УДК 517.11+517.948

В. Э. Лянце

О возмущении, бесконечно малом в сильной операторной топологии

Мы используем внутреннюю теорию множеств IST, т. е. нестандартный анализ в форме, предложенной Э. Нельсоном [1—4]. Обозначим через H стандартное гильбертово пространство над $\mathbb{C}$, а через S — стандартный компактный оператор, принадлежащий алгебре $\mathcal{B}(H)$ линейных ограниченных операторов $H \to H$. В дальнейшем S играет роль невозмущенного оператора. По соответствующей теореме аппроксимации существует конечномерный (в нестандартном смысле) оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ такой, что норма разности $T - S$ бесконечно мала. Принцип переноса позволяет применить к возмущенному оператору T обычную теорию возмущений [5]. Представляет интерес изучение ситуации, в которой соотношение $T \approx \approx S$ ($\approx$ — бесконечная близость) выполняется в более слабом смысле.

Далее через $\mathcal{P}$ и $\mathcal{R}$ обозначаем операторы, принадлежащие $\mathcal{B}(H)$, такие, что 1) $\mathcal{P}$ — ортопроектор $H \to H$, удовлетворяющий условию $(\forall^{st} x \in H)$ $(\| \mathcal{P}x - x \| \approx 0)$; 2) $\| \mathcal{R} \| \approx 0$.

В качестве возмущенного оператора принимаем $T := \mathcal{P}S\mathcal{P} + \mathcal{R}$. Разность $T - S$ называем возмущением (оператора S) бесконечно малым в сильной операторной топологии.

П р и м е р. Рассмотрим стандартное гильбертово пространство $L_2(a, b)$. Зададим бесконечное $n \in N$ и положим $h := (b - a)/n$, $x_j := a + jh$ при $j = 0, \ldots, n$. Для каждого $f \in L_2(a, b)$ определим $\mathcal{P}f$ как ступенчатую функцию такую, что $\mathcal{P}f(t) = h^{-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx$ при $x_j < t < x_{j+1}$, $j = 0, \ldots, n-1$. Тогда, как легко проверить, оператор $\mathcal{P}$ удовлетворяет условию 1. В этом примере возмущенный оператор T можно охарактеризовать как «бесконечно мелкую дискретизацию» оператора S.

З а м е ч а н и е 1. Для любого околостандартного $x \in H$ вектор $\mathcal{P}x$ околостандартен и имеет тень ${}^\circ(\mathcal{P}x) = {}^\circ x$.

Так как норма $\mathcal{P}$ конечна, $\| \mathcal{P} \| = 1$, то $\mathcal{P}x \approx \mathcal{P}({}^\circ x) \approx {}^\circ x$.

Л е м м а. *Оператор T компактен в том смысле, что преобразует конечные векторы (т. е. векторы, имеющие конечную норму) в околостандартные. Если x — околостандартный вектор, то ${}^\circ(Tx) = S({}^\circ x)$ (чтобы отличить T от S, нужен инфинитезимальный микроскоп).*

Пусть x — конечный вектор. В силу нестандартного признака компактности стандартного оператора вектор $y := S\mathcal{P}x$ околостандартен. Учитывая замечание 1, заключаем, что вектор $Tx = \mathcal{P}y + \mathcal{R}x$ околостандартен и ${}^\circ(Tx) = {}^\circ y$ (см. условие 2). Если вектор x околостандартен, то $y \approx \approx S\mathcal{P}({}^\circ x) \approx S({}^\circ x)$. Отсюда ${}^\circ y = S({}^\circ x)$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть λ — ощутимое (т. е. не бесконечно малое) собственное значение оператора S. Тогда λ — стандартно.

Пусть $x \in H$, $\| x \| = 1$ и $Sx = \lambda x$. В силу компактности оператора S и условия $\lambda \not\approx 0$ вектор x околостандартный. Далее $S({}^\circ x) \approx Sx = \lambda x \approx \approx {}^\circ\lambda {}^\circ x$, откуда $S({}^\circ x) = {}^\circ\lambda {}^\circ x$, т. е. ${}^\circ\lambda$ — собственное значение оператора S. В силу принципа переноса существует стандартная окрестность точки ${}^\circ\lambda$, в которой оператор S не имеет собственных значений отличных от ${}^\circ\lambda$, а поэтому $\lambda = {}^\circ\lambda$.

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть λ — ощутимое собственное значение оператора T. Тогда алгебраическая кратность m этого собственного значения конечна (в стандартном смысле). Если $x \in \ker (T - \lambda)^{m-1}$ и x — конечный вектор, то он околостандартен и ${}^\circ x \in \ker (S - {}^\circ\lambda)^{m-1}$, в частности, ${}^\circ\lambda$—собственное значение оператора S, алгебраической кратности $\geqslant m$.*

Пусть $e \in H$, $\| e \| = 1$ и $Te = \lambda e$. В силу леммы вектор e околостандартен и $S({}^\circ e) = {}^\circ\lambda {}^\circ e$. Пусть $(e_{01}, \ldots)$ — ортонормированный базис пространства $\ker(T-\lambda)$. Тогда $({}^\circ e_{01}, \ldots)$ — ортонормированная последовательность в $\ker(S-{}^\circ\lambda)$, а, так как $\ker(S-{}^\circ\lambda)$ конечномерно, то и $\ker(T-\lambda)$ конечномерно в стандартном смысле. Пусть $(e_{11}, \ldots)$ — ортонормированный базис пространства $\ker(T-\lambda)^2 \ominus \ker(T-\lambda)$. Тогда $(T-\lambda)e_{11} \in \ker(T-\lambda)$, а поэтому $(T-\lambda)e_{11} = c_{11}e_{01} + \ldots + c_{1k}e_{0k}$, где $k := \dim\ker(T-\lambda)$. Так как $c_{1j} = ((T-\lambda)e_{11} \mid e_{0j})$, то $|c_{1j}| \leqslant 2\|T\| \leqslant 2(\|S\|+1)$. Следовательно, числа $c_{11}, \ldots, c_{1k}$ околостандартны, а поскольку околостандартен вектор Te_{11} и $\lambda \neq 0$, то околостандартен также вектор e_{11}. Из леммы вытекает еще, что $(S-{}^\circ\lambda)e_{11} = {}^\circ c_{11}{}^\circ e_{01} + \ldots + {}^\circ c_{1k}{}^\circ e_{0k}$, откуда $(S-{}^\circ\lambda)^2({}^\circ e_{11}) = 0$. Аналогично доказываем, что $(S-{}^\circ\lambda)^2({}^\circ e_{12}) = \ldots = (S-{}^\circ\lambda)^2({}^\circ e_{1l}) = 0$, где $l := \dim[\ker(T-\lambda)^2 \ominus \ker(T-\lambda)]$. Подобным способом рассматриваем $\ker(T-\lambda)^3 \ominus \ker(T-\lambda)^2$ и т. д. Так как алгебраическая кратность собственного значения ${}^\circ\lambda$ оператора S конечна (в стандартном смысле), то это же верно для собственного значения λ оператора T.

Определение. *Внутреннее подпространство $G \subseteq H$ называется околостандартным, если все его конечные векторы околостандартны. Тенью такого подпространства называется стандартное подпространство ${}^\circ G$, стандартные векторы которого — тени околостандартных векторов из G, т. е. $(\forall^{st} y \in H)(y \in {}^\circ G \Leftrightarrow (\exists x \in G)(y = {}^\circ x))$.* Отметим, что существование ${}^\circ G$ обеспечивается принципом стандартизации.

Замечание 3. Из утверждения 1 следует, что для каждого ощутимого собственного значения оператора T корневое подпространство $\ker(T-\lambda)^{m-1}$ околостандартно и ${}^\circ[\ker(T-\lambda)^{m-1}] \subseteq \ker(S-{}^\circ\lambda)^{m-1}$.

Если A, B — произвольные стандартные множества, то $(\forall^{st} a \in A)(a \in B) \Rightarrow (\forall a \in A)(a \in B)$.

Утверждение 2. *Пусть невозмущенный оператор S имеет стандартное собственное значение $\lambda_0 \neq 0$. Тогда возмущенный оператор T имеет собственное значение $\lambda \approx \lambda_0$.*

Составим уравнение для собственных значений λ оператора T таких, что $|\lambda| > \frac{1}{2}|\lambda_0|$. Для этого представим оператор S в виде $S = K + M$, где K — стандартный конечномерный оператор из $\mathcal{B}(H)$, а $\|M\| < \frac{1}{2}|\lambda_0|$. Далее представим K в виде $K = EF$, где $F \in \mathcal{B}(H; \mathbb{C}^k)$, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^k; H)$, E и F — стандартны, $k = \operatorname{rang} K$. При $|\lambda| > \frac{1}{2}|\lambda_0|$ уравнение $Sx = \lambda x$ равносильно системе $c = Fx$, $\Phi(\lambda)c = 0$, где $\Phi(\lambda) := \mathrm{id}_{\mathbb{C}^k} + F(M-\lambda)^{-1}E$. Поэтому корни уравнения $\det\Phi(\lambda) = 0$ совпадают с собственными значениями оператора S $\left(\text{имеется в виду, что } |\lambda| > \frac{1}{2}|\lambda_0|\right)$. Учитывая, что $T = \mathcal{P}S\mathcal{P} + \mathcal{R}$, находим, что собственные значения оператора T совпадают с корнями уравнения $\det\Phi_1(\lambda) = 0$, где $\Phi_1(\lambda) := \mathrm{id}_{\mathbb{C}^k} + F_1(M_1-\lambda)^{-1}E_1$, $M_1 := \mathcal{P}M\mathcal{P} + \mathcal{R}$, $E_1 := \mathcal{P}E$, $F_1 := F\mathcal{P}$.

В силу теоремы Руше (и принципа переноса), чтобы доказать существование корня уравнения $\det\Phi_1(\lambda) = 0$, бесконечно близкого к λ_0, достаточно доказать, что в некоторой стандартной окрестности точки λ_0 выполняется соотношение $\Phi_1(\lambda) \approx \Phi(\lambda)$. С этой целью заметим, что из замечания 1 и условия 2 следует, что для любых конечных $x \in H$, $c \in \mathbb{C}^k$ $M_1 x \approx Mx$, $F_1 x \approx Fx$, $E_1 c \approx Ec$. Поэтому $\forall^{st} c \in \mathbb{C}^k$, $\forall^{st} m \in \mathbb{N}$ $F_1 \sum_{n \leqslant m} \lambda^{-n} M_1^n \times E_1 c \approx F \sum_{n \leqslant m} \lambda^{-n} M^n Ec$. Согласно лемме Робинсона [2] последнее соотношение выполняется и для некоторого бесконечного натурального m. Следовательно, $F_1 \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^{-n} M_1^n E_1 c \approx F \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^{-n} M^n Ec$, так как оба эти ряда мажорируются геометрической прогрессией $\mathrm{const}\,\Sigma|\lambda|^{-n}\|M\|^n$, где константа const конечна, а $\|\lambda^{-1}M\| < 1$. Поэтому остатки этих рядов вида $\sum_{n \geqslant m}$, где m — бесконечно, бесконечно малы.

Теорема. *Пусть λ_0 — отличное от нуля собственное значение оператора S, а m_0 — его алгебраическая кратность. Пусть Λ — множество собственных значений оператора T, бесконечно близких к λ_0. Обозначим через m_λ и P_λ соответственно алгебраическую кратность и спектральный проектор, отвечающий $\lambda \in \Lambda$. Тогда*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda = m_0, \tag{1}$$

$$^{\circ}\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} \ker(T-\lambda)^{m_\lambda - 1}\Big) = \ker(S-\lambda_0)^{m_0-1}, \tag{2}$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \approx P_0, \tag{3}$$

где P_0 — спектральный проектор оператора S, отвечающий собственному значению λ_0.

Сохраним обозначения из доказательства утверждения 2. Сначала проинтерпретируем Λ как множество корней определителя $\det \Phi_1(\lambda)$, бесконечно близких к λ_0, а m_1 — как кратность корня $\lambda \in \Lambda$ этого определителя и m_0 — как кратность корня λ_0 определителя $\det \Phi(\lambda)$. При такой интерпретации в силу теоремы Руше равенство (1) выполняется. Теперь убедимся, что так понимаемые m_λ и m_0 совпадают с алгебраическими, кратности соответственно λ и λ_0, как собственных значений операторов соответственно T и S.

Пусть $\tilde\lambda \in \Lambda$, $e_0, \ldots, e_{m-1} \in H$ и

$$(T-\tilde\lambda)e_0 = 0,\ (T-\tilde\lambda)e_1 = e_0, \ldots, (T-\tilde\lambda)e_{m-1} = e_{m-2}. \tag{4}$$

Полагая $c_j := F\mathcal{P}e_j$, получаем

$$\begin{aligned} &\Phi_1(\tilde\lambda)c_0 = 0,\\ &\frac{1}{1!}\Phi_1'(\tilde\lambda)c_0 + \Phi_1(\tilde\lambda)c_1 = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{1}{(m-1)!}\Phi_1^{(m-1)}(\tilde\lambda)c_0 + \ldots + \Phi_1(\tilde\lambda)c_{m-1} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Обратно, если выполняется (5), то полагая $e_0 := -(M_1-\tilde\lambda)^{-1}E_1c_0$ и при $j > 1$ $e_j := -(M_1-\tilde\lambda)^{-1}[E_1c_j - e_{j-1}]$, убеждаемся, что выполняется равенство (4).

Но, как известно (см., например, [6]), кратность $m_{\tilde\lambda}$ корня λ определителя $\det \Phi_1(\lambda)$ равна сумме длин цепочек канонической системы корневых векторов оператор-функции $\Phi_1(\lambda)$, отвечающих $\lambda = \tilde\lambda$ и, следовательно, равна алгебраической кратности числа $\tilde\lambda$, как собственного значения оператора T.

В силу замечания 3 левая часть равенства (2) содержится в его правой части, а поэтому (2) следует из (1).

Наконец, учтем, что P_λ проектирует на $\ker(T-\lambda)^{m_\lambda-1}$, параллельно $[\ker(T^*-\bar\lambda)^{m_\lambda-1}]^\perp$. Так как $T^* = \mathcal{P}S^*\mathcal{P} + \mathcal{R}^*$, то все ранее доказанное можно применить к паре операторов (S^*, T^*).

В частности, в равенстве (2) можно заменить T на T^*, λ на $\bar\lambda$, S на S^* и λ_0 на $\bar\lambda_0$. Таким образом, соотношение (3) следует из (2) и из того, что конечномерный проектор зависит непрерывно (в равномерной операторной топологии) от области значений своей и сопряженного к нему проектора.

1. *Nelson E.* Internal set theory: a new approach to nonstandart analysis // Bull. Amer. Math. Soc.— 1977.— **83**, N 6.— P. 1165—1198.
2. *Лянце В. Э.* О нестандартном анализе // Математика сегодня: Науч.-метод. сб.— Киев : Вища шк., 1986.— С. 26—44.
3. *Кутателадзе С. С.* Основы нестандартного анализа.— Новосибирск, 1986.— 114 с.— (Препринт / Новосиб. ун-т; № 86.16).
4. *Lutz R., Goze M.* Nonstandart analysis.— Berlin etc.: Springer, 1981.— 261 p.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
6. *Гохберг И. Ц., Сигал Е. И.* Обобщенная теорема о логарифмическом вычете // Мат. сб.— —1971.—**84**.— С. 604—629.

Львов. ун-т Получено 10.11.86