УДК 519.21

В. А. КОВАЛЬ, асп. (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Асимптотическое поведение решений стохастических рекуррентных уравнений в R^d

Изучается сходимость к нулю и ограниченность с вероятностью 1 решений стохастических рекуррентных уравнений при матричных нормировках.

Вивчається збіжність до нуля і обмеженість з імовірністю 1 розв'язків стохастичних рекурентних рівнянь при матричних нормуваннях.

Пусть случайная последовательность $\{X_n\}$ в R^d является решением уравнения

$$X_{n+1} = AX_n + B_{n+1}\Gamma_{n+1}, \quad n \geqslant 0, \quad X_0 = 0, \tag{1}$$

где A — невырожденная матрица размера $d \times d$; $\{B_n\}$ — последовательность матриц; $\{\Gamma_n\}$ — последовательность независимых гауссовских $N(0, I)$-распределенных векторов в R^d (I — единичная матрица). Найдем необходимые и достаточные условия, при которых

$$\lim_{n\to\infty} C_n X_n = 0 \text{ (п. н.)}, \tag{2}$$

а также $\overline{\lim_{n\to\infty}} \| C_n X_n \| < \infty$ (п. н.), где $\{C_n\}$ — последовательность матриц; $\| \cdot \|$ — евклидова норма вектора в R^d.

Введем некоторые обозначения. Представим матрицу A в виде $A = TJT^{-1}$, где T — некоторая невырожденная матрица, $J = \operatorname{diag}\{J(\lambda_1), J(\lambda_2), \dots, J(\lambda_\nu)\}$, $J(\lambda_j)$ — жорданова клетка размера $p_j \times p_j$ с собственным значением λ_j матрицы A на диагонали, если $p_j > 1$ и $J(\lambda_j) = \lambda_j$, если $p_j = 1$, причем среди λ_j могут быть равные. Предполагаем, что $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_\nu|$. Обозначим элементы матрицы T следующим образом:

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1}^{(1)} & t_{1,2}^{(1)} & \dots & t_{1,p_1}^{(1)} & t_{1,1}^{(2)} & t_{1,2}^{(2)} & \dots & t_{1,p_2}^{(2)} & \dots & t_{1,1}^{(\nu)} & t_{1,2}^{(\nu)} & \dots & t_{1,p_\nu}^{(\nu)} \\ t_{2,1}^{(1)} & t_{2,2}^{(1)} & \dots & t_{2,p_1}^{(1)} & t_{2,1}^{(2)} & t_{2,2}^{(2)} & \dots & t_{2,p_2}^{(2)} & \dots & t_{2,1}^{(\nu)} & t_{2,2}^{(\nu)} & \dots & t_{2,p_\nu}^{(\nu)} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ t_{d,1}^{(1)} & t_{d,2}^{(1)} & \dots & t_{d,p_1}^{(1)} & t_{d,1}^{(2)} & t_{d,2}^{(2)} & \dots & t_{d,p_2}^{(2)} & \dots & t_{d,1}^{(\nu)} & t_{d,2}^{(\nu)} & \dots & t_{d,p_\nu}^{(\nu)} \end{pmatrix}.$$

Определим для каждого $j = 1, 2, \dots, d$ все числа $l_{j,1} < l_{j,2} < \dots < l_{j,q_j}$, где $1 \leqslant q_j \leqslant \nu$ из множества $\{1, 2, \dots \nu\}$, такие, что в каждом из множеств $\{t_{j,1}^{(l_{j,k})}; t_{j,2}^{(l_{j,k})}; \dots; t_{j,p_{l_{j,k}}}^{(l_{j,k})}\}$, где $k = 1, 2, \dots, q_j$, имеется по крайней мере один ненулевой элемент, причем $|\lambda_{l_{j,1}}| = |\lambda_{l_{j,2}}| = \dots = |\lambda_{l_{j,q_j}}| > |\lambda_{l_{j,q_j+1}}|$. Определим также для $j = 1, 2, \dots, d$ такие числа $1 \leqslant v_{l_{j,k}} \leqslant p_{l_{j,k}}$, где $k = 1, 2, \dots, q_j$, что $t_{j,1}^{(l_{j,k})} = t_{j,2}^{(l_{j,k})} = \dots = t_{j,v_{l_{j,k}}-1}^{(l_{j,k})} = 0$, а $t_{j,v_{l_{j,k}}}^{(l_{j,k})} \neq 0$. Обозначим $L_j = \{l_{j,1}; l_{j,2}; \dots; l_{j,q_j}\}$ и положим $z_j = \max_{l \in L_j} (p_l - v_l)$. Через l_j обозначим какой-либо элемент из множества L_j, при котором $p_{l_j} - v_{l_j} = z_j$.

Рассмотрим вначале случай, когда $C_n = \operatorname{diag}\{c_1(n), c_2(n), \dots, c_d(n)\}$, где $\{c_j(n)\} \subset R^1$. Введем следующие обозначения для $j = 1, 2, \ldots, d$:

$$\varphi_j(n) = c_j^2(n) |\lambda_{l_j}|^{2n} n^{2z_j}; \quad g_j(n) = \sum_{i=1}^{n} \| B_i \|_E^2 |\lambda_{l_j}|^{-2i};$$

$$f_j(n) = \sum_{i=1}^{n} \| B_i \|_E^2 |\lambda_{l_j}|^{-2i} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^{2z_j}; \qquad f_j = \{f_j(n)\}.$$

Здесь $\|\cdot\|_E$ — евклидова норма матрицы в R^d. Если последовательность $p = \{p(n)\} \subset R^1$ такова, что $0 < p(n) \leqslant p(n+1)$, $n \geqslant 1$, то будем также обозначать $V_n\{p\} = \ln\left(e + \sum_{k=1}^{n-1} \min\{1, \ln(p(k+1)\, p^{-1}(k))\}\right)$.

В дальнейшем понадобится следующее условие:

$$\varlimsup_{n\to\infty} (\rho_{\max}(B_n)/\rho_{\min}(B_n)) < \infty, \tag{3}$$

где $\rho_{\min}(\cdot)$ и $\rho_{\max}(\cdot)$ — соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы. Условие (3) выполнено, например, если $B_n = b_n B$, где $\{b_n\} \subset R^1$, а матрица B не вырождена.

Теорема 1. *Пусть $C_n = \operatorname{diag}\{c_1(n), c_2(n), \ldots, c_d(n)\}$ и выполняется* (3). *Тогда для выполнения* (2) *достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(n)\, f_j(n)\, V_n\{f_j\} = 0.$$

Данное условие будет также необходимым, если дополнительно предположим, что в случаях, когда $\lim\limits_{n\to\infty} f_j(n) = \infty$, выполнено условие $\varphi_j(n) f_j(n) \downarrow 0$, $n \to \infty$, и какое-либо из условий: 1) $g_j(n) \leqslant H_j f_j(n)$, $n \geqslant 1$; 2) $f_j(n) \leqslant F_j n^{-2z_j} g_j(n)$, $n \geqslant 1$, где H_j и F_j — некоторые константы.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ — гауссовская марковская последовательность в R^d с $MY_n = 0$, $\Phi(m, n+1) = M\| Y_{n+1} - M(Y_{n+1} | Y_m)\|^2$, $0 \leqslant m \leqslant n$, где $Y_0 = 0$, и найдутся такие последовательности положительных чисел $\{a_j(n), n \geqslant 1\}$ и $b_j = \{b_j(n), n \geqslant 0\}$, $j = \overline{1, d}$, причем b_j монотонно неубывающие и $b_j(0) = 0$, что для всех $0 \leqslant m \leqslant n$*

$$R_1 \max_{1\leqslant j\leqslant d} a_j(n+1)\left(1 - M_j \frac{b_j(m)}{b_j(n+1)}\right) \leqslant \Phi(m, n+1) \leqslant$$

$$\leqslant R_2 \sum_{j=1}^{d} a_j(n+1)\left(1 - \frac{b_j(m)}{b_j(n+1)}\right), \tag{4}$$

где R_1, R_2, $\{M_j\}$ — некоторые положительные константы. Тогда для выполнения $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 0$ (п. н.) достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{d} a_j(n)\, V_n\{b_j\} = 0$. Если дополнительно $a_j(n) \downarrow 0$, $n \to \infty$, в случаях, когда $\lim\limits_{n\to\infty} b_j(n) = \infty$, то данное условие будет также и необходимым. Причем если $\lim\limits_{n\to\infty} b_j(n) < \infty$, то при данном j достаточно иметь оценку (4) *снизу при $m = 0$.*

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы 1 [1].

Доказательство теоремы 1. Согласно (1) $\{X_n\}$ является гауссовской марковской последовательностью с $MX_n = 0$ и поэтому для доказательства теоремы достаточно получить оценки вида (4) для условной дисперсии $\Phi(m, n+1) = M\| C_{n+1}X_{n+1} - M(C_{n+1}X_{n+1} | C_m X_m)\|^2$, ко-

торая в данном случае имеет вид $\Phi(m, n+1) = \sum_{i=m+1}^{n+1} \| C_{n+1} A^{n+1-i} B_i \|_E^2$.
Используя условие (3) и разложение $A = TJT^{-1}$, нетрудно убедиться, что найдутся такие постоянные $0 < R_1 \leqslant R_2$, что $R_1 \Phi_0(m, n+1) \leqslant \Phi(m, n+1) \leqslant R_2 \Phi_0(m, n+1)$, $0 \leqslant m \leqslant n$, где

$$\Phi_0(m, n+1) = \sum_{j=1}^{d} c_j^2(n+1) |\lambda_{l_j}|^{2(n+1)} (n+1)^{2z_j} \times$$

$$\times \sum_{i=m+1}^{n+1} \| B_i \|_E^2 |\lambda_{l_j}|^{-2i} \left(1 - \frac{i-1}{n+1}\right)^{2z_j}.$$

Кроме того, для $\Phi_0(m, n+1)$ справедлива сверху оценка типа (4)

$$\Phi_0(m, n+1) \leqslant \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(n+1) f_j(n+1) (1 - f_j(m) f_j^{-1}(n+1)).$$

Для получения оценки типа (4) снизу используем, например, условие 1:

$$\Phi_0(m, n+1) \geqslant \varphi_j(n+1) f_j(n+1) \left(1 - f_j^{-1}(n+1) \sum_{i=1}^{m} \| B_i \|_E^2 |\lambda_{l_j}|^{-2i} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{i-1}{n+1}\right)^{2z_j}\right) \geqslant \varphi_j(n+1) f_j(n+1) (1 - f_j^{-1}(n+1) g(m)) \geqslant$$

$$\geqslant \varphi_j(n+1) f_j(n+1) (1 - H_j f_j(m) f_j^{-1}(n+1)).$$

Можно показать, что в случае 2 будет иметь место оценка

$$\Phi_0(m, n+1) \geqslant F_j^{-1} \varphi_j(n+1) f_j(n+1) (1 - F_j f_j(m) f_j(n+1)).$$

Объединяя теперь полученные оценки по j, получаем нижнюю оценку типа (4) для $\Phi(m, n+1)$. Теорема доказана.

Проверка выполнения условий теоремы 1 — достаточно трудоемкая задача. Рассмотрим поэтому случай, когда можно получить более простые формулировки. Пусть $r = \max_{1 \leqslant j \leqslant \nu} |\lambda_j|$, а $p = \max_{j \in G} p_j$, где $G \subset \{1, 2, \ldots, \nu\}$ такое, что если $j \in G$, то $|\lambda_j| = r$, и если $j \notin G$, то $|\lambda_j| < r$. Для определенности будем предполагать, что $|\lambda_j| = r$ и $p_1 = p$. Обозначим

$$\varphi(n) = \| C_n \|_E^2 r^{2n} n^{2(p-1)}; \qquad g(n) = \sum_{i=1}^{n} \| B_i \|_E^2 r^{-2i};$$

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} \| B_i \|_E^2 r^{-2i} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^{2(p-1)}; \qquad f = \{f(n)\}.$$

Т е о р е м а 2. *При произвольных последовательностях матриц* $\{C_n\}$ и $\{B_n\}$ *для выполнения* (2) *достаточно, чтобы*

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(n) f(n) V_n\{f\} = 0. \qquad \textbf{(5)}$$

Обратно, пусть $C_n = \mathrm{diag}\{c_1(n), c_2(n), \ldots, c_d(n)\}$, *если в матрице* T $t_{j,1}^{(1)} \neq 0$, $j = \overline{1, d}$, либо $C_n = c(n) I$, *где* $c(n) \subset R^1$, *в случае произвольной* T. *Если дополнительно выполняется* (3) *и в случае* $\lim_{n \to \infty} f(n) = \infty$, $\varphi(n) f(n) \downarrow 0$, $n \to \infty$, *а также* $g(n) \leqslant H f(n)$, $n \geqslant 1$, *либо* $f(n) \leqslant F n^{-2(p-1)} g(n)$,

$n \geqslant 1$, *где* H, F — *некоторые константы, то условие* (5) *будет необходимым.*

Необходимая часть теоремы 2 является прямым следствием необходимой части теоремы 1. Доказательство достаточности условия (5) следует из леммы, если заметить, что для всех $0 \leqslant m \leqslant n$ с некоторым $R > 0$

$$\Phi(m, n+1) \leqslant R \| C_{n+1} \|_E^2 r^{2(n+1)} (n+1)^{2(p-1)} \times$$
$$\times \sum_{i=m+1}^{n+1} \| B_i \|_E^2 r^{-2i} \left(1 - \frac{i-1}{n+1}\right)^{2(p-1)}.$$

Приведем теорему, которая дает необходимые и достаточные условия для выполнения (2) в случае произвольной последовательности матриц $\{C_n\}$. При этом предполагается, что A имеет простую структуру (см., например, [2]) и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ — ее собственные значения. Обозначим через T_j, $j = \overline{1, d}$, вектор-столбцы матрицы T и $g_j(n) = \sum_{i=1}^{n} \| B_i \|_E^2 | \lambda_j |^{-2i}$, $g_j = \{g_j(n)\}$.

Теорема 3. *Пусть выполняется* (3). *Тогда для выполнения* (2) *достаточно, а если дополнительно* $\| C_n T_j \|^2 | \lambda_j |^{2n} g_j(n) \downarrow 0$, $n \to \infty$, *в случаях, когда* $\lim_{n\to\infty} g_j(n) = \infty$, *то и необходимо, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{d} \| C_n T_j \|^2 |\lambda_j|^{2n} g_j(n) V_n\{g_j\} = 0.$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Приведем еще одну теорему, которая дает необходимые и достаточные условия для выполнения (2) в случае произвольных $\{B_n\}$. При этом предлагается, что A имеет простую структуру и $C_n = c(n) I$, где $\{c(n)\} \subset R^1$. Обозначим через $h_j(n)$, $j = \overline{1, d}$, вектор-строки матрицы $T^{-1}B_n$ и положим

$$g_j(n) = \sum_{i=1}^{n} \| h_j(i) \|^2 \, | \lambda_j |^{-2i}, \quad g_j = \{g_j(n)\}.$$

Теорема 4. *При сделанных допущениях для выполнения* (2) *достаточно, а если дополнительно* $c^2(n) | \lambda_j |^{2n} g_j(n) \downarrow 0$, $n \to \infty$, *в случаях* $\lim_{n\to\infty} g_j(n) = \infty$, *то и необходимо, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} c^2(n) \sum_{j=1}^{d} | \lambda_j |^{2n} g_j(n) V_n\{g_j\} = 0.$$

В заключение отметим, что необходимые и досточные условия для выполнения $\overline{\lim_{n\to\infty}} \| C_n X_n \| < \infty$ (п. н.) непосредственно следуют из доказанных теорем в силу леммы 2.5.1 [3] с соответствующей заменой в формулировках условий типа $\lim_{n\to\infty} W_n = 0$ на $\overline{\lim_{n\to\infty}} W_n < \infty$.

1. *Коваль В. А.* Принципы сравнения для многомерных гауссовских марковских и гауссовских m-марковских последовательностей // Стохастические системы и их приложения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1990.— С. 60—65.

2. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления.— М. : Наука, 1984.— 320 с.
3. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин.— Киев : Наук. думка, 1989.— 188 с.

Получено 19.04.90