УДК 517.43

М. Н. Феллер

Самосопряженность несимметризованного бесконечномерного оператора Лапласа—Леви

Лапласиан для функций $F(x)$ на гильбертовом пространстве H определен П. Леви [1]: $\Delta F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (F''(x) f_k, f_k)_H$, где $F''(x)$ — гессиан функции $F(x)$, $\{f_k\}_1^\infty$ — ортонормированный базис в H. В [2] по дифференциальному выражению Лапласа — Леви строились операторы в пространстве $\mathfrak{L}_2(H)$ —

гильбертовом пространстве функций $F(x)$ на H, интегрируемых с квадратом по гауссовой мере μ.

В бесконечномерном пространстве не существует меры типа меры Лебега, а в пространстве с гауссовой мерой даже конечномерный лапласиан не является формально самосопряженным выражением. Поэтому в [3] лапласиан Леви симметризовался: $\Delta_c F(x) = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} [(F''(x) f_k, f_k)_H - (F'(x), f_k)_H (\mathrm{K}^{-1}x, f_k)_H]$, где K — корреляционный оператор меры μ.

В настоящей статье показывается, что и по лапласиану Леви Δ (несимметризованному) также можно построить симметрический, и даже самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{L}_2(H)$. Это свойство, не имеющее конечномерного аналога, дополнит арсенал необычных свойств оператора Лапласа—Леви, приведенных в обзоре [4].

1. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции (нелинейные функционалы) $F(x)$ на H, $x \in H$.

Бесконечномерное дифференциальное выражение Лапласа П. Леви определил формулой

$$\Delta F(x) = 2\lim_{\rho\to 0} \frac{\mathfrak{M} F(x+\rho h) - F(x)}{\rho^2}, \tag{1}$$

где $\mathfrak{M}\Phi$ — среднее значение функций $\Phi(h)$ по сфере $\|h\|_H^2 = 1$, ($\mathfrak{M}F(x_0 + \rho h) = \mathfrak{M}_{(x_0,\rho)} F(x)$ — среднему значению функции $F(x)$ по сфере $\|x - x_0\|_H^2 = \rho^2$, $\mathfrak{M}\Phi \equiv \mathfrak{M}_{(0,1)}\Phi$). Это определение требует, чтобы функция $F(x)$ обладала средними $\mathfrak{M}_{(x_0,\rho)} F(x)$ $(\rho < \rho_0)$ и предел существовал.

Средним значением функции $F(x)$ по гильбертовой сфере $\|x - x_0\|_H^2 = \rho^2$ называется предел (если он существует) среднего по n-мерной сфере

$$\mathfrak{M}_{(x_0,\rho)} F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \int\limits_{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_{0k})^2 = \rho^2} f(x_1, \ldots, x_n)\, d\sigma_n,$$

где $F_n(x) = F\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k f_k\right) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — сужение функции $F(x)$ на n-мерное подпространство с базисом $\{f_k\}_1^n$, $x_k = (x, f_k)_H$, s_n — площадь, а $d\sigma_n$ — элемент поверхности n-мерной сферы. Среднее зависит, вообще говоря, от выбора базиса.

Для дважды сильно дифференцируемых функций наряду с (1) часто удобно и такое представление лапласиана Леви (см., например, [4]).

Пусть функция $F(x)$ дважды сильно дифференцируема в точке x. Если существует $\Delta F(x)$, то существует и $\mathfrak{M}(F''(x)h, h)_H$. Обратно, если существует $\mathfrak{M}(F''(x)h, h)_H$ и, кроме того, $F(x)$ обладает средними $\mathfrak{M}_{(x_0,\rho)} F$ $(\rho < \rho_0)$, то существует $\Delta F(x)$. При этом в обоих случаях

$$\Delta F(x) = \mathfrak{M}(F''(x)h, h)_H = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (F''(x) f_k, f_k)_H, \tag{2}$$

где $\{f_k\}_1^\infty$ — выбранный ортонормированный базис в H.

2. Пусть $\mathfrak{L}_2(H)$ — гильбертово пространство функций $F(x)$ на H, интегрируемых с квадратом по гауссовой мере μ с корреляционным оператором K и нулевым средним, K — ядерный положительный оператор такой, что $\|x\|_H \leqslant \|\mathrm{K}^{-1/2}x\|_H$, $x \in D_{\mathrm{K}^{-1/2}}$, $\|F\|_{\mathfrak{L}_2(H)}^2 = \int\limits_H F(x)^2 \mu(dx)$.

Обозначим через $\mathfrak{T}$ совокупность всех функций вида $V(x) = \varphi(\|x\|_H^2) \times S(x)$, где $S(x)$ — произвольные дважды сильно дифференцируемые, гармонические в H функции из $\mathfrak{L}_2(H)$, $\varphi(\xi)$ — любая фиксированная функция, определенная, положительная и дифференцируемая на $[0, \infty)$, удовлетворяющая условию Липшица с константой c, такая, что $V(x)$ и $\frac{\varphi'(\|x\|_H^2)}{\varphi(\|x\|_H^2)} \times V(x) \in \mathfrak{L}_2(H)$. Множество $\mathfrak{T}$ линейно.

Покажем, что оно всюду плотно в $\mathfrak{L}_2(H)$. Достаточно показать, что всюду плотно множество $\hat{\mathfrak{T}}$, где $\hat{\mathfrak{T}}$ — совокупность всех функций $\Phi(x) = \varphi(\|x\|_H^2)\Psi(x)$, $\Psi(x) \in \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — множество цилиндрических дважды сильно дифференцируемых функций (если функция $\Psi \in \mathfrak{C}$, $\Psi(x) = \Psi(Px)$, P — проектор на m-мерное подпространство, то ее гессиан $\Psi''(x)$ будет конечномерным (m-мерным) оператором и $\Delta\Psi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{m} (\Psi''(x) f_k, f_k)_H = 0$, т. е. $\Psi(x)$ — гармоническая функция в H и $\hat{\mathfrak{T}} \subset \mathfrak{T}$). Пусть $U \in \mathfrak{L}_2(H)$. Множество $\mathfrak{C}$ всюду плотно в $\mathfrak{L}_2(H)$, т. е. $\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \Psi_0 \in \mathfrak{C} : \|U - \Psi_0\|_{\mathfrak{L}_2(H)} \leqslant \varepsilon_1$. Так как $\Psi_0 \in \mathfrak{C}$, то $\Psi_0(x) = \Psi_0(Px)$ при некотором проекторе на m-мерное подпространство с базисом $\{f_k\}_1^m$. Возьмем функцию $\Phi_0(x) = \varphi(\|x\|_H^2)\Psi_0(x)/\varphi(\|Px\|_H^2)$, $\Phi_0 \in \hat{\mathfrak{T}}$ ибо $\Psi_0(x)/\varphi(\|Px\|_H^2) \in \mathfrak{C}$. Тогда $\|U - \Phi_0\|_{\mathfrak{L}_2(H)} \leqslant \|U - \Psi_0\|_{\mathfrak{L}_2(H)} + \|\Psi_0 - \Phi_0\|_{\mathfrak{L}_2(H)} \leqslant \varepsilon_1 + \|\Psi_0 - \Phi_0\|_{\mathfrak{L}_2(H)}$. Но

$$\|\Psi_0 - \Phi_0\|_{\mathfrak{L}_2(H)}^2 = \int\limits_H [\Psi_0(x) - \varphi(\|x\|_H^2)\Psi_0(x)/\varphi(\|Px\|_H^2)]^2 \mu(dx) =$$

$$= \int\limits_H [\Psi_0(x)/\varphi(\|Px\|_H^2)]^2 [\varphi(\|Px\|_H^2) - \varphi(\|x\|_H^2)]^2 \mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_H [\Psi_0(x)/\varphi(\|Px\|_H^2)]^2 \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} (x, f_k)_H^2\right]^2 \mu(dx),$$

так как функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет условию Липшица. Функция $\Psi_0(x)/\varphi \times (\|Px\|_H^2)$ зависит лишь от $(x, f_1)_H, \ldots, (x, f_m)_H$, а $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} (x, f_k)_H^2$ — лишь от $(x, f_{m+1})_H$, $(x, f_{m+2})_H, \ldots$, поэтому

$$\|\Psi_0 - \Phi_0\|_{\mathfrak{L}_2(H)}^2 \leqslant c \int\limits_H [\Psi_0(x)/\varphi(\|Px\|_H^2)]^2 \mu(dx) \int\limits_H \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} (x, f_k)^2\right]^2 \mu(dx) =$$

$$= \int\limits_H [\Psi_0(x)/\varphi(\|Px\|_H^2)]^2 \mu(dx) \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} (\mathrm{K} f_k, f_k)_H^2 + 2\sum_{k=m+1}^{\infty} (\mathrm{K}^2 f_k, f_k)_H\right].$$

Так как $\Psi_0(x)/\varphi(\|Px\|_H^2) \in \mathfrak{L}_2(H)$, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\mathrm{K} f_k, f_k)_H = \mathrm{Sp}\,\mathrm{K} < \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\mathrm{K}^2 f_k, f_k)_H = \mathrm{Sp}\,\mathrm{K}^2 < \infty \ \forall \{f_k\}_1^\infty$ в H (оператор K ядерный), то $\|\Phi_0 - \Psi_0\|_{\mathfrak{L}_2(H)}^2 \leqslant \varepsilon_2$. Таким образом, $\|U - \Phi_0\|_{\mathfrak{L}_2(H)} \leqslant \varepsilon$ и значит множество $\hat{\mathfrak{T}}$ всюду плотно в $\mathfrak{L}_2(H)$.

Лемма 1. *Лапласиан Леви на $\mathfrak{T}$ существует, не зависит от выбора базиса и является оператором умножения на функцию* $2\varphi'(\|x\|_H^2)/\varphi(\|x\|_H^2)$:

$$\Delta V(x) = \frac{2\varphi'(\|x\|_H^2)}{\varphi(\|x\|_H^2)} V(x), \qquad V \in \mathfrak{T}.$$

Доказательство. Второй дифференциал функции $F(x) = \varphi(\|x\|_H^2)$ равен $(F''(x)h, h)_H = 4\varphi''(\|x\|_H^2)(x, h)_H^2 + 2\varphi'(\|x\|_H^2)\|h\|_H^2$. Усредняя $(F''(x)h, h)_H$ по сфере $\|h\|_H^2 = 1$ и используя формулу (2), получаем

$\Delta F(x) = 2\varphi'(\|x\|_H^2)$, поскольку

$$\mathfrak{W}\{(x, h)_H^2\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x, f_k)_H^2 = 0 \qquad ((x, f_k)_H^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty),$$

$$\mathfrak{W}\{\|h\|_H^2\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}) = 1 \qquad \forall \{f_k\}_1^\infty \text{ в } H.$$

Усредняя второй дифференциал функции $V(x) = S(x) F(x)$:

$$(V''(x) h, h)_H = (S''(x) h, h)_H F(x) + 2 (S'(x), h)_H (F'(x), h)_H + \\ + S(x) (F''(x) h, h)_H$$

по сфере $\|h\|_H^2 = 1$, согласно (2) имеем

$$\Delta V(x) = \Delta S(x) F(x) + 2\mathfrak{W}\{(S'(x), h)_H (F'(x), h)_H\} + \\ + S(x) \Delta F(x) = S(x) \Delta F(x),$$

поскольку $S(x)$ — гармоническая функция, а $\mathfrak{W}\{(S'(x), h)_H (F'(x), h)_H\} = 2\varphi'(\|x\|_H^2) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (S'(x), f_k)_H (x, f_k)_H = 0$, $((F'(x), h)_H = 2\varphi'(\|x\|_H^2) \times (x, h)_H$, $(S'(x), f_k)_H (x, f_k)_H \to 0$ при $n \to \infty)$. Таким образом,

$$\Delta V(x) = 2\varphi'(\|x\|_H^2) S(x) = 2 \frac{\varphi'(\|x\|_H^2)}{\varphi(\|x\|_H^2)} V(x).$$

Лемма 2. *Если* $\Delta V(x) = \dfrac{2\varphi'(\|x\|_H^2)}{\varphi(\|x\|_H^2)} V(x)$, *то функция* $V(x)$ *имеет вид* $V(x) = \varphi(\|x\|_H^2) S(x)$, *где* $S(x)$ — *произвольная гармоническая функция.*

Доказательство. Из $\Delta V(x) = \dfrac{2\varphi'(\|x\|_H^2)}{\varphi(\|x\|_H^2)} V(x)$, для $V(x) \neq 0$ имеем $\Delta V(x)/V(x) = \Delta\varphi(\|x\|_H^2)/\varphi(\|x\|_H^2)$. Отсюда

$$\Delta\{\ln|V(x)|\} = \Delta\{\ln\varphi(\|x\|_H^2)\}, \text{ т. е. } \Delta\left\{\ln \frac{|V(x)|}{\varphi(\|x\|_H^2)}\right\} = 0.$$

Значит $\ln \dfrac{|V(x)|}{\varphi(\|x\|_H^2)} = \mathrm{H}(x)$, где $\mathrm{H}(x)$ — произвольная гармоническая функция. Таким образом, $V(x) = \varphi(\|x\|_H^2) e^{\mathrm{H}(x)} = \varphi(\|x\|_H^2) S(x)$, $S(x)$ — произвольная гармоническая функция.

Определим оператор L в $\mathfrak{L}_2(H)$ со всюду плотной областью определения D_L, полагая $LU = \Delta U$, $D_L = \mathfrak{T}$.

Теорема. *Оператор* L *самосопряжен в* $\mathfrak{L}_2(H)$.

Доказательство. L — симметрический оператор, поскольку D_L плотна в $\mathfrak{L}_2(H)$ и согласно лемме 1

$$(LV_1, V_2)_{\mathfrak{L}_2(H)} = \int_H \frac{2\varphi'(\|x\|_H^2)}{\varphi(\|x\|_H^2)} V_1(x) V_2(x) \mu(dx) = (V_1, LV_2)_{\mathfrak{L}_2(H)} \\ \forall V_1, V_2 \in D_L.$$

Покажем, что оператор L самосопряженный. Пусть $Z \in D_{L^*}$ и $Z^* = L^*Z$. Тогда $\forall V \in D_L$ $(LV, Z)_{\mathfrak{L}_2(H)} = (V, L^*Z)_{\mathfrak{L}_2(H)} = (V, Z)_{\mathfrak{L}_2(H)}$, т. е.

$$\int_H \frac{2\varphi'(\|x\|_H^2)}{\varphi(\|x\|_H^2)} V(x) Z(x) \mu(dx) = \int_H V(x) Z^*(x) \mu(dx) = 0.$$

Или, учитывая, что $V(x) = \varphi(\| x \|_H^2) S(x)$,

$$\int_H \varphi(\| x \|_H^2) S(x) \left[\frac{2\varphi'(\| x \|_H^2)}{\varphi(\| x \|_H^2)} Z(x) - Z^*(x) \right] \mu(dx) = 0.$$

Последнее равенство справедливо, в частности, при $S = \Psi \in \mathfrak{C}$ (например, оно справедливо, когда $\Psi(x)$ принадлежит полной ортонормированной системе полиномов Фурье — Эрмита), откуда следует, что почти всюду на H $Z^* = \dfrac{2\varphi'(\| x \|_H^2)}{\varphi(\| x \|_H^2)} Z$, т. е. $\dfrac{2\varphi'(\| x \|_H^2)}{\varphi(\| x \|_H^2)} Z \in \mathfrak{L}_2(H)$ (ибо $Z^* \in \mathfrak{L}_2(H)$), так что $Z^* = LZ$, $LZ = \dfrac{2\varphi'(\| x \|_H^2)}{\varphi(\| x \|_H^2)} Z$. При $L = \Delta$ согласно лемме 2 функция $Z(x)$ имеет вид $Z(x) = \varphi(\| x \|_H^2) S(x)$. Поэтому $Z \in D_L$. Таким образом, $D_{L^*} \subseteq D_L$ $(L^* \subseteq L)$.

В силу симметричности оператора L $L \subseteq L^*$. Таким образом, $L = L^*$.

Заметим, что если функция $\varphi(\xi)$ еще и такая, что $|\varphi'(\xi)/\varphi(\xi)| \leqslant A$ на $[0, \infty)$, то $\bar{L}$ — ограниченный самосопряженный оператор в $\mathfrak{L}_2(H)$,

$$\| \bar{L} U \|_{\mathfrak{L}_2(H)} = \left[\int_H \left[\frac{2\varphi'(\| x \|_H^2)}{\varphi(\| x \|_H^2)} U(x) \right]^2 \mu(dx) \right]^{1/2} \leqslant 2A \| U \|_{\mathfrak{L}_2(H)}.$$

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа.— М. : Наука, 1967.— 506 с.
2. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные дифференциальные операторы Лапласа—Леви // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, № 1.— С. 69—79.
3. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные самосопряженные дифференциальные операторы Лапласа Леви // Там же.— 1983.— **35**, № 2.— С. 200—206.
4. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные эллиптические уравнения и операторы типа П. Леви // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, № 4.— С. 97—140.

УкрНПДО, Киев

Получено 01.10.86