УДК 519.21

Р. Е. Майборода

Об асимптотике эмпирических производящих функций моментов случайных величин

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина (с. в.), $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — выборка с. в. ξ. Производящей функцией моментов (п. ф. м.) с. в. ξ называется функция $f(t) = \mathrm{M} \exp(t\xi)$, $t \in \mathbb{R}$. В данной статье рассматриваются только с. в., для которых $f(t) < \infty$, $t \in \mathbb{R}$. В качестве оценки для f используется эмпирическая п. ф. м. (э. п. ф. м.) $f_n(t) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \exp(t\xi_k)$, $t \in \mathbb{R}$.

При исследовании $f_n(t)$ нам понадобятся некоторые процессы. Случайный процесс $W(\vec{z})$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{z} > \vec{0}$ называется винеровским, если 1) $W(\vec{z})$, $\vec{z} > \vec{0}$— гауссовский процесс; 2) $\mathbf{M}\vec{W}(z) = 0$, $\mathbf{M}W(\vec{z}_1) W(\vec{z}_2) = \prod_{j=1}^{2} \min(z_1^j, z_2^j)$, где $\vec{z}_k = (z_k^1, z_k^2)$; 3) процесс $W(\vec{z})$ выборочно непрерывен. Процессом Кифера называют процесс $K(x, y) = W(x, y) - xW(1, y)$. Для функций $V: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обозначим через $V^*(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (tx - V(x))$ преобразование Юнга — Фенхеля.

Теорема. *Пусть V — выпуклая, дифференцируемая, четная функция, монотонно возрастающая при $x > 0$. Если для $F(x) = P\{\xi < x\}$ выполняется неравенство*

$$F(-x) + 1 - F(x) \leqslant C_1 \exp(-2V^*(x/\tau)) \quad \forall x > 0, \tag{1}$$

то существует вероятностное пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{P})$, на котором можно определить последовательность $\{\tilde{f}_n(t)\}$ и процесс Кифера $K(x, y)$ так, что

$$\{\tilde{f}_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \doteq \{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \tag{2}$$

(знак $\doteq$ означает равенство распределений случайных функций $\tilde{f}: N \times \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ и $f: N \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$) и при некоторых C_3, $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| p(t) \left[n^{1/2} (\tilde{f}_n(t) - f(t)) - n^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)\, dK(F(x), n) \right] \right| \leqslant C_3 n^{-\varepsilon} \text{ п. н.,} \tag{3}$$

где $p(t) = \exp(-V(\sigma t))$, $\sigma > \tau$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся четыре леммы.

Лемма 1 [1, 2]. *Если $F_n(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} I_{\{\xi_k < x\}}$ — эмпирическая функ-*

ция распределения ξ, $\beta_n(x) = n^{1/2}(F_n(x) - F(x))$, *то на некотором вероятностном пространстве* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}, \mathbf{P})$ *можно задать процессы* $\tilde{\beta}_n(x)$ *и* $K(x, y)$ *такие, что* 1) $\{\tilde{\beta}_n(x)\}_1^\infty \doteq \{\beta_n(x)\}_1^\infty$; 2) $K(x, y)$ — *процесс Кифера*; 3) $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} |\tilde{\beta}_n(x) - n^{-1/2}K(F(x), n)| = O(n^{-1/2}\ln^2 n)$ п. н.

Лемма 2. *Если* $0 < \gamma < 1/2$, *то существует такая с. в.* $C_4(\omega) < \infty$, *что* $|F_n(x) - F(x)| \leqslant C_4 (\ln\ln n/n) F^\gamma(x)\ (1 - F(x))^\gamma$.

Доказательство. В силу закона повторного логарифма для эмпирических функций распределения [3] достаточно проверить, что функция $h_\gamma(x) = x^{-\gamma}(1 - x)^{-\gamma}$ удовлетворяет следующим условиям: $x^{1/2}h_\gamma(x)$ монотонно возрастает на $(0, \delta]$, а $(1 - x)^{1/2}h_\gamma(x)$ монотонно убывает на $[1 - \delta, 1]$ для некоторого $0 < \delta < 1$, и $\int\limits_0^1 h_\gamma(t)/\ln\ln(t(1 - t))^{-1}\,dt < \infty$. Эти условия, очевидно, выполнены.

Лемма 3 (равенство (1.15.1) в [4, с. 81]).

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{0<s<1} |K(s, n)[4ns(1 - s)\ln\ln(n/s(1 - s))]^{-1/2}| = 1 \ \textit{п. н.}$$

Лемма 4. *Если* V — *выпуклая, монотонно возрастающая при* $x > 0$, *дифференцируемая функция, то*

$$\int\limits_a^{+\infty} \exp(-\alpha V(x))\,dx \leqslant C_5 \exp(-\alpha V(a))$$

при достаточно больших a.

Доказательство. Поскольку V — выпуклая, возрастающая функция, то существуют a_0, $C_6 > 0$ такие, что $\forall x > a_0\ V'(x) > C_6$. Тогда при $a > a_0$

$$\int\limits_a^{+\infty} \exp(-\alpha V(x))\,dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} C_6^{-1}V'(x)\exp(-\alpha V(x))\,dx \leqslant (C_6\alpha)^{-1}\exp(-\alpha V(a)).$$

Доказательство теоремы. Легко видеть, что $n^{1/2}(f_n(t) - f(t)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)\,d\beta_n(x)$. Рассмотрим последовательность $\{\tilde{\beta}_n(x)\}_1^\infty$, определенную в лемме 1, и положим $\tilde{f}_n(t) = n^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)\,d\tilde{\beta}_n(x) + f(t)$. В силу первого утверждения леммы 1 $\{\tilde{f}_n(t)\}_1^\infty \doteq \{f_n(t)\}_1^\infty$, так что (2) выполнено. Перейдем к доказательству (3). Обозначим

$$J = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| p(t)\left[n^{1/2}(\tilde{f}_n(t) - f(t)) - n^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)\,dK(F(x), n)\right]\right| =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)\,p(t)\,d\alpha_n(x)\right|,$$

где $\alpha_n(x) = \tilde{\beta}_n(x) - n^{-1/2}K(F(x), n)$. Далее, интегрируя по частям, получаем

$$J = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\,p(t)\,t\exp(tx)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\alpha(x)| \sup_{t\in\mathbb{R}} \exp(tx - V(\sigma x) + \ln|t|)\,dx.$$

Поскольку $tx - V(\sigma t) + \ln|t| \leqslant \max\left\{V^*\left(\frac{x+1}{\sigma}\right),\ V^*\left(\frac{-x+1}{\sigma}\right)\right\} = V^*\left(\frac{|x|+1}{\sigma}\right)$, то $J \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\alpha(x)|\ \operatorname{xp}\left(V^*\left(\frac{|x|+1}{\sigma}\right)\right)dx$. Обозначив $J(a, b) =$

$= \int_a^b |\alpha(x)| \exp\left(V^*\left(\frac{|x|+1}{\sigma}\right)\right) dx$, получим для любого a_n $J \leqslant J(-\infty, -a_n) + J(-a_n, a_n) + J(a_n, +\infty)$. Положим $a_n = \sigma V^{*-1}(\alpha \ln n)/\beta$, где параметры $\beta > 1$ и $\alpha > 0$ будут выбраны позже. Тогда при больших n

$$J(-a_n, a_n) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |\alpha(x)| \cdot 2a_n \exp(V^*((|a_n|+1)/\sigma)) \leqslant C_7 n^{-1/2} \ln^2 n \times$$

$$\times 2\frac{\sigma}{\beta} V^{*-1}(\alpha \ln n) \exp V^*(V^{*-1}(\alpha \ln n) \leqslant C_8 n^{-1/2} \ln^2 n \cdot n^{\alpha}$$

(мы применили здесь лемму 1 и воспользовались выпуклостью V^*). Далее, $J(-\infty, a_n) \leqslant J_1 + J_2$, где

$$J_1 = \int_{-\infty}^{a_n} |\tilde{\beta}_n(x)| \exp V^*((|x|+1)/\sigma)\, dx,$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{a_n} n^{-1/2} |K(F(x), n)| \exp V^*((|x|+1)/\sigma)\, dx.$$

В силу леммы 2 при достаточно больших a_n имеем

$$J_1 \leqslant C_8 (\ln\ln n)^{1/2} \int_{-\infty}^{a_n} F^{\gamma}(x)(1-F(x))^{\gamma} \exp V^*(\beta x/\sigma)\, dx \leqslant C_9 (\ln\ln n)^{1/2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{a_n} \exp[-2\gamma V^*(x/\tau) + V^*(\beta x/\sigma)]\, dx \leqslant C_9 (\ln\ln n)^{1/2} \exp([-2\gamma\sigma/(\beta\tau) + 1] \times$$

$$\times V^*(\beta x/\sigma))$$

(мы воспользовались леммой 4). Окончательно, $J_1 \leqslant C_9 n^{-\alpha r} (\ln\ln n)^{1/2}$, где $r = 2\gamma\sigma/(\beta\tau) - 1$.

Для того, чтобы оценить J_2, применим лемму 3:

$$J_2 \leqslant C_{10} \int_{-\infty}^{a_n} [\ln\ln[n/(F(x)(1-F(x)))] \cdot F(x)(1-F(x))]^{1/2} \exp(V^*(\beta x/\sigma))\, dx.$$

Те же рассуждения, что и в случае J_1, приводят к оценке $J_2 \leqslant C_{11} n^{-\alpha r} \times (\ln\ln n)$.

Аналогично оценивается $J(a_n, +\infty)$. Получаем $J \leqslant C_8 n^{-1/2+\alpha} \ln^2 n + C_{12} n^{-\alpha r} (\ln\ln n)^{1/2}$.

Выбирая γ достаточно близким к 1/2, а β — к 1, можно для любого δ получить $r = \sigma/(\tau+\delta) - 1$. Теперь, полагая $\alpha = (\tau+\delta)/(2\delta)$, получаем (3) с $\varepsilon = 1/2 - (\tau+\delta)/(2\sigma)$. Поскольку $\sigma > \tau$, то при достаточно малых δ $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

1. *Komlos J., Major P., Tusnady G.* An approximation of partial sums of independent r. v. s. and sample D. F. I // Z. Wahrsh.— 1975.— **32**.— S. 111—131.
2. *Csörgó S.* Limit behavior of the empirical characteristic function // Ann. Probab.— 1981.— **9**, N 1.— P. 130—144.
3. *James B. R.* A functional law of the iterated logarism for weighted empirical distributions // Ibid.— 1975.— **3**, N 5.— P. 762—772.
4. *Csörgó M., Révész P.* Strong Approximations in Probability and Statistics.— Budapest : Academia, 1981.— 284 p.

Киев. ун-т

Получено 08.10.86