УДК 517.1

А. М. Блох, М. Ю. Любич

Эргодичность транзитивных унимодальных преобразований отрезка

1. Введение. Рассмотрим *кусочно-монотонное преобразование* f *отрезка* $I = [0, 1]$ *с отрицательным шварцианом*. Это означает, что функция $f \in C^3$ имеет конечное число критических точек, вне которых $Sf = f'''/f' - (3/2)(f''/f')^2 < 0$. Преобразование f называется *унимодальным*, если оно имеет единственную критическую точку c, причем эта точка невырождена. Такое преобразование, несмотря на элементарность ситуации, порождает нетривиальную и интересную динамическую систему [1, 2].

Преобразование f называется (*топологически*) *транзитивным*, если оно имеет плотную орбиту $\{f^n x\}_{n=0}^{\infty}$ (где f^n — n-я итерация f) и *эргодическим*, если не существует разбиения $I = X_1 \cup X_2$ на два измеримых инвариантных подмножества положительной меры (инвариантность означает, что $fX_i \subset X_i$). При этом отрезок I также называется транзитивным (соответственно эргодическим). Целью настоящей работы является доказательство следующего результата.

Теорема. *Транзитивное унимодальное преобразование* $f : I \to I$ *с отрицательным шварцианом является эргодическим.*

Отметим два следствия этой теоремы. Первое из них имеет хорошо известный аналог в теории рациональных эндоморфизмов сферы Римана (Сулливан [3]). Множество X называется *сильно блуждающим*, если $f^n X \cap f^m X = \varnothing$ при $n > m \geqslant 0$.

Следствие 1. *Унимодальное преобразование* f *с отрицательным шварцианом не имеет сильно блуждающих множеств* X *положительной меры, для которых все итерации* $f^n \mid X$ *инъективны.*

Следствие 2. *Унимодальное преобразование отрезка с отрицательным шварцианом может иметь, самое большее, одну абсолютно непрерывную инвариантную вероятностную меру. Если такая мера существует, то она эргодична.*

Основной результат настоящей работы анонсирован в [4].

2. Теорема искажения для функций с отрицательным шварцианом. Обозначим через λ меру Лебега на прямой Основным аналитическим инструментом при доказательстве теоремы является следующее свойство функций с отрицательным шварцианом.

Теорема искажения [4, 5]. *Пусть отображение* $\varphi : I \to J$ *не имеет критических точек внутри* I *и* $S\varphi < 0$. *Пусть интервал* $\mathcal{J}$ *разбит на интервалы* $\mathcal{J}_1$ *и* $\mathcal{J}_2$ *точкой* y; E — *измеримое подмножество в* $\mathcal{J}$, $\eta \in (0, 1)$. *Тогда существует такой интервал* $K_\eta = [y, z_\eta]$, *содержащийся в некотором* $\mathcal{J}_l$, $l = 1, 2$, *для которого* $\dfrac{\lambda(\varphi^{-1}(E \cap K_\eta))}{\lambda(\varphi^{-1}K_\eta)} \geqslant \eta \dfrac{\lambda(E \cap \mathcal{J}_l)}{\lambda(\mathcal{J}_l)}$.

Приведем для полноты доказательство теоремы искажения (отличное от предложенного в [5]). Оно использует известный Принцип минимума [1]. *Пусть отображение* $\varphi : I \to J$ *не имеет критических точек внутри* I *и* $S\varphi < 0$. *Тогда функция* $|\varphi'|$ *не имеет внутри* I *точек локального минимума.*

Доказательство теоремы искажения. Пусть $x = \varphi^{-1}y$, I_1 и I_2 — интервалы, на которые точка x делит отрезок I. По принципу минимума функция $|\varphi'|$ монотонно убывает на одном из этих интервалов, для определенности — на $I_1 = \varphi^{-1}\mathcal{J}_1$. После аффинной замены координат можно считать, что $I_1 = \mathcal{J}_1 = [0, 1]$, $x = y = 0$. Тогда $\varphi^{-1}K_\eta = (0, \alpha)$ и требуемое неравенство принимает вид

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \chi_F dx \geqslant \eta \int_0^1 \chi_F |\varphi'| dx,$$

где χ_F — характеристическая функция множества $F = \varphi^{-1}E$. Следующая лемма завершит доказательство.

Лемма 1. *Пусть g — непрерывная невозрастающая неотрицательная функция на отрезке* $[0, 1]$, $\int\limits_0^1 g(x)\,dx = 1$; $\psi \in L_1[0, 1]$. *Тогда*

$$\sup_{\alpha\in(0,1)} \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha \psi dx \geqslant \int\limits_0^1 \psi g dx.$$

Доказательство. Полагая $g_\alpha = \frac{1}{\alpha}\chi_{[0,\alpha]}$, перепишем неравенство в виде

$$\sup_{\alpha\in(0,1)} \int\limits_0^1 \psi g_\alpha dx \geqslant \int\limits_0^1 \psi g dx.$$

Теперь оно стало очевидным, поскольку любая функция g рассматриваемого класса равномерно аппроксимируется выпуклыми комбинациями функций g_α.

Нам потребуется некоторая информация о топологических свойствах динамики преобразований отрезка [6]. Непрерывное преобразование $f: [a, b] \to [a, b]$ называется *перемешивающим*, если для любого интервала $\mathcal{J} \subset [a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $f^n\mathcal{J} \supset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ при $n \geqslant N$. Ясно, что в этом случае ни при каком n не существует нетривиальных f^n-инвариантных интервалов.

Лемма 2 [6]. *Пусть $f: I \to I$ — непрерывное транзитивное преобразование отрезка. Тогда либо f является перемешивающим, либо существует неподвижная точка a, разбивающая I на два интервала I_1 и I_2 такие, что $f: I_1 \to I_2 \to I_1$ и преобразование $f^2: I_l \to I_l$ перемешивающее.*

Далее, вернемся к унимодальным преобразованиям. Предположим для определенности, что c — точка максимума функции f. Из транзитивности f легко следует, что $f: c \mapsto 1 \mapsto 0$. Следовательно, существует точка $\gamma \in (c, 1]$, для которой $f(\gamma) = f(0)$ и на отрезке $[0, \gamma]$ определена инволюция $\tau: x \mapsto x'$, где $f(x') = f(x)$. Из невырожденности критической точки c вытекает гладкость τ.

Далее через (a, b) будем обозначать интервал с концами a, b, не предполагая, что $a < b$. Введем также следующие обозначения: $U_b = (b, b')$, где $b \in [0, \gamma]$; $H_n(x)$ — интервал монотонности функции f^n, содержащий точку x; $M_n(x) = f^n H_n(x)$.

Лемма 3. *Пусть f — перемешивающее унимодальное преобразование. Предположим, что орбита точки x заходит в окрестность U_b и n — первый момент, для которого $f^n x \in U_b$. Тогда $M_n(x) \supset U_b$.*

Доказательство. Пусть точка x разбивает интервал $H_n(x)$ на интервалы H_n^+ и H_n^-, точка c — интервал U_b на интервалы U_b^+ и U_b^-. Тогда при любом $\mu = \pm 1$ и подходящих $\gamma \in \{\pm 1\}$, $l < n$ имеем $f^l H_n^\mu = [c, f^l x] \supset U_b^\gamma$. Если $f^{n-l} c \in U_b$, то $f^{n-l}[c, f^l x] \subset U_b$ и, тем более, $f^{n-l}U_b = f^{n-l}U_b^\gamma \subset U_b$. Но последнее невозможно для перемешивающих отображений. Таким образом, концы отрезка $M_n(x)$ находятся за пределами окрестности U_b, что и требовалось.

Множество будем называть *симметричным*, если оно *τ-инвариантно.*

Основная лемма. *Пусть $f: I \to I$ — транзитивное унимодальное преобразование отрезка. Пусть множество $X \subset I$ имеет положительную меру, f-инвариантно и симметрично в окрестности критической точки c. Тогда c является точкой плотности множества X.*

Доказательство. Предположим, что преобразование f перемешивающее (это не ограничивает общности в силу леммы 2). По теореме Гуккенхеймера [7] $\omega(x) \ni c$ для п. в. $x \in I$* (см. также [4, 5]). Зафиксиру-

* $\omega(x)$ обозначает предельное множество орбиты $\{f^n x\}_{n=0}^\infty$.

ем некоторую точку плотности $x \in X$ множества X, для которой $\omega(x) \ni c$. Положим $Y = I \setminus X$. Для интервала $\mathcal{J} = (a, b)$ через $\rho(a, b) = \rho(\mathcal{J}) = \lambda(Y \cap \mathcal{J})/\lambda(\mathcal{J})$ обозначим плотность множества Y в $\mathcal{J}$. Рассмотрим два случая:

1. *Нижняя плотность множества Y в точке c положительна*; $\underline{\lim}_{b \to c} \rho(c - b, c + b) > 0$. Тогда в силу гладкости τ и симметричности множества X имеем $\rho(U_b) \geqslant \varepsilon > 0$ для всех $b \neq c$. Можно считать, что точка x имеет симметричную. Пусть $n_0 = 0$, n_{k+1} — первый момент попадания траектории $\{f^n x\}_{n=n_k+1}^{\infty}$ в окрестность $U_k \equiv U_{f^{n_k}x}$; x_k — та из точек $f^{n_k}x$, $\tau(f^{n_k}x)$, которая расположена левее c. Поскольку $U_k = \bigcup_{i=k}^{\infty}(U_i \setminus U_{i+1})$, то для некоторой последовательности $k_j \to \infty$ выполняется $\rho(U_{k_j} \setminus U_{k_j+1}) \geqslant \varepsilon > 0$. Снова воспользовавшись симметричностью X и гладкостью τ, получаем $\rho(x_{k_j}, x_{k_j+1}) \geqslant L^{-2}\rho(U_{k_j} \setminus U_{k_j+1}) \geqslant \varepsilon_1 > 0$, где L — константа Липшица инволюции τ, $\varepsilon_1 = L^{-2}\varepsilon$. Кроме того, для всех k выполняется $\rho(x'_k, x_{k+1}) \geqslant \min(\rho(x'_k, c), \rho(c, x_{k+1})) \geqslant \varepsilon_1 > 0$. Итак, в каждом из интервалов, на которые точка x_{k_j+1} делит интервал U_{k_j}, плотность множества Y не меньше ε_1.

Положим $V_k = f^{-n_k}U_k \cap H_{n_k}(x)$. По лемме 3 f^{n_k} монотонно отображает V_k на U_k. Применяя теорему искажения, получаем, что в некоторой полуокрестности точки x, содержащейся в V_k, плотность множества Y не меньше $\varepsilon_1/2$. Транзитивность f влечет отсутствие гомтервалов*; следовательно, $\lambda(V_k) \to 0$. Таким образом, множество $y = I \setminus X$ имеет положительную верхнюю плотность в точке x, вопреки тому, что x — точка плотности множества X.

2. Нижняя плотность множества Y в точке c равна 0: $\underline{\lim}_{b \to c} \rho(c - b, c + b) = 0$. Рассуждая от противного, предположим, что $\overline{\lim}_{b \to c} \rho(c - b, c + b) > 0$. Тогда в силу симметричности X и гладкости τ найдутся такие последовательности $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, что

$$b_k \in (a_k, c), \ a_k \to c, \tag{1}$$

$$\rho(a_k, c) \geqslant \varepsilon, \ \rho(a'_k, c) \geqslant \varepsilon > 0, \tag{2}$$

$$\rho(b_k, c) < \delta_k, \ \rho(b'_k, c) < \delta_k, \quad \delta_k \to 0, \tag{3}$$

$$\rho(U_d) \leqslant \rho(U_{a_k}), \quad d \in U_{a_k} \setminus U_{b_k}. \tag{4}$$

Пусть n_k — первый момент попадания орбиты $\{f^n x\}_{n=0}^{\infty}$ в окрестность U_{a_k}, $x_k = f^{n_k}x$. Меняя при необходимости точки a_k, b_k на a'_k, b'_k, будем считать, что $x_k \in (a_k, c)$. Имеем

$$\rho(x_k, a'_k) \geqslant \frac{\lambda(Y \cap (c, a'_k))}{|a_k - a'_k|} \geqslant \frac{1}{1 + L^2} \rho(U_{a_k}) \geqslant \frac{\varepsilon}{1 + L^2} > 0.$$

Чтобы оценить плотность множества Y в интервале (a_k, x_k), рассмотрим два случая:

а). $x_k \in (a_k, b_k]$. В силу (4) $\rho(U_{x_k}) \leqslant \rho(U_{a_k})$ и, следовательно, $\rho((x_k, a_k) \cup \tau(x_k, a_k)) = \rho(U_{a_k} \setminus U_{x_k}) \geqslant \rho(U_{a_k}) \geqslant \varepsilon$. Снова воспользовавшись гладкостью τ и симметричностью X, находим $\rho(x_k, a_k) \geqslant L^{-2}\varepsilon$.

б). $x_k \in (b_k, c)$. Тогда $\lambda(Y \cap (a_k, c)) = \lambda(Y \cap (a_k, b_k)) + \lambda(Y \cap (b_k, c)) \leqslant |b_k - a_k| + \delta_k |c - b_k|$. Следовательно, $\varepsilon \leqslant \rho(a_k, c) \leqslant \frac{|b_k - a_k|}{|a_k - c|} + \delta_k$ и,

* *Гомтервалом* называется интервал $\mathcal{J}$, на котором все итерации $f^n | \mathcal{J}$ инъективны.

значит, $|b_k - a_k| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}|c - a_k|$ при достаточно больших k. Но тогда

$$\rho(a_k, x_k) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\lambda((a_k, b_k)\cap Y)}{|a_k - b_k|} = \frac{\varepsilon}{2}\rho(a_k, b_k) \geqslant \frac{\varepsilon^2}{2}\,\frac{1}{L^2}$$

(последнее неравенство следует из (4)).

Итак, в каждом из случаев а), б) плотности $\rho(a_k, x_k)$ и $\rho(x_k, a'_k)$ отделены от нуля. Теперь, воспользовавшись леммой 3 и теоремой искажения, как в случае 1, получим, что верхняя плотность множества Y в точке x положительна. Противоречие доказывает основную лемму.

Доказательство теоремы. Требуемое утверждение сразу вытекает из основной леммы, поскольку если $I = X_1 \cup X_2$ — разбиение отрезка на два f-инвариантных множества, то эти множества симметричны: $\tau X_k \cup X_k = f^{-1}(fX_k) = X_k$.

Доказательство следствия 1. Пусть Y — сильно блуждающее множество положительной меры, на котором все итерации f^n инъективны. Разбив Y на два подмножества положительной меры Y_1 и Y_2, построим разбиение всего отрезка на два инвариантных подмножества положительной меры $X_1 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n Y_1$, $X_2 = I \setminus X_1$. Противоречие.

Чтобы доказать следствие 2, воспользуемся топологической картиной динамики непрерывных преобразований отрезка [6]. Комбинируя ее с теоремой Гуккенхеймера об отсутствии гомтервалов [7] и результатами работ [4, 5], получаем следующее утверждение.

Теорема А. *Пусть $f: I \to I$ — унимодальное преобразование с отрицательным шварцианом; $f: c \mapsto 1 \mapsto 0$. Тогда существует компакт $A \subset I$ такой, что $\omega(x) = A$ для п. в. $x \in I$*. При этом имеет место одна из следующих возможностей:*

а) *A — цикл притягивающей или нейтральной периодической точки;*

б) *A содержится в цикле транзитивного отрезка;*

в) *A является соленоидом (т. е. канторовым множеством, на котором f топологически сопряжено с транзитивным сдвигом по группе).*

Доказательство следствия 2. Ясно, что носитель любой абсолютно непрерывной инвариантной меры содержится в A. Следовательно, в случае а) такой меры не существует, в случае в) если она существует, то обязана совпадать с единственной инвариантной мерой преобразования $f \mid A$. Наконец, в случае б) требуемое вытекает из доказанной теоремы.

1. *Collet P., Eckmann J.-P.* Iterated maps on the interval as dynamical systems.— Basel etc.: Birhäuser, 1980.— 248 p.
2. *Якобсон М. В.* Эргодическая теория одномерных отображений // Итоги науки и техники. Сер. совр. пробл. математики / ВИНИТИ.— 1985.— **2**.— С. 204—232.
3. *Sullivan D.* Quasiconformal homeomorphisms and dynamics, I // Ann. Math.— 1985.— **122**, N 3.— P. 401—418.
4. *Блох А. М., Любич М. Ю.* Аттракторы преобразований отрезка // Функцион. анализ и его прил.— 1987.— **21**, № 2.— С. 70—71.
5. *Блох А. М., Любич М. Ю.* О типичном поведении траекторий преобразований отрезка // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 49.— С. 5—16.
6. *Блох А. М.* О динамических системах на одномерных разветвленных многообразиях, I // Там же.— 1986.— Вып. 46.— С. 8—18.
7. *Guckeheimer J.* Sensitive dependence on initial conditions for one dimensional maps // Communs Math. Phys.— 1979.— **70**.— P. 133—160.
8. *Milnor J.* On the concept of attractor // Ibid.— 1985.— **99**.— P. 177—195.

Ленингр. отд-ние Мат. ин-та АН СССР

Получено 16.09.86

* Т. е. f имеет единственный *аттрактор* A в смысле Милнора [8].