УДК 512.543

Р. И. ГРИГОРЧУК, д-р физ.-мат. наук,
П. Ф. КУРЧАНОВ, канд. физ.-мат. наук (Моск. ин-т инженеров ж.-д. трансп.)

О ширине элементов в свободных группах

Построен алгоритм, позволяющий эффективно вычислять ширину произвольного элемента свободной группы относительно фиксированного базиса. Обсуждены некоторые вопросы, касающиеся скорости вычислений.

Побудовано алгоритм, який дозволяє ефективно обчислювати ширину довільного елемента вільної групи відносно фіксованого базису. Обговорено деякі питання, що стосуються швидкості обчислень.

1. История вопроса и формулировка результата. 1.1. Джанг [1] предложил алгебраический подход к задаче вычисления минимального числа неподвижных точек в гомотопическом классе непрерывного отображения компактной поверхности в себя. В частности, он ввел понятие ширины элемента свободной группы относительно базиса и поставил задачу вычисления этой величины.

В настоящей статье построен алгоритм, позволяющий вычислить ширину произвольного элемента свободной группы с конечным или счетным базисом, а также обсуждаются вопросы скорости работы такого алгоритма. Его построение оказалось возможным благодаря технике, развитой авторами для решения задачи описания множества решений квадратичных уравнений в свободной группе (см., например, [2], где изложена история вопроса и приведены результаты на эту тему, там же анонсирован результат данной работы).

1.2. Пусть $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots\}$ — конечный или счетный алфавит, $F_{\mathcal{C}}$ — свободная группа с базисом $\mathcal{C}$. Шириной элемента $h \in F_{\mathcal{C}}$ относительно базиса $\mathcal{C}$ называется наименьшее натуральное n такое, что h как элемент свободной группы $F_{\mathcal{C}}$ представляется в виде

$$h = \prod_{j=1}^{n} g_j^{-1} c_{i_j}^{m_j} g_j,$$

где $g_j \in F_{\mathcal{C}}$, $m_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, n$. Ширина единичного элемента считается равной нулю.

Очевидно, если элементы h и f сопряжены в $F_{\mathcal{C}}$, то они имеют одинаковую ширину. Поэтому можно говорить о ширине циклического слова над алфавитом $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$.

Сформулируем основной результат данной статьи.

1.3. Теорема. *Существует алгоритм, позволяющий по любому конечному или счетному базису $\mathcal{C}$ свободной группы $F_{\mathcal{C}}$ и элементу $h \in F_{\mathcal{C}}$ вычислить ширину элемента h относительно базиса $\mathcal{C}$.*

2. Некоторые определения и вспомогательные результаты. 2.1. Будем использовать два алфавита: конечный алфавит переменных $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и конечный или бесконечный алфавит $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots\}$ констант. Рассмотрим некоторое несократимое слово $f = f(X, \mathcal{C})$ и зафиксируем систему равенств

$$x_j = x_j(\mathcal{C}), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

В правых частях этих равенств стоят некоторые несократимые слова над $\mathcal{C}$, которые будем называть $\mathcal{C}$-значениями переменных. Переменные, $\mathcal{C}$-значения которых равны единице группы $F_{\mathcal{C}}$, назовем единичными переменными. Подставляя в слово f вместо переменных их $\mathcal{C}$-значения, получаем некоторое слово над $\mathcal{C}$, значение которого в свободной группе $F_{\mathcal{C}}$ назовем $\mathcal{C}$-значением f относительно (1).

2.2. Слово $f(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ назовем квадратичным, если каждая переменная входит в него не более двух раз (в степенях $+1$ или -1), и строго квадратичным, если каждая переменная либо не входит в слово вообще, либо входит в точности два раза.

Введем следующие преобразования слова $f(X, C)$, которые будем называть специальными нильсеновскими преобразованиями (с. н. п.), связанными со словом f:

а) если $(xc)^{\pm 1}$ есть подслово слова f, $x \in \mathcal{X}^{\pm 1}$, $c \in \mathcal{C}^{\pm 1}$, то положим

$$x \mapsto xc^{-1}, \quad x_j \mapsto x_j, \quad x_j \neq x^{\pm 1},$$

$$c_j \mapsto c_j, \quad j = 1, 2, \ldots;$$

б) если $(xy)^{\pm 1}$ есть подслово f, $x, y \in \mathcal{X}^{\pm 1}$, $x \neq y^{\pm 1}$, то положим

$$x \mapsto xy^{-1}, \quad x_j \mapsto x_j, \quad x_j \neq x^{\pm 1},$$

$$c_j \mapsto c_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Описанные преобразования определяют автоморфизмы группы $F_{\mathcal{X} \cup \mathcal{C}} = F_{\mathcal{X}} * F_{\mathcal{C}}$, сохраняющие подгруппу констант $F_{\mathcal{C}}$. Если применить с. н. п., связанное с квадратичным словом f, к этому слову, то после сокращения оно останется квадратичным. Когда мы говорим, что рассматривается цепочка с. н. п., связанных с некоторым словом f, то имеем в виду, что каждое последующее преобразование связано с образом слова при предыдущем.

2.3. При каждом с. н. п. соответствующим образом изменяются $\mathcal{C}$-значения переменных; в обозначениях пункта 2.2 $\mathcal{C}$-значения переменных, отличных от $x^{\pm 1}$, не меняются, а $\mathcal{C}$-значение x заменяется на $x(\mathcal{C})\, c$ в случае а) и на $x(\mathcal{C})\, y(\mathcal{C})$ в случае б).

2.4. Можно определить понятие $\mathcal{C}$-значения циклического слова f относительно (1), которое в этом случае есть циклическое слово над $\mathcal{C}$.

2.5. Будем считать, что каждая переменная из $\mathcal{X}$ входит в слово f. Рассмотрим граф Σ_f, множество вершин которого совпадает с $\mathcal{X}^{\pm 1}$. Пусть $x, y \in \mathcal{X}^{\pm 1}$ и слово $(x^{-1} A(\mathcal{C})\, y)^{\pm 1}$ является подсловом циклического слова f. В этом случае соединим вершины x, y графа ребром и назовем слово $A(\mathcal{C})$ меткой ребра $\overrightarrow{xy}$ (соответственно $(A(\mathcal{C}))^{-1}$ — меткой ребра $\overrightarrow{yx} = \overrightarrow{xy})^{-1}$). Полученный граф будем называть размеченным звездным графом циклического слова f. Игнорируя метки, мы говорим просто о звездном графе Σ_f слова f.

2.6. Объектом нашего исследования будут слова следующего вида

$$f = \prod_{j=1}^{g} x_j^{-1} A_j(\mathcal{C})\, x_j, \tag{2}$$

где $A_j(C)$, $j = 1, \ldots, n$,— некоторые несократимые слова над $\mathcal{C}^{11}$.

В этом случае размеченный звездный граф Σ_f имеет вид, изображенный на рис. 1. При этом первые n петель помечены словами $A_j(C)$, а метки всех ребер «длинного» цикла пусты.

2.7. Лемма. *Если f — строго квадратичное слово, то граф Σ_f есть несвязное объединение некоторого числа замкнутых циклов.*

Доказательство этого утверждения очевидно и состоит из замечания, что для строго квадратичного слова из каждой вершины графа выходят в точности два ребра.

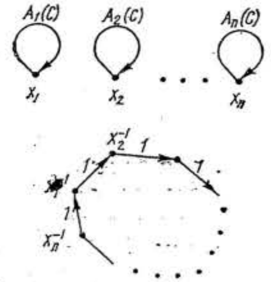

Рис. 1

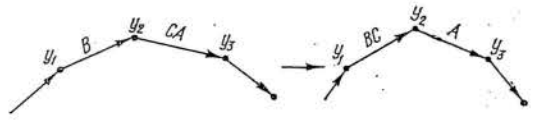

Рис. 2

2.8. Зачеркнем в слове f все константы. Получим слово $\bar{f}$, которое будем называть остовом слова f. Если f — строго квадратичное слово, то его остов либо приводится сокращениями к пустому слову, либо может быть приведен автоморфизмом группы $F_{\mathscr{X}}$ к одному из следующих видов:

$$\alpha)\ \prod_{j=1}^{g} [x_{2j-1},\ x_{2j}]; \qquad \beta)\ \prod_{j=1}^{g} x_j^2 .$$

Число $g = g(\bar{f})$, $g = 0, 1, \ldots$, называется родом слова. В случае α) слово называется ориентируемым, а в случае β) — неориентируемым. Род слова $\bar{f}$ из п. 2.6 равен нулю.

Следующее утверждение дополняет лемму из п. 2.7.

2.9. Лемма. *Пусть f — строго квадратичное слово; m — число связных компонент графа Σ_f; g — род слова f; n — число переменных, входящих в слово f. Тогда*

$$g = \begin{cases} \dfrac{n-m+1}{2}, & \text{если } f \text{ ориентируемо;} \\ n-m+1, & \text{если } f \text{ неориентируемо.} \end{cases}$$

Доказательство. Последовательность с. н. п. а также сингулярных преобразований вида $x_j \mapsto 1$ приводит остов $\bar{f}$ слова f к одному из видов α) или β) из п. 2.8 (см. [3], гл. 1, § 2). При этом каждое такое преобразование либо не меняет длину слова и количество циклов в звездном графе, либо уменьшает его длину на 2, а количество циклов на 1 ([3], предложения 7.9, 7.10, 7.11). Для минимального строго квадратичного слова, т. е. для такого слова без коэффициентов, длина которого не может быть уменьшена автоморфизмом группы F_X, граф Σ_f связен ([3], предл. 7.7). Заметим теперь, что слова α) и β) минимальны и формулы, доказываемые нами, для них верны. Лемма доказана.

Отметим, что геометрическая интерпретация звездного графа, которой мы здесь касаться не будем, позволяет получить формулы из леммы п. 2.9 непосредственно из формулы, выражающей эйлерову характеристику соответственно ориентируемой и неориентируемой поверхности с краем через ее род и число компонент края.

2.10. Пусть f — строго квадратичное слово. Рассмотрим один из циклов его графа Σ_f и прочитаем последовательно метки ребер соответственно некоторой выбранной ориентации этого цикла. Получим некоторое циклическое слово, определенное данным неориентированным циклом с точностью до взятия обратного слова. Пару, состоящую из этого слова и его обратного, назовем меткой цикла.

2.11. Лемма. *Множество меток циклов, связанных со звездным графом строго квадратичного слова, не меняется при с. н. п. этого слова.*

Доказательство. Очевидно, что преобразование типа а) из п. 2.2 не меняет геометрическую структуру графа Σ_f, а только производит передвижение одного из $\mathcal{G}$-символов метки ребра, который стоит ближе всего к одной из вершин, через эту вершину на смежное ребро цикла (рис. 2).

Рассмотрим теперь преобразование типа б) из п. 2.2. Допустим, что слова $(y_3^{-1}A(\mathcal{G})\,y_1)^{\pm 1}$ и $(y_1^{-1}y_2B(\mathcal{G})\,y_4)^{\pm 1}$ являются различными подсловами квадратичного слова f. Преобразование $y_1^{-1}y_2 \mapsto y_1^{-1}$ переводит их в подслова $(y_3^{-1}Ay_2y_1)^{\pm 1}$ и $(y_1^{-1}By_4)^{\pm 1}$ соответственно, не меняя остальной части слова f. Куски звездного графа Σ_f, соответствующие указанным подсловам, изображены на рис. 3, *а*. Легко видеть, что рассматриваемое с. н. п. переводит показанный кусок размеченного графа в изображенный на рис. 3, *б* и метки циклов при этом не меняются.

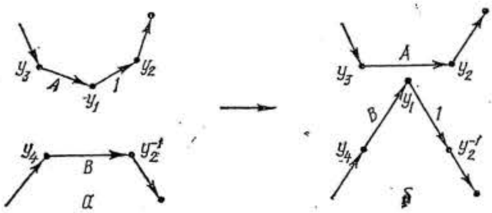

Рис. 3

3. Две леммы о приведении. 3.1. Пусть $f(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ — строго квадратичное слово. Будем говорить, что слово f строго N-приведено относительно $\mathcal{G}$-значений (1), если выполняются следующие условия:

i) пусть $(y_1 \ldots y_k c)^{\pm 1}$ — подслово слова f, причем $y_j \in \mathcal{X}^{\pm 1}$, $c \in \mathcal{G}^{\pm 1}$, $y_2, \ldots, y_k$ — единичные переменные, y_1 не является единичной; тогда $\mathcal{G}$-значение переменной y_1 не оканчивается на c^{-1};

ii) пусть $(y_1 \ldots y_k)^{\pm 1}$ — подслово слова f, причем $y_j \in \mathcal{X}^{\pm 1}$, $y_2, \ldots, y_{k-1}$ — единичные переменные, $y_1, y_k, y_1 \neq y_k^{-1}$ не являются единичными; тогда

$$l(y_1y_k) \geqslant \max\{l(y_1),\ l(y_k)\},$$

где $l(y)$ — длина $\mathcal{G}$-значения y относительно системы образующих $\{c_1, c_2, \ldots\}$ свободной группы $F_{\mathcal{G}}$; это условие означает, что сокращение между $\mathcal{G}$-значениями переменных y_1 и y_k не превышает половины длины каждой переменной;

iii) пусть $(y_1 \ldots y_k \ldots y_m)^{\pm 1}$, $1 < k < m$, — подслово слова f, причем $y_1, \ldots, y_m \in \mathcal{X}^{\pm 1}$ и y_j — единичная переменная, если $1 < j < m$, $j \neq k$, кроме того, предположим, что $y_1 \neq y_k^{-1}$, $y_k \neq y_m^{-1}$. Тогда если переменные y_1, y_k, y_m не являются единичными, то

$$l(y_1y_ky_m) > l(y_1) + l(y_m) - l(y_k).$$

Это условие означает, что после подстановки $\mathcal{G}$-значений и выполнения приведений ни одна из переменных не может полностью сократиться.

3.2. Лемма. *Любое квадратичное слово f может быть приведено некоторой последовательностью с. н. п., связанной с f, к слову, являющемуся строго N-приведенным.*

Доказательство. Пусть не выполняется условие *i*) из п. 3.1. Предположим, что $k > 1$. Проделав последовательность преобразований $y_1 \mapsto y_1y_2^{-1}, \ldots, y_1 \mapsto y_1y_k^{-1}$, мы не изменим $\mathcal{G}$-значений переменных и получим подслово $(y_1c)^{\pm 1}$ в новом слове (мы пользуемся тем, что $y_j \neq y_1^{\pm 1}$ при $j = 2, \ldots, k$, так как переменные $y_2 \ldots, y_k$ — единичные, а y_1 — нет). Преобразование $y_1 \mapsto y_1c^{-1}$ уменьшает суммарную длину $\mathcal{G}$-значений переменных и не увеличивает общую длину коэффициентов слова f. Аналогично, если не выполняется условие *ii*), то можно считать, что $(y_1y_k)^{\pm 1}$ — подслово слова f. Теперь, если y_k сокращается больше, чем наполовину, рассмотрим преобразование $y_1 \mapsto y_1y_k^{-1}$, которое уменьшает сумму длин $\mathcal{G}$-значений переменных. Таким образом, если сумма длин переменных не может быть уменьшена с помощью с. н. п., то условия i) и ii) выполняются. Для обеспечения выполнения условия iii) нужно так же, как при доказательстве предложения 2.2 из [3] ввести на множестве наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ переменных порядок $\prec$. Пусть для подслова $(y_1 \ldots y_k \ldots y_m)^{\pm 1}$ не выполняется условие iii). Как и раньше, можно считать, что $(y_1 y_k y_m)^{\pm 1}$ является подсловом слова f. В этом случае либо $y_m \mapsto y_k^{-1} y_m$ либо $y_1 \mapsto y_1 y_k^{-1}$ уменьшает набор $(x_1, \ldots, x_k)$ $\mathcal{C}$-значений относительно порядка $\prec$.

3.3. Основная лемма. *Пусть h — приведенное циклически несократимое слово над $\mathcal{C}$. Тогда если его ширина относительно системы $\mathcal{C}$ равна n, то существует представление h в виде*

$$h = \prod_{j=1}^{n} x_j^{-1} c_{i_j}^{m_j} x_j, \tag{3}$$

где $x_j = x_j(\mathcal{C})$ — некоторые слова, и

$$|m_1| + \ldots + |m_n| \leqslant l(h). \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим ширину элемента h через $w(h)$. Пусть $w(h) = n$. Зафиксируем такое представление (3) слова h, для которого $|m_1| + \ldots + |m_n|$ принимает минимальное значение. Будем работать со словом

$$f = \prod_{j=1}^{n} x_j^{-1} c_{i_j}^{m_j} x_j.$$

Пусть (1) — те $\mathcal{C}$-значения переменных, для которых $\mathcal{C}$-значение слова f равно h.

Звездный граф Σ_f слова f описан в п. 2.6, при этом $A_j = c_{i_j}^{m_j}$ — степени свободных образующих группы $F_{\mathcal{C}}$.

Приведем, используя с. н. п., слово f к некоторому слову $f_1(\mathcal{X}, \mathcal{C})$, строго N-приведенному относительно соответствующих $\mathcal{C}$-значений переменных. В силу леммы из п. 2.11 набор меток циклов графа Σ_{f_1} такой же, как у графа Σ_f: $c_{i_1}^{m_1}, \ldots, c_{i_n}^{m_n}$. Заметим, что если $c^{r_1}, \ldots, c^{r_s}$ — неединичные метки ребер одного цикла, то $\operatorname{sign}(r_j) = \operatorname{sign}(r_i)$, т. е. при последовательном чтении меток ребер вдоль одного цикла нет сокращений. Это означает, что в слове $f_1(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ метке j-го цикла соответствует в точности $|m_j|$ символов. Все эти символы одинаковы, поскольку f — альтернированное квадратичное слово, т. е. каждая переменная входит в него в точности один раз в степени $+1$ и один раз в степени -1. Действительно, если xc — подслово квадратичного слова и мы выполняем преобразование $x \mapsto xc^{-1}$, то символ c исчезнет справа от x, зато появится слева от x^{-1}; для неальтернированных слов рядом со вторым вхождением x появится c^{-1}.

Подставим в f_1 все $\mathcal{C}$-значения переменных и покажем, что ни один из символов, входящих в коэффициенты, не может сократиться. Действительно, заметим, во-первых, что между $\mathcal{C}$-символами, стоящими рядом в слове $f_1(\mathcal{X}, \mathcal{C})$, сокращений быть не может (все символы, относящиеся к одной метке цикла графа Σ_{f_1}, одинаковы, а метки различных циклов разделены переменными). Далее, пусть $(c_\alpha y_1 \ldots y_k c_\beta)^{\pm 1}$ есть подслово слова f_1, при этом $c_\alpha, c_\beta \in \mathcal{C}^{\pm 1}$, $y_1, \ldots, y_k \in \mathcal{X}^{\pm 1}$. Заметим, что среди символов $y_1, \ldots, y_k$ не могут одновременно быть символы x_j и x_j^{-1}, так как они и все символы, стоящие между ними, обязаны в этом случае сократиться, поскольку $g(f_1) = 0$ и остов $\bar{f}_1$ эквивалентен пустому слову. Тогда, если среди переменных $y_1, \ldots, y_k$ имеются неединичные, то в силу условий ii) и iii) из п. 3.1 левая половина самого левого неединичного слова и правая половина самого правого неединичного слова из слов $y_1(\mathcal{C}), \ldots, y_k(\mathcal{C})$ не могут сократиться, поэтому в силу условия i) из п. 3.1 не могут сократиться и символы c_α, c_β. Итак, единственная возможность сокращения констант — наличие в слове f_1 подслова вида $(cy_1 \ldots y_k c^{-1})^{\pm 1}$, где $c \in \mathcal{C}^{\pm 1}$,

$y_1, \ldots, y_k \in \mathcal{X}^{\pm 1}$, переменные y_j — единичные при $j = 1, \ldots, k$. Очевидно, что зачеркнув символы c и c^{-1} в слове f_1, получим слово $f_2(\mathcal{X}, \mathcal{C})$, которое удовлетворяет следующим условиям: 1) $\mathcal{C}$-значение f_2 совпадает с h; 2) $g(f_2) = 0$; 3) метки циклов графа Σ_{f_2} — степени свободных образующих $c_1, c_2, \ldots$ группы $F_{\mathcal{C}}$; 4) сумма длин меток циклов графа Σ_{f_2} меньше соответствующей суммы для Σ_{f_1} на 2, т. е. равна $|m_1| + \ldots + m_n| - 2$.

Дальнейший ход доказательства очевиден: последовательностью с. н. п., связанной с f_2, приводим это слово к виду (2), что всегда возможно для слова рода 0. При этом циклические слова $A_j(\mathcal{C})$ — суть степени образующих, так как совпадают с метками циклов Σ_{f_2}, а это противоречит минимальности $|m_1| + \ldots + |m_n|$. Итак, мы получили, что в слове $f_1(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ после подстановки $\mathcal{C}$-значений нет сокращений ни одного символа, входящего в коэффициенты $f_1(\mathcal{X}, \mathcal{C})$. Поскольку сумма длин этих коэффициентов равна $|m_1| + \ldots + |m_n|$, то $|m_1| + \ldots + |m_n| \leqslant l(h)$, что и требовалось доказать.

4. Вычисление ширины. Напомним, что целью работы является доказательство существования алгоритма, вычисляющего ширину любого слова над $\mathcal{C}$ за конечное число шагов.

Доказательство. Ясно, что в представлении (3) слова h можно произвести сингулярное преобразование $c_j \to 1$ со всеми символами c_j, не входящими в запись слова h. Существует лишь конечное число слов вида $\Pi_{j=1}^{n} x_j^{-1} c_{i_j}^{m_j} x_j$, для которых символы c_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots$, берутся из фиксированного конечного множества и выполняется неравенство $|m_1| + \ldots + |m_n| \leqslant l(h)$. Поэтому нахождение ширины слова h сводится к выяснению вопроса о разрешимости конечного числа квадратичных уравнений вида (3) в свободной группе с конечным числом образующих. Эта задача разрешима алгоритмически (см., например, [2]).

4.2. Алгоритм нахождения ширины, приведенный в п. 4.1, не является полиномиальным по $l(h)$. Любопытно было бы выяснить, существует ли полиномиальный алгоритм такого рода. Приведем несколько частных результатов на эту тему.

4.2.1. Назовем слово положительным относительно системы $\mathcal{C}$ свободных образующих свободной группы $F_{\mathcal{C}}$, если оно имеет вид $h = \pi_{j=1}^{k} c_{i_j}$, $i \in \{1, 2, \ldots\}$ (т. е. не содержит в записи образующих в отрицательных степенях).

4.2.2. Лемма. *Пусть h — положительное слово относительно системы $\mathcal{C}$ и ширина h равна n. Тогда существует представление вида* (3) *этого слова, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $m_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$; $m_1 + \ldots + m_n = l(h)$;

2) *используя с. н. п., связанные со словом, стоящим в левой части* (3), *можно привести его к слову $f_1(\mathcal{X}, \mathcal{C})$, в котором все переменные являются единичными и после их вычеркивания отсутствуют сокращения.*

Доказательство. Рассмотрим представление (3) с минимальной возможной суммой $|m_1| + \ldots + |m_p|$ и с помощью с. н. п. приведем слово из правой части (3) к строго N-приведенному виду $f_1(\mathcal{X}, \mathcal{C})$. Как было выяснено при доказательстве леммы из п. 3.2, при подстановке в слово $f_1(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ вместо переменных их $\mathcal{C}$-значений ни один символ, входящий в коэффициенты, не может сократиться. Но остов слова f_1 свободно эквивалентен пустому слову, поэтому из положительности $\mathcal{C}$-значения f_1 следует, что все $\mathcal{C}$-значения переменных обязаны сократиться между собой при подстановке их в $f_1(\mathcal{X}, \mathcal{C})$. Пусть $(c_\alpha y_1 \ldots y_k c_\beta)^{\pm 1}$ — отрезок слова $f_1(\mathcal{X}, \mathcal{C})$, тогда, как видно из доказательства леммы из п. 3.3, ни одна из переменных не может входить в него дважды. Поэтому из условий *ii*) и *iii*) п. 3.1 следует, что если хотя бы одна из переменных $y_1, \ldots, y_k$ не является единичной, то равенство $y_1(\mathcal{C}) \ldots y_k(\mathcal{C}) = 1$ невозможно. Поскольку циклические метки слова f_1 совпадают с метками слова $\Pi_{j=1}^{n} x_j^{-1} c_{i_j}^{m_j} x_j$, то отсюда следует равенство $m_1 + \ldots + m_n = l(h)$.

4.2.3. Пусть $f_1(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ — слово, полученное в лемме 4.2.2. Все $\mathcal{C}$-значения переменных в нем равны 1 и после их вычеркивания сокращений в полученном слове нет. Это значит, что $f_1(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ отличается от h тем, что в это слово вставлены пары $\{x_j, x_j^{-1}\}$, $j = 1, \dots, n$, причем остов слова f_1 должен быть свободно эквивалентен 1. Если вместо каждого левого из символов пары $\{x_j, x_j^{-1}\}$ поставить левую скобку «(«, а вместо каждого правого символа — правую скобку»)», то в силу условия $\bar{f_1} \equiv 1$ получится корректная расстановка скобок в слове h.

Будем говорить, что два символа слова h разделены, если найдется пара скобок, для которой один из символов находится внутри, а другой — вне этих скобок.

Из леммы 4.2.2 очевидно следует следующее утверждение.

4.2.4. Предложение. *Пусть h — положительное слово. Тогда его ширина равна такому минимальному числу n, для которого существует такая расстановка n пар скобок в слово h, что* 1) *любые два различных символа разделены*; 2) *любой символ находится внутри хотя бы одной пары скобок.*

4.2.5. Из предложения 4.2.4 следует, что ширина положительного слова не изменится, если группу рядом стоящих одинаковых символов слова заменить одним символом (таким же). Поэтому при вычислении ширины такого слова можно, во-первых, уменьшить его длину, оставив в каждой группе подряд идущих одинаковых символов по одному. Таким образом, можно считать, что любые два рядом стоящие символа слова различны.

4.2.6. Лемма. *Пусть h — положительное слово, любые два символа которого, стоящие рядом, различны. Тогда всегда найдется некоторый символ, вычеркнув который, мы уменьшим ширину слова на* 1.

Доказательство. Рассмотрим любую пару скобок, расставленных в слове, которая не содержит никаких других скобок внутри. Если расстановка скобок в слове удовлетворяет условиям предложения из п. 4.2.4, то внутри такой пары скобок не может находиться более одного символа. Кроме того, эта пара скобок не может не содержать символов, так как в противном случае ее можно опустить, сохраняя свойства (1) и (2) п. 4.2.4, что противоречит минимальности. Вычеркнув тот единственный символ, который заключен в эту пару скобок, можно опустить и эту пару скобок, уменьшив тем самым ширину слова в силу предложения из п. 4.2.4. Более, чем на 1, ширина слова при этом уменьшиться не может, так как любой символ всегда можно вставить в слово, в котором скобки расставлены с выполнением условий из п. 4.2.4, предварительно заключив его в скобки.

4.2.7. Лемма *Пусть h — положительное слово, содержащее подслово вида aba. Тогда если вычеркнуть в этом подслове символ b, то длина слова h уменьшится на единицу.*

Доказательство. Легко видеть, что любую структуру скобок, удовлетворяющую условиям п. 4.2.4, можно перестроить таким образом, что между любыми двумя подряд идущими одноименными скобками всегда имеется символ. Действительно, если, например, две левые скобки идут подряд, то самую левую из них можно с сохранением условий из п. 4.2.4 переместить так, что она окажется справа от правой скобки, замыкающей идущую за ней. Предположим, что структура скобок именно такова. Тогда, если символ b был заключен в скобки, то утверждение вытекает из доказательства леммы из п. 4.2.6. Если это не так, то после его вычеркивания могут возникнуть следующие ситуации: 1) $a)(a$; 2) $a)a$; 3) $a(a$. В случае 1 можно вычеркнуть обе скобки, разделяющие одинаковые символы; в случае 2 вычеркиваем левую скобку, разделяющую символы, и соответствующую ей правую; в случае 3 действуем симметричным образом. Таким образом, видим, что в любом случае вычеркивание символа b уменьшает на 1 число необходимых скобок для разделения различных символов слова h, что и требовалось доказать.

4.2.6. Предыдущее утверждение приводит к полиномиальному по длине слова алгоритму нахождения ширины положительных слов над алфавитом из трех букв $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$. Действительно, в этом случае, если никакие два одинаковых символа не стоят рядом, то либо в циклическом слове найдется отрезок вида $c_i c_j c_i$, и можно уменьшить на 1 ширину слова, вычеркнув c_j, либо оно имеет вид $c_1c_2c_3 \ldots c_1c_2c_3$, и вычеркивание любого символа уменьшает ширину на 1 (симметрия).

4.2.9. Вопрос. Существует ли алгоритм, позволяющий вычислять ширину элемента свободной группы за время, полиномиально зависящее от длины элемента? Для начала хотелось бы знать ответ на этот вопрос для случая положительных слов в группах ранга 4 и больше.

1. *Jiang B.* Surface maps and braid equations. I.— Peking Univ., 1987.— 28 p.— (Preprint).
2. *Григорчук Р. И., Курчанов П. Ф.* Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления.— 1990.— 58.— С. 190—256.
3. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп.— М. : Мир, 1980.— 447 с.

Получено 18.01.91