УДК 512.546

В. М. ПОЛЕЦКИХ, канд. физ.-мат. наук,
С. С. ШЕСТАКОВ, мл. науч. сотр. (Киев. ун-т)

Об условии дистрибутивности для некомпактных подгрупп

Дано строение локально компактной проразрешимой группы, множество некомпактных подгрупп которой образует дистрибутивную решетку.

Дається будова локально компактної пророзв'язуваної групи, множина некомпактних підгруп якої утворює дистрибутивну решітку.

Условимся под топологической группой G понимать локально компактную группу, под подгруппой — замкнутую подгруппу. Примем следующие обозначения: $\langle\overline{X}\rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством X, $A \wedge B$ — пересечение подгрупп, $A \vee B = \langle\overline{A \cup B}\rangle$, R — одномерная векторная группа, p^∞ — квазициклическая группа, C_n — циклическая группа порядка n, Q_p — аддитивная группа поля p-адических чисел, J_p — аддитивная группа кольца целых p-адических чисел, K — одномерный тор, $nK\ (G)$ — множество некомпактных подгрупп группы G, G_0 — связная компонента группы G, $B\ (G)$ — множество всех компактных элементов группы G.

В настоящей работе изучаются некоторые классы некомпактных топологических групп с множеством $nK\ (G)$, удовлетворяющим условию дистрибутивности: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Понятно, что множество $nK\ (G)$, вообще говоря, не решетка.

Известно, что решетка всех замкнутых подгрупп топологической группы G удовлетворяет условию дистрибутивности тогда и только тогда, когда G — дискретная чистая группа ранга 1, либо G — нульмерная индуктивно компактная группа ранга 1, либо G — компактная связная группа ранга 1 [1].

Лемма 1. *Пусть $N \lhd G$ и множество $nK\ (G)$ удовлетворяет условию дистрибутивности. Если N — компактная подгруппа, то множество $nK\ (G/N)$ удовлетворяет условию дистрибутивности. Если N — некомпактная подгруппа, то решетка всех подгрупп фактор-группы G/N удовлетворяет условию дистрибутивности.*

Доказательство леммы ввиду ее очевидности опускаем.

Лемма 2. *Пусть $G = \langle a\rangle S$, где $\langle a\rangle \wedge S = 1$, $S \lhd G$, $S \neq 1$ и a — чистый элемент. Тогда $nK\ (G)$ не удовлетворяет условию дистрибутивности.*

Доказательство. Пусть $1 \neq t \in S$. По условию $\langle a\rangle \wedge (\langle a^iS\rangle \vee \vee \langle at\rangle) = (\langle a\rangle \wedge \langle a^iS\rangle) \vee (\langle a\rangle \wedge \langle at\rangle)$. Очевидно, что в силу $\langle a\rangle \wedge S = = 1$, $\langle a\rangle \cong \langle at\rangle$. Левая часть равна $\langle a\rangle$. Далее, $\langle a\rangle \not\subset \langle at\rangle$. Следовательно, $\langle a\rangle \wedge \langle at\rangle = \langle a^m\rangle$, где $m \neq \pm 1$. Имеем $\langle a\rangle \wedge \langle a^iS\rangle = \langle a^i\rangle$. Положим, что $i = m$, если $m \neq 0$, и $i = 2$ при $m = 0$. Тогда в любом случае правая часть равна $\langle a^i\rangle$. Противоречие.

Лемма 3. *Если $nK\ (G)$ удовлетворяет условию дистрибутивности, то G_0 компактна.*

Доказательство. Если G_0 некомпактна, то $R \subset G_0$. Очевидно, что $\langle 1\rangle \wedge (\langle\sqrt{3}\rangle \vee \langle\sqrt{2}\rangle) \neq (\langle 1\rangle \wedge \langle\sqrt{3}\rangle) \vee (\langle 1\rangle \wedge \langle\sqrt{2}\rangle)$.

Лемма 4. *Пусть G содержит чистый элемент a. Если $nK(G)$ удовлетворяет условию дистрибутивности, то G — дискретная чистая группа ранга 1.*

Доказательство. Покажем, что подгруппа $\langle A, x^{-1}Ax\rangle$ абелева. Пусть $x^{-1}Ax = \langle b\rangle$. По условию $b^{-1}\langle a\rangle b \wedge \langle b, a\rangle = (b^{-1}\langle a\rangle b \wedge \langle b\rangle) \vee \vee (b^{-1}\langle a\rangle b \wedge \langle a\rangle)$. Если $b^{-1}\langle a\rangle b = \langle d\rangle$, то левая часть равна $\langle d\rangle$. Далее, $b^{-1}\langle a\rangle b \wedge \langle b\rangle = \langle d^n\rangle = \langle b^i\rangle$, $b^{-1}\langle a\rangle b \wedge \langle a\rangle = \langle d^m\rangle = \langle a^j\rangle$. Отсюда $\langle d\rangle = = \langle d^n\rangle \vee \langle d^m\rangle$ Значит, $d = d^{nk+ml}$. Имеем $d = b^{-1}ab = b^{-1}a^{nk+ml}b = (b^{-1}a^{nk}b) \times$

$\times(b^{-1}a^{ml}b)=a^{nk}d^{ml}\in a^{nk}\langle a^l\rangle\subset\langle a\rangle$. Аналогично показываем, что $b\langle a\rangle b^{-1}\subset\langle a\rangle$. Значит, $\langle a\rangle\lhd\langle b,a\rangle$. Фактор-группа $\langle b,a\rangle/\langle a^i\rangle$ имеет дистрибутивную решетку и, следовательно, абелева. Так как $\bigcap_i\langle a^i\rangle=1$, где $i\in\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$, то $\langle b,a\rangle$ — абелева группа. Пусть $L=\langle\bigcup_{g\in G}g^{-1}Ag\rangle$. По доказанному L — абелева группа и $L\lhd G$.

Пусть $1\neq S=B(L)$, тогда по лемме 2 подгруппа $\langle a\rangle S$ не удовлетворяет условию дистрибутивности для $nK(G)$. С учетом леммы 3 и [1] подгруппа L — дискретная чистая группа ранга 1. Пусть $M=Z_G(L)$ — централизатор L в G. Если $\langle a\rangle\subset L$, то снова по [1] фактор-группа $M/\langle a^i\rangle$ — абелева группа. А это означает, что M — абелева группа. Таким образом, M — дискретная чистая группа. Пусть $G_1=G/M$. Если G_1 — дискретная чистая группа ранга 1, то по [1] такова и сама группа G. Если G_1 — индуктивно компактная группа ранга 1, то она дискретная периодическая группа (группа автоморфизмов чистой группы ранга 1 счетна). Но тогда $|G_1|\leqslant 2$. Если $G/M=\langle d\rangle$ и $d^2=1$, то любая подгруппа из M нормальна в G. Отсюда $G/\langle a^t\rangle$, где a — чистый элемент из M, абелева. А это означает, что G — дискретная чистая группа ранга 1.

Лемма 5. *Если $A<G$, где подгруппа $A\cong Q_p$ или $A\cong p^\infty$ и $nK(G)$ удовлетворяет условию дистрибутивности, то либо G — нульмерная индуктивно компактная абелева группа ранга 1, либо G/A — нульмерная компактная группа ранга* 1.

Доказательство. С учетом леммы 4 все элементы группы G компактны и, значит, G_0 — компактная группа. Докажем, что $A\lhd G$. Допустим, что $x^{-1}Ax\neq A$, тогда $L=\langle x^{-1}Ax, A\rangle$ не содержит подгрупп конечного индекса как группа, порожденная полными подгруппами. Пусть $N=N_L(A)$ — нормализатор A в L. Тогда индекс $[L:N]=\infty$. Если $L\supset y^{-1}Ay$, где $y^{-1}Ay$ — подгруппа, отличная от A и $x^{-1}Ax$, то с учетом дистрибутивности имеем $y^{-1}Ay\wedge(A\vee x^{-1}Ax)=(y^{-1}Ay\wedge A)\vee(y^{-1}Ay\wedge\wedge x^{-1}Ax)$. Левая часть равна $y^{-1}Ay$, а правая часть — компактная подгруппа из $y^{-1}Ay$. Противоречие. Следовательно, $A\lhd G$.

Пусть $M=Z_G(A)$ и G/A — компактная связная группа ранга 1. Так как полная группа автоморфизмов группы A тривиальна, то $G=M$. Группа G/A монотетична, поэтому G — абелева группа. Рассмотрим подгруппу G_0A. С учетом леммы 1 можно считать, что $G_0A=K\times A$, где $A\cong p^\infty$ (если нужно, перейти к фактор-группе). Пусть $p^\infty\cong V=\langle b_0,b_1,b_2,\ldots\rangle\subset K$ и $b_i^p=b_{i-1}$, аналогично $A=\langle a_0,a_1,a_2,\ldots\rangle$. Подгруппы $A_1=A$, $A_2=\langle a_0, a_1b_0, a_2b_1,\ldots,a_ib_{i-1},\ldots\rangle$, $A_3=\langle a_0,a_1,a_2b_0,\ldots,a_ib_{i-2},\ldots\rangle$ — различные, изоморфные p^∞, дискретные подгруппы. Действительно, если, например, $A_2=A_3$, то $a_2\in A_3$. Но тогда $b_1\in A_2$ и, значит, $\langle b_1\rangle\times\langle a_1\rangle\subset A_2$. Противоречие. Далее, $A_3\wedge K$ — конечная группа. Если это не так, то $A_3=V$, отсюда $a_3\in V$. Противоречие. В силу дистрибутивности $A_2\wedge(A_1\vee A_3)=(A_2\wedge A_1)\vee(A_2\wedge A_3)$. Так как $A_1\vee A_3=K\times A_1$, то левая часть равна A_2, а правая часть — конечная подгруппа. Противоречие. Значит, случая G/A — компактная связная группа ранга 1 быть не может.

Если G/A — компактная нульмерная группа ранга 1, то все доказано, поэтому пусть G/A — нульмерная индуктивно компактная некомпактная группа ранга 1 и $M=Z_G(A)$. Поскольку M/A — группа ранга 1, то M — абелева группа. Группа автоморфизмов группы A — группа с условием максимальности, поэтому G/M — компактная группа ранга 1 с условием максимальности. Ясно, что M — нульмерная индуктивно компактная группа ранга не больше 2. Пусть силовская подгруппа $S_p\supset A$, тогда $M=S_p\times L$. Ясно, что $S_p=A\times F$, где $F\cong I_p$ или $F=C_{p^l}$, а L — некомпактная группа. (Если допустить, что F некомпактна, то $A\cong V\subset F$. Тогда можно построить снова подгруппы A_1, A_2, A_3 и повторить аналогичные рассуждения). Поскольку G/L, G/A — абелевы группы и $L\wedge A=1$, то G — абелева группа, $G=S_p\times W$, где W — группа ранга 1, $G/W=S_p$ — в силу некомпактности W также группа ранга 1. Следовательно, G — нульмерная индуктивно компактная некомпактная группа ранга 1.

В теоремах 1—3 и лемме 7 используется следующее утверждение: если $G \triangleright H$, H — компактная подгруппа и фактор-группа G/H содержит p^∞ (содержит Q_p), то G содержит p^∞ или Q_p (содержит Q_p) [2].

Теорема 1. *Пусть G — проразрешимая некомпактная p-группа. Множество $nK(G)$ удовлетворяет условию дистрибутивности тогда и только тогда, когда $G/A = \langle a \rangle$, где $A \cong Q_p$ или $A \cong p^\infty$.*

Доказательство. Необходимость. В силу проразрешимости G можно считать, что G есть расширение компактной подгруппы N с помощью разрешимой G_1. Пусть $1 = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_i \subset \ldots \ldots \subset K_n = G_1$ — нормальный ряд из замыканий коммутантов группы G_1, $L = K_i/K_{i-1}$ — первый некомпактный фактор и H — открытая компактная подгруппа L. Рассмотрим $L_1 = L/H$. В силу дистрибутивности ее нижний слой конечен, отсюда $p^\infty \subset L_1$. С учетом предварительного замечания G_1 и, значит, G содержат A. Из леммы 5 следует утверждение теоремы.

Достаточность очевидна, поскольку любая некомпактная подгруппа V содержит A.

Теорема 2. *Множество $nK(G)$ пронильпотентной некомпактной группы G удовлетворяет условию дистрибутивности тогда и только тогда, когда либо G — дискретная чистая группа ранга 1, либо $G = A \times H$, где H — компактная нульмерная группа ранга 1, подгруппа A типа Q_p или p^∞, либо G — нульмерная индуктивно компактная некомпактная группа ранга* 1.

Доказательство. Необходимость. Если G содержит чистый элемент, то по лемме 4 G — чистая дискретная группа ранга 1. Поэтому пусть $G = B(G)$. Рассмотрим фактор-группу $G_1 = G/G_0$. Поскольку G_1 пронильпотентна, то $G_1 = \mathrm{Pr}(S_p : H_p)$ — прямое произведение силовских S_p с отмеченными в них открытыми компактными подгруппами H_p. Если некоторая S_p некомпактна, то по теореме 1 подгруппа $S_p \supset A$. Но тогда и $G \supset A$. Отсюда по лемме 5 имеем: 1) G — нульмерная некомпактная индуктивно компактная группа ранга 1 либо 2) $G/A = H$, где H — компактная нульмерная группа ранга 1. В любой нильпотентной группе нормальная подгруппа A типа Q_p или p^∞ принадлежит центру $Z(G)$ [3]. Отсюда во втором случае G — абелева группа и $G = A \times H$.

Если все S_p компактны, то в силу некомпактности G_1 имеем $G_1 = L_1 \times \times L_2$, где L_i — некомпактны и не имеют общих p-элементов. Тогда L_1 и L_2 — группы ранга 1 и, значит, G_1 — нульмерная индуктивно компактная группа ранга 1. Поскольку $G_0 \subset Z(G)$, то G — абелева группа. В силу теории двойственности в G_0 существует подгруппа V такая, что $G_0/V = K$. Но тогда $G/V = K \times L_1 \times L_2$. В силу некомпактности L_2 решетка $K \times L_1$ удовлетворяет условию дистрибутивности. Значит, $G_0 = 1$ и G — нульмерная индуктивно компактная некомпактная группа ранга 1.

Достаточность. Если $G = A \times H$, то любая некомпактная подгруппа $V \supset A$. Так как решетка G/A дистрибутивна [1], то дистрибутивно и множество $nK(G)$. В остальных случаях дистрибутивность вытекает из [1].

Опишем теперь проразрешимую группу G, у которой $nK(G)$ — дистрибутивная решетка. Это означает, что добавлено условие: пересечение двух некомпактных подгрупп — некомпактная подгруппа.

Лемма 6. *Если $nK(G)$ — решетка и H — компактная нормальная подгруппа, то $nK(G/H)$ — также решетка.*

Лемма 7. *Если G — абелева некомпактная группа, то $nK(G)$ — решетка тогда и только тогда, когда либо $G = Q \times H$, где H — компактная группа конечной экспоненты, Q — дискретная чистая группа ранга 1, либо $G/A = H$, где H — компактная нульмерная группа и A типа Q_p или p^∞.*

Доказательство. Необходимость. Если $R \subset G$, то $\langle 1 \rangle \wedge \langle \sqrt{2} \rangle = 1$. Следовательно, G_0 компактна. Пусть N — открытая компактная подгруппа группы G. Тогда рассмотрим $G_1 = G/N$. Понятно, что $B(G_1)$ имеет конечное число S_p и нижний слой S_p конечен. Следовательно, $B(G_1)$ — черниковская группа, которая, как известно, выделяется прямым слагаемым. Итак, $G_1 = B(G_1) \times L$, где L — чистая подгруппа. Очевидно, что либо $G_1 = p^{\infty} \times F$, либо $G_1 = Q \times F$, где F — конечная подгруппа. Если $G_1 = p^{\infty} \times F$, то $A \subset G$. Рассмотрим $G_0 A$. С учетом леммы 6 можно считать, что $K \times p^{\infty} \subset G$. Используя доказательство леммы 5, можно снова построить $A_1 \cong p^{\infty}$ и $A_2 \cong p^{\infty}$, что $A_1 \wedge A_2$ конечно. Следовательно, $G_0 = 1$. Понятно, что $G = AN$. Отсюда $G/A = H$ — компактная нульмерная группа.

Если $G_1 = Q \times F$, то G обладает подгруппой $\langle a \rangle \times N$, где a — чистый элемент. Пусть $b \in N$ и b — элемент бесконечного порядка, тогда $\langle ab \rangle \wedge \langle a \rangle = 1$. Следовательно, все элементы N конечного порядка. А это означает, что N — группа конечной экспоненты. Отсюда $G/H \cong Q$ и H — компактная группа конечной экспоненты. Из теории двойственности следует $G = Q \times H$.

Достаточность. Если $G/A = H$, то любые некомпактные подгруппы V_1 и V_2 содержат A, следовательно, $V_1 \wedge V_2$ некомпактно. Если $G = Q \times H$, то некомпактная подгруппа $V_i \supset \langle ah_i \rangle$, $a \in Q$, $h_i \in H$, $i = 1, 2$. Но H конечной экспоненты. Следовательно, $V_1 \wedge V_2$ — некомпактная подгруппа.

Теорема 3. *Пусть G — проразрешимая некомпактная группа. Множество $nK(G)$ является дистрибутивной решеткой тогда и только тогда, когда либо $G/A = H$, где $A \cong Q_p$ или $A \cong p^{\infty}$ и H — компактная нульмерная группа ранга 1, либо G — дискретная чистая группа ранга* 1.

Доказательство. Необходимость. Если G содержит чистый элемент, то по лемме 4 G — дискретная чистая группа ранга 1. Поэтому $G = B(G)$. Пусть сначала G — разрешимая группа, K_{i-1} — компактная подгруппа, K_i — некомпактная подгруппа (K_i — замыкание коммутанта). Тогда $K_i/K_{i-1} \supset A$ (лемма 7). Отсюда $A \subset G$. По лемме 5 либо $G = D$ — нульмерная некомпактная индуктивно компактная группа ранга 1, либо $G/A = H$. Так как $D = L_1 \times L_2$, где L_i — некомпактные группы, то случая $G = D$ быть не может.

Достаточность очевидна.

1. *Мухин Ю. Н.* Локально компактные группы с дистрибутивной решеткой замкнутых групп // Сиб. мат. журн.— 1967.— 8, № 2.— С. 366—374.
2. *Полецких В. М.* О топологических группах, близких к группам ранга 1 // Укр. мат. журн.— 1976.— 28, № 6.— С. 772—781.
3. *Бочурин Г. Ф.* О группах с возрастающим центральным рядом // Мат. сб.— 1958.— 45, № 1.— С. 105—112.

Получено 31.01.91