \leqslant d$.

Пусть $M = \max\{\max\limits_F \|f(t, x)\|, \max\limits_F \|I_i(x)\|\}$. Предположим также, что каждое решение системы (1) встречается с любой из поверхностей $t = t_i(x)$ не больше одного раза. Обозначим через $i(t_0, \zeta)$ число поверхностей $t = t_i(x)$, имеющих хотя бы одну общую точку с областью $(t, x): t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$, $\|x - x_0\| \leqslant d$. Пусть $h = \min(T, t')$, где t' — верхняя грань множества решений неравенства $t + i(t_0, t) \leqslant d/M$.

Используя свойства отображений $I_i(x)$ и теорему о существовании и единственности решения для обыкновенных дифференциальных уравнений, можно показать, что справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Если функции $f(t, x)$ и $I_i(x)$ равномерно на множестве F удовлетворяют условию Липшица, то задача Коши $x(t_0) = x_0$ для системы* (1) *на интервале $[t_0, t_0 + h]$ имеет единственное решение.*

Пусть $x_j(t)$, $j = 1, 2,$ — решения системы (1), t_i^j — точки разрыва этих решений, т. е. решения уравнений $t = t_i(x_j(t))$, $i = \overline{i_0, i_0 + p}$. Так как точки t_i^1 и t_i^2, вообще говоря, не совпадают, то говорить о равномерной по всем t близости этих решений нельзя. Поэтому для кусочно-непрерывных функций, рассматриваемых в работе, определим следующую топологию.

Будем говорить, что решение $x_1(t)$ находится в ε-окрестности решения $x_2(t)$ если: 1) мера симметрической разности областей существования этих решений не больше чем ε; 2) для всех i выполняется неравенство $|t_i^1 - t_i^2| < \varepsilon$; 3) неравенство $\|x_1(t) - x_2(t)\| < \varepsilon$ справедливо для всех t, удовлетворяющих условию $|t - t_i^2| > \varepsilon$.

Топологию, определенную с помощью ε-окрестностей, будем называть B-топологией. Она является хаусдорфовой, ее можно построить и в том случае, когда решения x_1 и x_2 определены на полуоси или на всей вещественной оси.

Топологии для кусочно-непрерывных функций впервые были определены в работах [6, 7]. В [8] понятие ε-окрестности неявно применяется для определения разрывной почти периодической функции.

Т е о р е м а 2. *Если дифференциальное уравнение с импульсным воздействием*

$$dx/dt = f(t, x, \mu), t \neq t_i(x, \mu), \Delta x|_{t=t_i(x,\mu)} = I_i(x, \mu) \tag{2}$$

удовлетворяет независимо от параметра $\mu \in R^m$ всем указанным для системы (1) *условиям и, кроме того, непрерывно зависит от этого параметра, то решение $x(t, \mu)$ с начальным условием $x(t_0, \mu) = x_0$ непрерывно в B-топологии зависит от μ в каждой точке μ_0 такой, что $t_0 \neq t_i(x_0, \mu_0)$.*

З а м е ч а н и е. Точка (t_0, x_0) не должна принадлежать ни одной из поверхностей $t = t_i(x, \mu_0)$. В противном случае можно выбрать сколь угодно близкое к μ_0 значение μ, для которого $t_k(x_0, \mu) < t_0$ при одновременном выполнении условия $t_0 = t_k(x_0, \mu_0)$, и значит, уже в момент $t_k +$ решение $x(t, \mu)$ отличается от решения $x(t, \mu_0)$ на величину порядка $I_k(x_0, \mu_0)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы о непрерывной зависимости для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Доказательство непрерывной зависимости системы (1) от начальных данных t_0 и x_0 сводится к исследованию зависимости от параметра.

Продолжим исследование системы (1), предположив дополнительно, что внутри области F существуют непрерывные производные $\partial f(t, x)/\partial x_j$, $\partial I_i(x)/\partial x_j$, $\partial t_i(x)/\partial x_j$, $j = \overline{1, n}$.

Будем говорить, что кусочно-непрерывная функция $u_j(t)$ является B-производной решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) по x_0^j, $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^j, \ldots, x_0^n)$, если функция $\xi u_j(t)$ находится в θ-окрестности разности $x_j(t) - x(t)$, где $x_j(t)$ — решение уравнений (1) с начальным условием $x_j(t_0) = (x_0^1, \ldots, x_0^j + \xi, \ldots, x_0^n)$ и $\theta \to 0$ при $\xi \to 0$. Кроме того, для всех t из $[t_0, t_0 + T]$, лежащих вне θ-окрестностей точек разрыва решения $x(t)$, справедливо неравенство $\| x_j - x - \xi u_j \| < \theta_1$, где θ_1 — бесконечно малая высшего порядка чем ξ.

Аналогично определяются B-производные по t_0, и в случае системы (2) по параметрам μ_k, $k = \overline{1, m}$.

Теорема 3. *Решение $x(t)$ системы (1), удовлетворяющей всем указанным выше условиям, имеет B-производные по t_0 и x_0^j, которые являются решениями системы*

$$du/dt = A(t)u, t \neq \tau_i, \quad \Delta u|_{t=\tau_i} = P_i u, \tag{3}$$

с начальными значениями соответственно $-f(t_0, x_0)$ *и* $e^j = \underbrace{(0, \ldots 0, 1,}_{j}$ $0, \ldots, 0)$.

В системе (3) τ_i — *точки разрыва решения* $x(t)$, $A(t) = \partial f(t, x(t))/\partial x$, $P_i = V_i - W_i + \dfrac{\partial I_i(x(\tau_i))}{\partial x}(E + V_i)$, *где* V_i, W_i — *такие матрицы, что для любого* $z \in R^n$ *выполняются равенства*

$$V_i z = \frac{\langle \partial t_i(x(\tau_i))/\partial x, z\rangle}{1 - \langle \partial t_i(x(\tau_i))/\partial x, f(\tau_i x(\tau_i))\rangle} f(\tau_i, x(\tau_i)),$$

$$W_i z = \frac{\langle \dfrac{\partial t_i(x(\tau_i))}{\partial x}, z\rangle}{1 - \langle \dfrac{\partial t_i(x(\tau_i))}{\partial x}, f(\tau_i, x(\tau_i))\rangle} f(\tau_i, x(\tau_i +)).$$

Доказательство. Докажем теорему сначала для x_0^1. Согласно теореме 2 существует бесконечно малая величина $V(\xi)$ такая, что решение $x_1(t) = x(t, t_0, x_0 + \xi)$, $\xi = (\xi, 0, \ldots, 0)$ находится в $V(\xi)$-окрестности решения $x(t)$, определенного на промежутке $[t_0, t_0 + T]$.

Пусть θ_i — точки разрыва решения $x_1(t)$. Для простоты, не нарушая общности, будем полагать, что $\theta_i \geqslant \tau_i$. По условию теоремы для точек $t \bar{\in} \bigcup (\tau_i, \theta_i)$ выполняются условия

$$f(t, x_1(t)) - f(t, x(t)) = (A(t) + Q(\xi))(x_1(t) - x(t)),$$

$$I_i(x_1(\tau_i)) - I_i(x(\tau_i)) = (\partial I_i(x(\tau_i))/\partial x + R(\xi))(x_1(\tau_i) - x(\tau_i)),$$

$$t_i(x_1(\theta_i)) - t_i(x(\tau_i)) = \langle \partial t_i(x(\tau_i))/\partial x + r(\xi), x_1(\theta_i) - x(\tau_i)\rangle,$$

где $\| Q(\xi) \| < \alpha$, $\| R(\xi) \| < \alpha$, $\| r(\xi) \| < \alpha$, α — бесконечно малая величина.

Решения $x(t)$ и $x_1(t)$ имеют интегральные представления

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau + \sum_{t_0 \leqslant \tau_i < t} I_i(x(\tau_i)),$$

$$x_1(t) = x_0 + \xi + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau))\, d\tau + \sum_{t_0 \leqslant \theta_i < t} I_i(x_1(\theta_i)).$$

Пусть $u_1(t)$ — решение уравнений (3) с начальным значением $u_1(t_0) = e^1$. Обозначим $k = \sup\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T} \| A(t) \|$, $\nu(t) = x_1(t) - x(t) - \xi u_1(t)$.

Если $t \in [t_0, \tau_1]$, то найдем $\| \nu(t) \| \leqslant \alpha V(\xi)(\tau_1 - t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} k \| \nu(\tau) \| d\tau$. Отсюда по лемме Гронуолла — Беллмана следует

$$\| \nu(t) \| \leqslant \alpha V(\xi)(\tau_1 - t_0) e^{k(\tau_1 - t_0)}. \tag{4}$$

Пусть $\Delta t = \theta_1 - \tau_1$. Используя дифференцируемость поверхностей разрыва и неравенство (4), получаем

$$\Delta t = \langle \partial t_1(x(\tau_1))/\partial x + r(\xi), \quad \xi u_1(\tau_1) + \Delta t(f(\tau_1, x(\tau_1)) + \xi A(\tau_1) u(\tau_1) + p_0(\xi)) \rangle,$$

где p_0 — бесконечно малая величина.

Отсюда вытекает, что существует бесконечно малая величина $p_1(\xi)$ высшего порядка чем ξ, для которой верно равенство

$$\Delta t = \frac{\xi \langle \partial t_1(x(\tau_1))/\partial x, u_1(\tau_1) \rangle}{1 - \langle \partial t_1(x(\tau_1))/\partial x, f(\tau_1, x(\tau_1)) \rangle} + p_1(\xi). \tag{5}$$

Оценим теперь разность $\nu(\theta_1 +) - \nu(\tau_1)$. Имеем

$$\nu(\theta_1 +) - \nu(\tau_1) = \int\limits_{\tau}^{\theta_1} (f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x(\tau)) - \xi A(\tau) u_1(\tau)) d\tau +$$

$$+ I_1(x_1(\theta_1)) - I_1(x(\tau_1)) - \xi P_1 u_1(\tau_1) = \Delta t (f(\tau_1, x(\tau_1) + \xi u(\tau_1) + p_2(\xi)) -$$

$$- f(\tau_1, x(\tau_1) + I_1(x(\tau_1)) + p_3(\xi)) - \xi (A(\tau_1) u(\tau_1) + p_4(\xi)) +$$

$$+ I_1\Big(x(\tau_1) + \xi u(\tau_1) + \int\limits_{\tau_1}^{\theta_1} f(\tau, x_1(\tau)) d\tau\Big) - I_1(x(\tau_1)) - \xi P_1 u_1(\tau_1),$$

где p_2, p_3, p_4 — бесконечно малые величины.

Из последнего равенства в силу ограниченности функции u_1 вытекает, что $\nu(\theta_1 +) - \nu(\tau_1) = W(\xi)$, где $\| W(\xi) \| / \xi \to 0$ при $\xi \to 0$. Значит, $\| \nu(\theta_1 +) \| \leqslant W(\xi) + \alpha V(\xi)(\tau_1 - t_0) e^{k(\tau_1 - t_0)}$.

Ввиду компактности F можно считать, что $W(\xi)$ не зависит от τ_i. Поэтому, применив осуществленную выше оценку p раз, найдем, что для любого $t \,\bar{\in}\, \bigcup\limits_{i=1}^{p} (\tau_i, \theta_i)$ справедливо неравенство $\| \nu(t) \| < e^{kT} (pW(\xi) + \alpha V(\xi) T)$, которое вместе с соотношением (5) и доказывает теорему для x_0^1. Таким же образом ее справедливость доказывается для всех остальных x_0^j, $j = \overline{2, n}$.

Применив B-производные по x_0^j, можно показать, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, что теорема верна для t_0.

Используем теперь полученные результаты для исследования периодических систем. Рассмотрим квазилинейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} dx/dt = A(t) x + f(t) + \mu \varphi(t, x), t \neq t_i + \mu t_i(x), \\ \Delta x |_{t = t_i + \mu t_i(x)} = B_i x + g_i + \mu \psi_i(x), \end{gathered} \tag{6}$$

в которой $A(t)$ и $f(t)$ — непрерывные периодические с периодом T матрица и вектор-функция, $\varphi(t, x) \in C^{(0,1)}_{(t,x)}(R \times R^n)$, $\psi_i(x), t_i(x) \in C^{(1)}(R^n)$, $\varphi(t + T, x) = \varphi(t, x)$, $\psi_{i+p}(x) = \psi_i(x)$, $t_{i+p}(x) = t_i(x)$, $t_{i+p} = t_i + T$, $B_{i+p} = B_i$, $g_{i+p} = g_i$, $i \in Z$, μ — малый параметр.

Теорема 4. *Пусть система*

$$dy/dt = A(t) y + f(t), t \neq t_i, \Delta y |_{t = t_i} = B_i y + g_i \tag{7}$$

имеет единственное T-периодическое решение $y_0(t)$. Тогда при достаточно малом μ система (6) имеет единственное T-периодическое решение, которое при $\mu \to 0$ в B-топологии стремится к решению $y_0(t)$.

Доказательство. Пусть $y(t, \eta, \mu)$ — решение системы (6), удовлетворяющее начальному условию $y(0, \eta, \mu) = \eta$, $y_0(t) = y(t, \eta_0, 0)$ — периодическое с периодом T решение порождающей системы (7). Не нарушая общности можно считать, что точка $(0, \eta_0)$ вместе со своей некоторой окрестностью не принадлежит ни одной из плоскостей $t = t_i$. Для того чтобы при достаточно малом μ решение $y(t, \eta, \mu)$ было T-периодическим, необходимо и достаточно разрешимости уравнения

$$y(T, \eta, \mu) - h = 0 \tag{8}$$

относительно η.

Пусть $D(\eta, \mu) = y(T, \eta, \mu) - \eta$. Покажем, что определитель $D'_\eta(\eta_0, 0)$ существует и отличен от нуля. Действительно, по теореме 3 существуют B-производные $\partial y(t, \eta, \mu)/\partial\eta_j$, $j = \overline{1, n}$. Пусть $Z(t, \eta, \mu) = (\partial y_i \partial\eta_k)$, $i, k = \overline{1, n}$.

При достаточно малом μ точка $(0, \eta_0)$ не попадает ни на одну из поверхностей $t = t_i + \mu t_i(x)$ вместе с некоторой своей окрестностью. В этой окрестности B-производная совпадает с обычной производной.

Дифференцируя по η систему (6), убеждаемся, что $Z(t, \eta_0, 0)$ является нормированной фундаментальной матрицей для (7). С другой стороны, $D^1_\eta(\eta_0, 0) = \det(Z(T, \eta_0, 0) - E)$ и так как в силу условий теоремы собственные числа матрицы $Z(T, \eta_0, 0)$ отличны от единицы [4], то $D^1_\eta(\eta_0, 0) \neq 0$. Поэтому уравнение (8) в достаточно малой окрестности точки $(0, \eta_0)$ разрешимо относительно η. Существование и единственность T-периодического решения доказаны. Стремление в топологии решения $y(t, \eta, \mu)$ к $y_0(t)$ при $\mu \to 0$ вытекает из теоремы 2. Теорема доказана.

Пусть система (1) удовлетворяет условиям теоремы 3, периодическая с периодом T, $f(t + T, x) = f(t, x)$, $I_{i+p}(x) = I_i(x)$, $t_{i+p}(x) = t_i(x) + T$. Предположим, что система (1) имеет T-периодическое решение $x_0(t)$.

Будем говорить, что решение $x_0(t)$ B-устойчиво, если оно определено на промежутке $[t_0, +\infty)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что решение $x_1(t)$, удовлетворяющее условию $\| x_1(t_0) - x_0(t_0) \| < \delta$, будет находиться в ε-окрестности решения $x_0(t)$.

Решение $x_0(t)$ будем называть B-асимптотически устойчивым, если оно B-устойчивое и существует такое $\delta > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\theta > t_0$ такое, что решение $x_1(t)$, для которого $\| x_1(t_0) - x_0(t) \| < \delta$, находится в ε-окрестности решения x_0, $t > \theta$.

Докажем следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы Ляпунова—Пуанкаре.

Теорема 5. *Если все мультипликаторы уравнения в вариациях* (3) *для решения $x_0(t)$ по модулю меньше чем единица, то решение $x_0(t)$ асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть $x_1(t)$ — решение уравнений (1) с начальным условием $x_1(t_0) = x_0 + \xi$. Обозначим через τ_i точки разрыва решения $x_0(t)$, θ_i — точки разрыва решения $x_1(t)$. Пусть $\theta_i \geqslant \tau_i$ при всех i. Обозначим $\Delta t_i = \theta_i - \tau_i$. Используя теорему о непрерывной зависимости решения от начальных данных, находим, что при любом i таком, что $\tau_i \in [t_0, t_0 + T]$, верно равенство

$$\Delta t_i = \frac{\langle \partial t_i(x_0(\tau_i))/\partial x, x_1(\tau_i) - x_0(\tau_i)\rangle}{1 - \langle \partial t_i(x_0(\tau_i))/\partial x, f(\tau_i x_0(\tau_i))\rangle} + r_1(\xi), \tag{9}$$

где $r_1(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$. Заметим, что $r_1(\xi)$ не зависит от t_0.

Разность $x_1(t) - x_0(t)$ в точках $t \,\overline{\in}\, \bigcup(\tau_i, \theta_i)$ совпадает с решением системы

$$du/dt = f(t, x_0(t) + u) - f(t, x_0(t)), t \neq \tau_i,$$

$$\Delta u|_{t=\tau_i} = I_i(x_0(\tau_i)) + u + \int_{\tau_i}^{\theta_i} f(\tau, x_0(\tau) + u)\, d\tau) - I_i(x_0(\tau_i)) + \tag{10}$$

$$+ \int_{\tau_i}^{\theta_i} f(\tau, x_0(\tau) + u)\, d\tau + \int_{\theta_i}^{\tau_i} f(\tau, x_2(\tau))\, d\tau,$$

где $x_2(t)$ — решение уравнения $dx/dt = f(t, x)$, с начальным условием $x_2(\theta_i) = x_1(\theta_i +)$.

Из равенства (9) вытекает, что для доказательства теоремы достаточно показать, что тривиальное решение уравнений (10) асимптотически устойчиво.

Применив методику доказательства теоремы 3, можно проверить, что уравнения (10) эквивалентны системе

$$du/dt = A(t)u + f(t, u), t \neq \tau_i, \quad \Delta u|_{t=\tau_i} = P_i u + J_i(u), \tag{11}$$

где $\| f(t, u) \| / \| u \| \to 0$, $\| J_i(u) \| / \| u \| \to 0$ при $\| u \| \to 0$.

Известно, что существует кусочно-непрерывное T-периодическое преобразование Ляпунова [9], которое приводит систему (11) к уравнениям

$$dv/dt = Cv + g(t, u), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta v|_{t=\tau_i} = V_i(v), \tag{12}$$

сохраняя при этом слабую нелинейность.

Все собственные числа матрицы C, как это следует из условия теоремы, имеют отрицательные вещественные части. Отсюда вытекает [4], что нулевое решение системы (12) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний.— М. : Наука, 1981.— 568 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 502 с.
3. *Кобринский А. Е., Кобринский А. А.* Виброударные системы.— М. : Наука, 1973.— 592 с.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1980.— 80 с.
5. *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб.— 1967.— **74**, вып. 2.— С. 202—208.
6. *Скороход А. В.* О предельном переходе от последовательности сумм независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями // Докл. АН СССР.— 1955.— **104**, № 3.— С. 364—367.
7. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения.— 1956.— 1, вып. 3.— С. 289—319.
8. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем.— М. : Мир, 1971.— 309 с.
9. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Ахметов М. У.* Почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. — Киев, 1983. — 50 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.26).

Киев. ун-т

Получено 09.09.87