УДК 515.12

Т. О. БАНАХ, асп. (Львов. ун-т)

Параметрические результаты для некоторых классов бесконечномерных многообразий

Обобщается теория R^∞- (Q^∞-) многообразий в двух направлениях. Во-первых, предлагается аксиоматический подход к описанию различных классов многообразий (так называемых K^∞-многообразий), включающих наряду с указанными классами R^∞- и Q^∞-многообразий также, например, многообразия, моделированные над пространством $(I^\tau)^\infty = \varinjlim (I^\tau)^n$, где τ — кардинал. Во-вторых, все рассуждения проводятся в категории Top_B, что дает возможность перенести практически все основные результаты теории R^∞- (Q^∞-) многообразий с пространств на отображения. Получены, в частности, характеризационные теоремы для тривиальных и микротривиальных K^∞-расслоений, теоремы об открытом и замкнутом вложениях, теоремы стабильности и др.

Узагальнюеться теорія R^∞- (Q^∞-) многовидів у двох напрямках. По-перше, пропонуеться аксіоматичний підхід до опису різних класів многовидів (так званих K^∞-многовидів), які включають поряд із класами R^∞- і Q^∞-многовидів також, наприклад, многовиди, модельовані над простором $(I^\tau)^\infty = \varinjlim (I^\tau)^n$, де τ — кардинал. По—друге, всі міркування проводяться в категорії Top_B, що дає можливість перенести практично всі основні результати теорії R^∞- (Q^∞-) многовидів з просторів на відображення. Одержано, зокрема, характеризаційні теореми для тривіальних і мікротривіальних K^∞-розшарувань, теореми про відкрите і замкнуте вкладення, теорема стабільності та ін.

Основные обозначения и термины. Через I обозначается отрезок $[0, 1]$, $Q = [-1,1]^\omega$ — гильбертов кирпич, I^τ — тихоновский куб веса $\tau > \omega$; $R^\infty = \varinjlim \{R^n, i_n\}$, где вложения $i_n : R^n \hookrightarrow R^{n+1}$, $n \geqslant 1$, определяются формулой $i_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Аналогично определяются пространства $Q^\infty = \varinjlim Q^n$ и $(I^\tau)^\infty = \varinjlim (I^\tau)^n$ ($\tau > \omega$ — кардинал). Во всех указанных пространствах отмеченной точкой считается 0 в соответствующей степени.

Далее все отображения предполагаются непрерывными, пары пространств — компактными. Замыкание множества A в пространстве X обозначаем $\bar{A}$.

Под Top_B понимаем категорию отображений в пространство B [1]. Морфизмы этой категории называются B-отображениями или послойными отображениями. Хотя объектами категории Top_B являются отображения $p_X: X \to B$, мы будем употреблять обозначения $(p_X, X) \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Top}_B$ или $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Top}_B$, подразумевая в последнем случае, что на пространстве X фиксировано отображение $p_X: X \to B$.

Пусть $\mathscr{E} \subset \mathrm{Top}$ — некоторый класс пространств. Через $\mathscr{E}_B$ обозначается полная подкатегория категории Top_B состоящая из отображений $f: E \to B$, где $E \in \mathscr{E}$; $\mathscr{E}^\infty$ обозначает класс пространств, представляемых в виде прямых пределов счетных монотонных последовательностей пространств, принадлежащих классу $\mathscr{E}$.

Пусть $\mathscr{K}$ — класс, состоящий из компактов и удовлетворяющий условиям: если A, $B \in \mathscr{K}$, C — замкнутое подмножество компакта A, то $A \times B \in \mathscr{K}$, $C \in \mathscr{K}$, $A/C \in \mathscr{K}$, $I \in \mathscr{K}$. Пунктированное пространство $(\mathbf{K}, *)$ будем называть универсальным для класса $\mathscr{K}$, если $\mathbf{K} \in AR(\mathscr{K})$, для любого компакта $A \in \mathscr{K}$ и его точки $a \in A$, существует вложение $i: (A, a) \hookrightarrow (\mathbf{K}^n, *)$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим пространство $\mathbf{K}^\infty = \varinjlim \{\mathbf{K}^n, i_n\}$, где вложения $i_n: \mathbf{K}^n \hookrightarrow \mathbf{K}^{n+1}$, $n \geqslant 1$, определяются формулой $i_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$. Легко видеть, что пространство $\mathbf{K}^\infty$ является абсолютным экстензором для класса $\mathscr{K}$.

Если в качестве класса $\mathscr{K}$ рассматривать классы конечномерных компактов, метрических компактов, компактов веса $\omega < \tau$, а в качестве универсального объекта пунктированные компакты $(I, 0)$, $(Q, 0)$, $(I^\tau, 0)$, то соответственно получаем пространства $\mathbf{R}^\infty$, Q^∞, $(I^\tau)^\infty$.

Как и в случае пространств $\mathbf{R}^\infty$ и Q^∞, можно рассматривать общие $\mathbf{K}^\infty$. многообразия и расслоения $\mathbf{K}^\infty$-многообразий. Утверждения, доказываемые в этой работе, являются послойными обобщениями известных теорем для $\mathbf{K}^\infty$- и Q^∞-многообразий [2, 3].

В дальнейшем считаем класс $\mathscr{K}$ и универсальный объект $(\mathbf{K}, *)$ фиксированными; (локально) мягкие отображения для класса $\mathscr{K}$, если это не вызовет недоразумений, будем называть (локально) мягкими.

Определение 1. *Пусть $p: E \to B$ — отображение, $C \subset E$ — компакт. Вложение $h: C \times \mathbf{K} \hookrightarrow E$ называется $\mathbf{K}$-оболочкой компакта C, если $h \circ i = \mathrm{id} \mid C$, $p \circ h = p \circ pr_C$, где $i: C \hookrightarrow C \times \mathbf{K}$ $(i(c) = (c, *))$ — вложение и $pr_C: C \times \mathbf{K} \to C$ — естественная проекция.*

Аналогично определяется $\mathbf{K}^n$-оболочка компакта $C \subset E$. Очевидно, если каждый компакт в пространстве E имеет $\mathbf{K}$-оболочку, то он имеет и $\mathbf{K}^n$-оболочку для любого $n \geqslant 1$.

Следующая теорема является характеризационной для тривиальных расслоений со слоем $\mathbf{K}^\infty$.

Теорема 1. *Пусть пространства E, B принадлежат классу $\mathscr{K}^\infty$, $p: E \to B$ — отображение. Следующие условия эквивалентны:*

1) *отображение p B-гомеоморфно тривиальному расслоению $pr_B: B \times \mathbf{K}^\infty \to B$;*

2) *p является мягким отображением для класса $\mathscr{K}$ и каждый компакт в пространстве E имеет $\mathbf{K}$-оболочку;*

3) *отображение p владеет свойством $F \cup (\mathscr{K})$: для пары $X \supset Y$, X, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_B$, каждое B-вложение $f: Y \hookrightarrow E$ продолжается до B-вложения $\bar{f}: X \to E$.*

Доказательство. Докажем справедливость импликаций $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$. Поскольку пространство $\mathbf{K}^\infty$ принадлежит классу $AE(\mathscr{K})$, то тривиальное расслоение $pr_B: B \times \mathbf{K}^\infty \to B$ $\mathscr{K}$-мягко. Пусть $C \subset B \times \mathbf{K}^\infty$ — компакт. Тогда существует $n \in \mathbf{N}$ такое, что $C \subset B_n \times \mathbf{K}^n$, где $B \times \mathbf{K}^\infty = \varinjlim B_i \times \mathbf{K}^i$ — представление пространства $B \times \mathbf{K}^\infty$ в виде прямого предела монотонной последовательности компактов из класса $\mathscr{K}$. Тогда $h = \mathrm{id} \mid C \times \mathrm{id} \mid \mathbf{K}: C \times \mathbf{K} \to B_n \times \mathbf{K}^n \times \mathbf{K} \subset B_{n+1} \times \mathbf{K}^{n+1} \subset B \times \mathbf{K}^\infty$ — $\mathbf{K}$-оболочка компакта C.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $X \supset Y$, $(p_X, X), (p_Y, Y) \in \mathcal{K}_B$ и $f: Y \hookrightarrow E$ — B-вложение. Поскольку отображение p является $\mathcal{K}$-мягким, то существует B-отображение $F: X \to E$, продолжающее вложение f. Пусть $\pi: X \to X/Y$ — фактор-отображение, $i: (X/Y, \pi(Y)) \hookrightarrow (\mathrm{K}^n, *)$ — вложение для некоторого $n \in \mathrm{N}$. Пусть $h: F(X) \times \mathrm{K}^n \hookrightarrow E$ — K^n-оболочка компакта $F(X) \subset E$. Тогда $\bar{f} = h(F \times (i \circ \pi)): X \hookrightarrow E$ — искомое B-вложение, продолжающее вложение f.

(3) $\Rightarrow$ (1). Из доказанного выше следует, что тривиальное расслоение $pr_B: B \times \mathrm{K}^\infty \to B$ имеет свойство $FU(\mathcal{K})$. Пусть $B \times \mathrm{K}^\infty = \varinjlim Y_i$, $E = \varinjlim X_i$ — представление пространств $B \times \mathrm{K}^\infty$ и E в виде прямых пределов монотонных последовательностей компактов из класса $\mathcal{K}$.

B-гомеоморфизм $f: E \to B \times \mathrm{K}^\infty$ будем строить индуктивно. Используя свойство $FU(\mathcal{K})$ отображений p и pr_B, строим последовательности чисел $\{i_k\}_{k=1}^\infty$, $\{j_k\}_{k=1}^\infty$ и B-вложений $f_k: X_{i_k} \hookrightarrow B \times \mathrm{K}^\infty$, $g_k: Y_{j_k} \hookrightarrow E$, $k \geqslant 1$, таких, что $f_k(X_{i_k}) \subset Y_{j_k}$, $g_k | f_k(X_{i_k}) = f_k^{-1} | f_k(X_{i_k})$, $g_{k-1}(Y_{j_{k-1}}) \subset X_{i_k}$, $f_k | g_{k-1}(Y_{j_{k-1}}) = g_{k-1}^{-1} | g_{k-1}(Y_{j_{k-1}})$.

Легко видеть, что отображение $f = \varinjlim f_k$ является искомым B-гомеоморфизмом с обратным $f^{-1} = \varinjlim g_k$. Теорема доказана.

Далее приводим локальный вариант теоремы 1. Для этого нужно ввести понятие микротривиального расслоения, которое является естественным локальным аналогом тривиального расслоения.

Определение 2. *Отображение $p: E \to B$ называется микротривиальным расслоением со слоем F или микротривиальным F-расслоением, если любая точка $x \in E$ имеет открытую окрестность, B-гомеоморфную открытому подмножеству пространства $B \times F$.*

Отметим, что каждое локально-тривиальное расслоение со слоем F-многообразие является микротривиальным F-расслоением.

В дальнейшем под микротривиальным K^∞-расслоением мы понимаем микротривиальное K^∞-расслоение $p: E \to B$, для которого $E, B \in \mathcal{K}^\infty$.

Далее будем считать, что универсальный объект $(\mathrm{K}, *)$ имеет следующее свойство: для любой окрестности W, $* \in W \subset \mathrm{K}$, существует вложение $i: (\mathrm{K}, *) \hookrightarrow (W, *)$.

Теорема 2 (*характеризационная для микротривиальных K^∞-расслоений*). *Пусть пространства $E, B \in \mathcal{K}^\infty$, $p: E \to B$ — отображение. Следующие условия эквивалентны:*

1) *p — микротривиальное K^∞-расслоение;*

2) *p — локально $\mathcal{K}$-мягкое отображение, и каждый компакт в пространстве E имеет K-оболочку;*

3) *отображение p имеет свойство $FLU(\mathcal{K})$: для пары $X \supset Y$ объектов категории $\mathcal{K}_B$ каждое B-вложение $f: Y \hookrightarrow E$ продолжается до B-вложения $f: \bar{U} \hookrightarrow E$ некоторой окрестности $\bar{U}$, $Y \subset U \subset \bar{U} \subset X$;*

4) *отображение p можно открыто вложить в тривиальное расслоение $pr_B: B \times \mathrm{K}^\infty \to B$.*

Доказательство. Покажем справедливость импликаций (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2).

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) доказывается аналогично соответствующей импликации из теоремы 1.

(3) $\Rightarrow$ (4). Пусть $E = \varinjlim X_i$, $B \times \mathrm{K}^\infty = \varinjlim Y_i$ — представление пространств E, $B \times \mathrm{K}^\infty$ в виде прямых пределов монотонных последовательностей компактов из класса $\mathcal{K}$. Открытое B-вложение $f: E \hookrightarrow B \times \mathrm{K}^\infty$ будем строить индуктивно. Используя свойство $FLU(\mathcal{K})$ отображения p и свойство $FU(\mathcal{K})$ отображения pr_B, строим последовательности чисел $\{i_k\}_{k=1}^\infty$, $\{j_k\}_{k=1}^\infty$ и вложений $f_k: X_{i_k} \hookrightarrow B \times \mathrm{K}^\infty$, $g_k: \bar{U}_k \hookrightarrow E$, $k \geqslant 1$, где $f_k(X_{i_k}) \subset$

$\subset U_k \subset \overline{U}_k \subset Y_{j_k}, \quad g_{k-1}(\overline{U}_{k-1}) \subset X_{i_k}, \quad f_k \mid g_{k-1}(\overline{U}_{k-1}) = g_{k-1}^{-1} \mid g_{k-1}(\overline{U}_{k-1})$, $g_k \mid f_k(X_{i_k}) = f_k^{-1} \mid f_k(X_{i_k})$. Легко видеть, что $f = \varinjlim f_k : E \to \varinjlim U_k = \varinjlim \overline{U}_k \subset B \times K^\infty$ — B-гомеоморфизм, причем $\varinjlim U_k$ — открытое подмножество пространства $B \times K^\infty$.

Импликация $(4) \Rightarrow (1)$ очевидна.

$(1) \Rightarrow (2)$. Поскольку отображение $pr_B : B \times K^\infty \to B$ $\mathcal{K}$-мягко, ограничение $pr_B \mid U$ отображения pr_B на открытое подмножество $U \subset B \times K^\infty$ локально мягко для класса $\mathcal{K}$ [1]. Отсюда видно, что для микротривиального K^∞-расслоения p каждая точка $x \in E$ имеет окрестность U такую, что $p \mid U$— локально-мягкое отображение. Из очевидных рассуждений и предложения 2.12 [1] следует, что свойство отображения быть локально-мягким G-наследственно. Отсюда по теореме Майкла [4] следует, что p — локально $\mathcal{K}$-мягкое отображение.

Осталось показать, что каждый компакт в пространстве E имеет K-оболочку. Покажем сначала, что если два открытых множества U, V имеют свойство $FLU(\mathcal{K})$, то их объединение также имеет это свойство. Для этого покажем, что каждый компакт в $U \cup V$ имеет K-оболочку. Пусть $C \subset U \cup V$ — компакт, U_1, V_1 — открытые множества в компакте C такие, что $V_1 \subset \overline{V}_1 \subset C \cap V$, $U_1 \subset \overline{U}_1 \subset C \cap U$ и $V_1 \cup U_1 = C$. Поскольку пересечение $U \cap V$ владеет свойством $FLU(\mathcal{K})$, существует K-оболочка $f_{U \cup V} : (\overline{V}_1 \cap \overline{U}_1) \times K \to U \cap V$ компакта $\overline{V}_1 \cap \overline{U}_1$. Поскольку множества U, V владеют свойством $FLU(\mathcal{K})$, существуют B-вложения $f_U : \overline{W}_U \hookrightarrow U$, $f_V : \overline{W}_V \hookrightarrow V$ окрестностей $\overline{U}_1 \cup ((\overline{V}_1 \cap \overline{U}_1) \times K) \subset W_U \subset \overline{W}_U \subset \overline{U}_1 \; K$, $\overline{V}_1 \cup ((\overline{V}_1 \cap \overline{U}_1) \times K) \subset W_V \subset \overline{W}_V \subset V_1 \times K$, продолжающие B-вложение $f_{U \cap V}$. Определим B-отображение $f_{U \cup V} : \overline{W}_V \cup \overline{W}_U \to V \cup U$ формулой

$$f_{U \cup V}(x, t) = \begin{cases} f_U(x, t), & x \in \overline{U}_1; \\ f_V(x, t), & x \in \overline{V}_1. \end{cases}$$

Можно показать, что существует окрестность W точки $*$ в K такая, что $C \times W \subset \overline{W}_V \cup \overline{W}_U$ и $f_{U \cup V}((\overline{V}_1 \setminus U_1) \times W) \cap f_{U \cup V}((\overline{U}_1 \setminus V_1) \times W) = \varnothing$. Пусть $i : (K, *) \hookrightarrow (W, *)$ — вложение. Тогда $h = f_{U \cup V}(\mathrm{id} \times i) : C \times K \to V \cup U$ — K-оболочка компакта $C \subset U \cup V$. Из импликации $(2) \Rightarrow (3)$ следует, что множество $U \cup V$ имеет свойство $FLU(\mathcal{K})$. Тем самым установили, что свойство $FLU(\mathcal{K})$ G-наследственно, откуда по теореме Майкла [4] следует, что отображение p имеет свойство $FLU(\mathcal{K})$, а значит, каждый компакт в E имеет K-оболочку. Теорема доказана.

Следствие 1. *Мягкое микротривиальное K^∞-расслоение послойно гомеоморфно тривиальному K^∞-расслоению.*

К. Сакаи доказал [3], что объединение двух R^∞-многообразий, пересекающихся по замкнутому R^∞-многообразию, является R^∞-многообразием. Далее приводится послойный аналог этого утверждения.

Теорема 3. *Пусть $E, B \in \mathcal{K}^\infty$, $p : E \to B$ — отображение и $E = E_1 \cup E_2$, где E_i, $i = 1, 2$,— замкнутые множества в пространстве E, $E_0 = E_1 \cap E_2$. Если $p \mid E_i$, $i = 0, 1, 2$,— (микро) тривиальные K^∞-расслоения, то p — также (микро) тривиальное K^∞-расслоение.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 2.9 [1] доказываем, что если $p \mid E_i$, $i = 0, 1, 2$,— (локально) мягкое отображение, то и p — (локально) мягкое отображение. Пусть $C \subset E$ — компакт. Положим $C_i = C \cap E_i$, $i = 0, 1, 2$. Поскольку $p \mid E_0$ — микротривиальное K^∞-расслоение, существует K-оболочка $h_0 : C_0 \times K \hookrightarrow E_0$ компакта C_0 в E_0. Поскольку отображение $p \mid E_1$ обладает свойством $FLU(\mathcal{K})$, существует B-продолжение $f_1 : \overline{U}_1 \hookrightarrow E_1$ вложения $h_0 \cup \mathrm{id} : (C_0 \times K) \cup C_1 \to E_1$ на окрестность $((C_0\times K)\cup C_1)\subset U_1\subset \overline{U}_1\subset C\times K$. Аналогично для B-отображения $f_1\cup \mathrm{id}: f_1^{-1}(E_2)\cup C_2\hookrightarrow E_2$ существует B-продолжение $f_2:\overline{U}_2\hookrightarrow E_2$, где $f_1^{-1}(E_2)\cup C_2\subset U_2\subset \overline{U}_2\subset C\times K$. Отображение $\overline{f}=f_1\cup f_2:\overline{U}_1\cup \overline{U}_2\to E$ является B-вложением. Очевидно, существует окрестность W, $*\in W\subset K$, такая, что $C\times W\subset U_1\cup U_2\subset C\times K$. Пусть $j:(K,*)\hookrightarrow (W,*)$ — вложение. Тогда $h=\overline{f}(\mathrm{id}\times j):C\times K\hookrightarrow E$ — K-оболочка компакта C. Осюда по теореме 2 p — (микро) тривиальное K^∞-расслоение.

Далее будем пользоваться следующей послойной версией теоремы о продолжении гомотопии.

Утверждение 1. *Пусть $p:E\to B$ — локально мягкое отображение, $\mathcal{U}$ — открытое покрытие пространства E, $X\supset Y$ — объекты категории $\mathcal{K}_B$. Если $h:Y\times I\to E$ — послойная $\mathcal{U}$-гомотопия такая, что h_0 продолжается до B-отображения $f:X\to E$, то существует продолжение $\overline{h}:X\times I\to E$ гомотопии h, которое является послойной $\mathcal{U}$-гомотопией, такое, что $\overline{h}_0=f$.*

Доказательство аналогично доказательству обычной теоремы о продолжении гомотопии [5], нужно только заменить все отображения B-отображениями.

Из утверждения 1 следует лемма.

Лемма 1. *Пусть $p:E\to B$ — микротривиальное* K^∞-расслоение, *$\mathcal{U}$ — покрытие пространства E, $X\supset Y$ — пара объектов категории $\mathcal{K}_B$; $g:X\to E$ — B-отображение. Тогда каждое B-вложение $f:Y\hookrightarrow E$, послойно $\mathcal{U}$-гомотопное отображению $g|Y$, продолжается до B-вложения $\overline{f}:X\hookrightarrow E$, послойно $\mathcal{U}$-гомотопного отображению g.*

Доказательство. Из утверждения 1 следует существование B-отображения $F:X\to E$, продолжающего вложение $f:Y\to E$ и послойно $\mathcal{U}$-гомотопного отображению $g\mid X$. Пусть $\pi:X\to X/Y$ — фактор-отображение, $i:(X/Y,\ \pi(Y))\hookrightarrow(K^n,\ *)$ — вложение, $h:F(X)\times K^n\hookrightarrow E$ — K^n-оболочка компакта $F(X)$. Существует окрестность W, $*\in W\subset K$, такая, что отображения $h(F\times \mathrm{id}):X\times W^n\to E$ и $g\circ pr_X:X\times W^n\to E$ $\mathcal{U}$-близки. Пусть $j:(K,*)\hookrightarrow(W,*)$ — вложение. Тогда $\overline{f}=h(F\times(j^n\circ\pi)):X\hookrightarrow E$ — искомое B-вложение, продолжающее отображение f и $\mathcal{U}$-гомотопное отображению g. Лемма доказана.

Индуктивно с помощью леммы 1 доказываем следующие утверждения.

Теорема 4. *Послойная тонкая гомотопическая эквивалентность между микротривиальными* K^∞-*расслоениями является послойным почти гомеоморфизмом.*

Следствие 2 (теорема стабильности). *Пусть $p:E\to B$ — микротривиальное* K^∞-*расслоение. Тогда проекция* $\mathrm{pr}:E\times K^\infty\to E$ *является послойным почти гомеоморфизмом.*

Теорема 5. *Пусть $p:E\to B$ — микротривиальное* K^∞-*расслоение и $\mathcal{U}$ — покрытие пространства E. Каждое B-вложение $f:A\hookrightarrow E$ компакта $A\subset E$, послойно $\mathcal{U}$-гомотопное включению $i_A:A\hookrightarrow E$, продолжается до B-гомеоморфизма $\overline{f}:E\to E$, послойно $\mathcal{U}$-гомотопного тождественному отображению* $\mathrm{id}\mid E$.

Теорема 6 (о замкнутом вложении). *Пусть $X\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_B^\infty$, $p:E\to B$ — микротривиальное* K^∞-*расслоение, $\mathcal{U}$ — покрытие пространства E. Пусть $f:X\to E$ — B-отображение, ограничение $f\mid X_0$ которого на компакт $X_0\subset X$ является вложением. Тогда существует замкнутое B-вложение $\overline{f}:X\hookrightarrow E$, послойно $\mathcal{U}$-гомотопное f и совпадающее на компакте X_0 с вложением $f\mid X_0$.*

Доказательство. Пусть $X=\varinjlim X_i$, $X_0\subset X_1$, $E=\varinjlim E_i$ — представление пространств X и E в виде прямых пределов монотонных последовательностей компактов из класса $\mathcal{K}$. Замкнутое B-вложение $\overline{f}$ будем строить индуктивно. Используя свойство $FLU(\mathcal{K})$ отображения p и лемму 1, строим последовательности чисел $\{i_k\}_{k=1}^\infty$ и вложений $f_k:X_k\hookrightarrow$

$\hookrightarrow E$, $k \geqslant 1$, таких, что $f_k(X_k) \subset E_{i_k}$, $f_k | X_{k-1} = f_{k-1} | X_{k-1}$, $f_k(X_k) \cap \cap E_{i_{k-1}} = f_k(X_{k-1})$, причем f_k и $f | X_k$ — послойно $\mathcal{U}$-гомотопны. (Считаем, что $f_0 = f | X_0$.) Легко видеть, что $\bar{f} = \varinjlim f_k : X \to E$ — замкнутое B-вложение, послойно $\mathcal{U}$-гомотопное отображению f.

Теорема 7 (об открытом вложении). *Пусть $p_1 : E_1 \to B$, $p : E \to B$ — микротривиальные K^∞-расслоения, $\mathcal{U}$ — покрытие пространства E, $f : E_1 \hookrightarrow E$ — B-отображение, ограничение $f | X_0$ которого на компакт $X_0 \subset E_1$ является вложением. Тогда существует открытое B-вложение $\mathfrak{f} : E_1 \hookrightarrow E$, послойно $\mathcal{U}$-гомотопное f и совпадающее на компакте X_0 с вложением $f | X_0$.*

Известно [6], что при выбрасывании компактных множеств из бесконечномерных многообразий возникают пространства, гомеоморфные исходным. Следующая теорема описывает послойный вариант этого случая.

Теорема 8. *Пусть $p : E \to B$ — микротривиальное K^∞-расслоение, $\mathcal{U}$ — покрытие пространства E, D — замкнутое множество в пространстве E такое, что отображение $p | D$ является локально собственным (т. е. для любой точки $x \in D$ существует окрестность U, $x \in U \subset D$ такая, что $p | \bar{U}$ — собственное отображение). Тогда существует B-гомеоморфизм $f : E \setminus D \to E$, $\mathcal{U}$-близкий к включению $i : E \setminus D \hookrightarrow E$.*

Доказательство. Пусть $E \setminus D = \varinjlim X_i$, $E = \varinjlim Y_i$ — представление пространств $E \setminus D$ и E в виде прямых пределов монотонных последовательностей компактов из класса $\mathcal{K}$. Пусть $\mathcal{V}$ — измельчение покрытия $\mathcal{U}$ такое, что $p | \bar{U}$ — собственное отображение для каждого $U \in \mathcal{V}$. Построим индуктивно последовательности чисел $\{i_k\}_{k=1}^\infty$, $\{j_k\}_{k=1}^\infty$ и вложений $f_k : X_{i_k} \hookrightarrow E$, $g_k : Y_{j_k} \hookrightarrow E \setminus D$ таких, что $f_k(X_{i_k}) \subset Y_{j_k}$, $g_{k-1}(Y_{j_{k-1}}) \subset \subset X_{i_k}$, $f_k | g_{k-1}(Y_{j_{k-1}}) = g_{k-1}^{-1} | g_{k-1}(Y_{j_{k-1}})$, $g_k | f_k(X_{i_k}) = f_k^{-1} | f_k(X_{i_k})$ и отображения $(f_k, \mathrm{id} | X_{i_k})$, $(g_k, \mathrm{id} | Y_{j_k})$ послойно $\mathcal{U}$-гомотопны.

Покажем, как строить шаг индукции. Пусть числа i_k, j_k и вложения f_k, g_k, $1 \leqslant k < n$, построены. Поскольку $g_{n-1}(Y_{j_{n-1}})$ — компакт, существует i_n такое, что $g_{n-1}(Y_{j_{n-1}}) \subset X_{i_n}$. По лемме 1, существует B-вложение $f_n : X_{i_n} \hookrightarrow E$, послойно $\mathcal{V}$-гомотопное отображению $\mathrm{id} | X_{i_n}$, такое, что $f_n | g_{n-1}(Y_{j_{n-1}}) = g_{n-1}^{-1} | g_{n-1}(Y_{j_{n-1}})$. Аналогично ищем j_n такое, что $f_n(X_{i_n}) \subset \subset Y_{j_n}$. Пусть $\mathcal{U}_1$ — конечное покрытие компакта $Y_{j_n} \subset E$, состоящее из элементов покрытия $\mathcal{V}$ и такое, что отображение $f_n^{-1} | f_n(X_{i_n})$ послойно $\mathcal{V}_1$-гомотопно отображению $\mathrm{id} | f_n(X_{i_n})$. Сущействует B-вложение $g_n : Y_{j_n} \hookrightarrow E$, послойно $\mathcal{V}_1$-гомотопное $\mathrm{id} | Y_{j_n}$, такое, что $g_n | f_n(X_{i_n}) \amalg (p | \cup \mathcal{V}_1)^{-1}(p(Y_{j_n})) = f_n^{-1} \amalg \mathrm{id}$. Тогда $g_n : Y_{j_n} \to E \setminus D$ — искомое B-вложение. Теорема доказана.

При помощи характеризационных теорем 1, 2 доказывается следующая теорема.

Теорема 9 (суммы для K^∞-расслоений). *Пусть пространства E, B принадлежат классу $\mathcal{K}^\infty$. Если $p : E \to B$ — (локально) $\mathcal{K}$-мягкое отображение, то $\mathrm{pr} \circ p : E \times K^\infty \to B$ — (микро) тривиальное K^∞-расслоение.*

Отметим, что если p — отображение в точку, то доказанные теоремы превращаются в соответствующие утверждения для K^∞-многообразий.

Если в качестве класса $\mathcal{K}$ принять классы конечномерных метрических компактов, метрических компактов, компактов веса $\omega < \tau$, а в качестве универсального объекта — пунктированные компакты (I, O), (Q, O), (I^τ, O) соответственно, то получаем утверждения для R^∞-, Q^∞-, $(I^\tau)^\infty$-расслоений и R^∞, Q^∞-, $(I^\tau)^\infty$-многообразий.

1. *Федорчук В. В., Чигогидзе А. Ч.* Экстензоры и мягкие отображения.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1987.— 57 с.
2. *Sakai K.* On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds // Top. Appl.— 1984.— 18, N 1.—P. 69—80.
3. *Sakai K.* On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifold, II: Infinite deficiency // Tsukuba J. Math.— 1984.— 8. — P. 101—118.
4. *Michael E. A.* Local properties of topological spaces // Duke Math. J.— 1954.— 21.— P. 163—172.
5. *Hu S.-T.* Theory of Retracts.— Detroit : Wayne State Univ. Press, 1965.— 235 p.
6. *Bessaga C., Pelczynski A.* Selected topics in infinite-dimensional topology.— Warsaw: PWN, 1975.— 353 c.

Получено 28.09.90