УДК 512.54.05

А. Н. ЗУБКОВ, канд. физ.-мат. наук
В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т информ. технологий и прикл. математики СО АН СССР, Омск)

Уравнения в группе с функцией длины

Найден простой контрпример к гипотезе Линдона. Определена группа непрерывных функций с регулярной архимедовой функцией длины. Доказан аналог теоремы Уикса о коммутаторе и теоремы Линдона о решениях уравнения $a^2b^2 = c^2$ для более широкого класса групп с регулярной архимедовой функцией длины.

Знайдено простий контрприклад до гіпотези Ліндона. Визначена група неперервних функцій з регулярною архімедовою функцією довжини. Доведено аналог теореми Уікса про комутатор та теореми Ліндона про розв'язки рівняння $a^2b^2 = c^2$ для більш широкого класу груп з регулярною архімедовою функцією довжини.

Пусть Λ — произвольная упорядоченная абелева группа, Λ^+ — множество ее неотрицательных элементов, G—группа. Тогда отображение $|\ |: G \to \Lambda^+$ называется функцией длины, если $|\ |$ удовлетворяет следующим аксиомам (x, y, z — произвольные элементы G):

L0: $|1| = 0$;

L1: $|x| = |x^{-1}|$;

L2: $d(x, z) > d(x, y)$ влечет $d(x, y) = d(y, z)$, где $d(x, y) = \frac{1}{2}(|x| + |y| - |xy^{-1}|)$;

L3; $d(x, y) \in \Lambda$.

Впервые определение функции длины появилось в работе Р. Линдона [1], а потому отображение $|\ |$ иногда называют линдовой функцией длины (см., например, [2]).

Если функция длины удовлетворяет дополнительной аксиоме LA: $|x^2| > |x|$ для $x \neq 1$, то $|\,|$ называется архимедовой функцией длины. Из LA следует, что $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 1$. Если функция длины удовлетворяет дополнительной аксиоме R: $d(x, y) > 0$ влечет существование единственного z из G такого, что $x = x_1z$, $y = y_1z$, $|x| = |z| + |z_1|$, $|y| = |y_1| + |z|$, $d(x, y) = |z|$, то $|\ |$ называется регулярной функцией длины (или строго регулярной в терминологии Промыслова [3]).

Наибольшее внимание в настоящее время топологов и алгебраистов привлекает случай, когда $\Lambda = R$ (случай действительной функции длины). Основной проблемой здесь является задача алгебраического описания групп с архимедовой действительной функцией длины. Только этот случай и будем рассматривать в дальнейшем.

Пусть $X = \{x_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество букв и $F = \ast_{i \in I} (x_i)^R$ — свободное произведение групп $(x_i)^R$, $i \in I$, каждая из которых изоморфна аддитивной группе действительных чисел R. Если $f = x_{i_1}^{\alpha_1} \ldots x_{i_k}^{\alpha_k}$ — редуцированное слово из F, то отображение

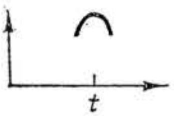
$$|\ |: F \to R^+, \quad |f| = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \tag{1}$$

есть архимедова действительная функция длины на F.

Линдон в [4] высказал предположение, что если на G есть действительная архимедова функция длины, то G вкладывается в F при подходящем выборе множества X. Эта гипотеза Линдона не подтвердилась (соответствующие довольно сложные примеры см. в [3, 5]). Укажем простой пример, опровергающий гипотезу Линдона. Мы также пытаемся реанимировать гипотезу Линдона с помощью понятия непрерывного свободного произведения групп изоморфных R. Первая часть данной статьи является вспомогательной. В ней мы введем группу непрерывных функций и определим на ней регулярную функцию длины. Вторая часть посвящена решению некоторых уравнений для групп с регулярной функцией длины и формулировке гипотезы о $\exists$-свободе групп с действительной архимедовой функцией длины.

Результаты второй части работы — это перенесение на случай групп с архимедовой функцией длины соответствующих теорем о свободных группах [4, 6, 7]. Они служат обоснованием следующей общей гипотезы: любая группа G с действительной архимедовой функцией длины является $\exists$-свободной группой, т. е. $\exists$-теория G совпадает с $\exists$-теорией свободной неабелевой группы (подробнее о $\exists$-свободных группах см. [8]).

1. Контрпример к гипотезе Линдона. Пусть $F(n)$, $n = 1, 2 \ldots$, — свободные группы ранга 2^n с системой свободных порождающих $x_i(n)$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$. Определим на $F(n)$ действительную архимедову



функцию длины, полагая $|x_i(n)|_n = \frac{1}{2^{2n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, на базисных элементах и далее определяя $|\,|_n$ по формуле (1). Определим вложение α_{n-1} группы $F(n-1)$ в группу $F(n)$, положив

$$\alpha_{n-1}(x_i(n-1)) = [x_{2i-1}(n), x_{2i}(n)].$$

Ясно, что α_{n-1} сохраняет длины элементов. Пусть $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F(n)$ и $|\,: G \to R^+$, причем $|f| = |f|_n$, если $f \in F(n)$. Отображение $|\,|$ — корректно определенная действительная архимедова функция длины на G. Так как коммутант G равен G, то группа G не удовлетворяет гипотезе Линдона.

2. Группа непрерывных функций. Обозначим через CF множество допустимых функций $f: R \to R$, определяемое следующими правилами:

1) f — непрерывная функция, определенная на интервале $[0, a_f]$, $a_f \geqslant 0$, причем $f(0) = 0$;

2) в области определения f нет «запретных» участков определения. По определению точка $t \in (0, a_f)$ есть центр запретного участка (рисунок), если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $0 < \eta < \varepsilon$, $f(t - \eta) = f(t + \eta)$.

На множестве функций CF определим операцию умножения $\circ$. Для f, g из CF обозначим через $f * g$ функцию

$$f * g(t) = \begin{cases} f(t), \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant a_f; \\ g(t - a_f) + f(a_f), \text{ если } a_f \leqslant t \leqslant a_f + a_g. \end{cases}$$

Если функция $f*g$ — допустимая, то $f \circ g = f*g$. Если же точка $t = a_f$ есть центр запретного участка, то из области определения $f*g$ вырезаем максимальный запретный участок, и полученную в результате этой операции функцию $h(t)$ называем произведением f, g и обозначаем $f \circ g$. Ясно, что функция $e(t)$, для которой $a_e = 0$, является единицей относительно операции $\circ$, а функция $\overline{f}(t) = f(a_f - t) - f(a_f)$, $0 \leqslant t \leqslant a_f$ — обратной f.

Теорема 1. *Множество CF относительно операции $\circ$ является группой.*

Проверке подлежит только аксиома ассоциативности. Пусть $f, g, h \in CF \setminus e$. Длину запретного участка в $f*g$ обозначим $2m$, а длину запретного в $g*h$ — $2n$. Если $m + n \leqslant a_g$, то закон ассоциативности выполняется очевидным образом. Пусть $a_g < m + n \leqslant 2a_g$. Имеем $f(a_f - t) = g(t) + f(a_f)$, $0 \leqslant t \leqslant m$, и $g(s) = h(a_g - s) + g(a_g)$, $a_g - n \leqslant s \leqslant a_g$. Поэтому $f(a_f - t) - f(a_f) = g(t) = h(a_g - t) + g(a_g)$ при $a_g - n \leqslant t \leqslant m$. Далее,

$$(f \circ g) \circ h(t) = \begin{cases} f(t), \ 0 \leqslant t \leqslant a_f - m, \\ f(a_f) + g(a_g) + h(t - a_f + a_g), \\ a_f - m \leqslant t \leqslant a_f + a_h - a_g, \end{cases}$$

$$f \circ (g \circ h)(t) = \begin{cases} f(t), \ 0 \leqslant t \leqslant a_f - a_g + n, \\ f(a_f) + g(a_g) + h(t - a_f + a_g), \\ a_f - a_g + n \leqslant t \leqslant a_f + a_h - a_g. \end{cases}$$

В силу приведенного выше замечания $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ и теорема доказана.

Заметим, что группа Промыслова из [2] вкладывается в CF с помощью отображения $f \to \hat{f}$, где $\hat{f}(t) = \int\limits_0^t f(x)\,dx$, $0 \leqslant t \leqslant a_f$.

Определим на группе CF действительную архимедову функцию длины, полагая $|f| = a_f$.

Теорема 2. *Функция* $|\,|$ *является регулярной архимедовой функцией длины на группе* CF.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. В дальнейших работах мы определим на CF структуру локально компактной группы и исследуем ее представления в группу матриц второго порядка.

3. Уравнения в группах с регулярной функцией длины. Зафиксируем группу G с регулярной функцией длины, которую будем обозначать $|\,|$. Пусть $g_1, \ldots, g_n \in G$. Произведение $g_1 \ldots g_n$ будем называть редуцированным, если $|g_1 \ldots g_n| = |g_1| + \ldots + |g_n|$ [2]. Если $x = g_1 \ldots g_n$ и произведение справа редуцировано, будем говорить, что $g_1 \ldots g_n$ — редуцированная запись x.

Лемма 1 [1]. *Пусть* $a, b, c \in G$, $d(a, b^{-1}) + d(b, c^{-1}) < |b|$. *Тогда* $d(ab, c^{-1}) = d(b, c^{-1})$.

Из этой леммы следует, что если ab, bc редуцированы, $b \neq 1$, то abc тоже редуцировано. Несложной индукцией это утверждение распространяется на большее число множителей.

Из этой леммы следует, что если ab, bc редуцированы, $b \neq 1$, то abc тоже редуцировано. Несложной индукцией это утверждение распространяется на большее число множителей. В силу регулярности функции длины для любых $x, y \in G$ либо xy редуцировано ($d(x, y^{-1}) = 0$), либо $x = x_1 t$, $y = t^{-1} y_1$, где $|t| = d(x, y^{-1}) > 0$ и $x_1 t$, $t^{-1} y_1$, $x_1 y_1$ редуцированы. Поэтому, если xy не редуцировано, будем говорить еще, что в xy есть сокращение. Элемент z в определении регулярности будем называть общим концом x и y. Аналогично определяется общее начало.

Элемент $x \in G$ назовем циклически редуцированным, если $x \cdot x$ редуцировано. Более подробно об этом см. [2]. Мы будем использовать следующие обозначения: $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, $[x, y]_0 = xyxy^{-1}$, $x^t = txt^{-1}$.

Лемма 2. *Пусть* $xy = x_1 y_1$ *и оба произведения редуцированы. Если* $|x| \geqslant |x_1|$, *то* $x = x_1 t$ *и* $y_1 = ty$, *причем* $x_1 t$, ty *редуцированы.*

Доказательство. Пусть v — общий конец y и y_1, т. е. $y = sv$ и $y_1 = tv$, где $|v| = d(y, y_1)$. Если $s \neq 1$, то $xst^{-1} = x_1$; левое произведение редуцировано, так как редуцировано st^{-1}. Значит, $|x| + |s| + |t| = |x_1| = |x| + |s| - |t|$, откуда $0 < |s| \leqslant |t| = 0$. Противоречие. Таким образом $s = 1$, $y_1 = ty$ и $x = x_1 t$.

Лемма 3. *Пусть* $x, y \neq 1$. *Некоторым сопряжением* x *и* y *можно привести к редуцированному виду* $x = uv$, $y = wv$, *где* x *циклически редуцировано, а* u *и* w *не имеют ни общего начало ни общего конца.*

Доказательство. Пусь x циклически не редуцирован, тогда $x = x_1 t = t^{-1} x_2$, $|t| = d(x, x^{-1}) > 0$. Если $|x_1| \leqslant |t|$, то по лемме 2 $t^{-1} = x_1 k$ и $t = k x_2$, $|k| \geqslant 0$. Отсюда $k^{-1} x_1^{-1} = k x_2$ и, значит, $k = k^{-1}$. Так как кручения в группе нет, то $k = 1$, $x_1 = t^{-1}$ и $x = 1$. Следовательно, $|x_1| > |t|$ и $x = t^{-1} kt\, (t^{-1} k = x_1)$, где $|k| > 0$, запись x редуцирована, а k циклически редуцировано.

Сопрягая, можно считать, что само x циклически редуцировано. Пусть $x = uv$, $y = wv$, где $|v| = d(x, y)$. Если u и w не имеют общего начала, то лемма доказана, иначе $u = zu_1$, $w = zw_1$, $|z| = d(u^{-1}, w^{-1}) > 0$. Возможны два случая: либо $v \neq 1$, тогда после сопряжения получим искомые $x' = u_1 vz$, $y' = w_1 vz$ (в vz нет сокращения, так как x циклически редуцировано), либо $v = 1$ и после того же сопряжения $x' = u_1 z$, а в $y' = w_1 z$ может быть сокращение, т. е. $w_1 = w_2 t$, $z = t^{-1} z_1$, $|t| > 0$, $y' = w_2 z_1$. Если $u_1 \neq 1$, то $x' = (u_1 t^{-1})\, z_1$ и $y' = w_2 z_1$ искомые, так как $u_1 t^{-1}$ и w_2 не имеют ни общего начала, ни общего конца (у u_1 и w_1 нет общего начала, а в $w_2 t$ нет сокращений). Пусть теперь $u_1 = 1$, тогда ситуация такая же, как и в начале рассуждений с $v = z_1$, $u = t^{-1}$ и $w = w_2$. Случай $z_1 \neq 1$ ясен. Если же $z_1 = 1$, то начнется новый цикл с x' и y', причем $|x'| = |x|$ и $|y'| = |y| - 2|x|$. Очевидно, что мы получим искомые x', y' самое большее за $\left[\frac{|y|}{2|x|}\right] + 1$ шагов.

В дальнейшем запись x и y, как в лемме 3, будем называть канонической.

Теорема 3. *Пусть* $[x, y] \neq 1$, *тогда для подходящего элемента* $t \in G$, $[x, y]^t = [x^t, y^t] = uvwu^{-1}v^{-1}w^{-1}$ *циклически редуцировано, а* гр. $\langle x^t, y^t\rangle =$ гр. $\langle uv, wv\rangle$.

Для доказательства теоремы организуем редукционный процесс, на каждом шаге которого элементы x и y либо сопрягаются, либо некоторым нильсеновским преобразованием переводятся в такие x' и y', что $[x, y] = [x', y']$. Нам нужно доказать, что за конечное число шагов процесс остановится. Можно считать, что $x = uv$, $y = wv$ записаны в канонической форме. Тогда $[x, y] = uvwu^{-1}v^{-1}w^{-1}$, и, очевидно, можно считать, что произведение справа является циклически редуцированным. Рассмотрим следующие возможные случаи:

1) $w = 1$ и сокращения возможны только в vu^{-1}, либо в $v^{-1}u$;

2) $u = 1$ и сокращения могут быть только в vw, wv^{-1}, $w^{-1}v$; все три случая требуют отдельного рассмотрения, поэтому будем нумеровать их так: 2а), 2б), 2с);

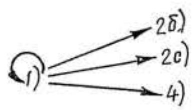
3) $v = 1$, сокращения либо в uw, либо в wu;

4) $u \neq 1$, $v \neq 1$, $w \neq 1$; здесь лишь одна возможность сокращения в vw.

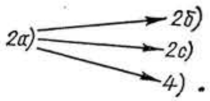
Определение 1. *Переход от пары* x, y *к паре* x', y' *назовем правильным, если для подходящего* $t \in G$, $[x^t, y^t] = [x', y']$ *и* гр. $\langle x^t, y^t\rangle =$ гр. $\langle x', y'\rangle$. *Кроме того, либо* $|x'| = |x|$, а $|y'| \leqslant |y| - |x|$, *либо* $|y'| = |y|$, *а* $|x'| \leqslant |x| - |y|$. *ПП — обозначение правильного перехода.*

Определение 2. *Переход от пары* x, y *к паре* x', y' *назовем слабым, если для подходящего* $t \in G$ $[x^t, y^t] = [x', y']$, гр. $\langle x^t, y^t\rangle =$ гр. $\langle x', y'\rangle$, x', y' *— оба циклически редуцированы и* $|x'| \leqslant |x|$, $|y'| \leqslant |y|$. *СП — обозначение слабого перехода.*

1. Пусть $w = 1$. Если сокращение в vu^{-1}, то $v = v_1t$, $u = u_1t$ и $|t| > 0$. Тогда $x = u_1tv_1t$, $y = v_1t$, причем y тоже будет циклически редуцированным, так как tv_1t входит в редуцированную запись x. Сделаем замену $x' = xy^{-1}$ и $y' = y$. Нетрудно проверить, что $[x', y'] = [x, y]$. Теперь $x' = u_1t$, $y' = v_1t$ оба циклически редуцированы и остается сопряжением перенести общее начало u_1 и v_1 в конец x' и y', чтобы привести их к каноническому виду. Аналогично анализируется случай, когда сокращение в $v^{-1}u$. Ясно, что мы совершили ПСП, после которого, либо получим коммутатор искомого вида, либо будем иметь один из случаев: 1), 2б), 2с), 4). Случай 3) здесь исключен потому, что в канонической форме x' и y' имеют $|v| > 0$ ($|t| > 0$, см. выше), а случай 2а) невозможен из-за того, что y' циклически редуцировано. Схематически это можно изобразить так:



2а) $u = 1$ и сокращение в vw, т. е. $v = v_1t$, $w = t^{-1}w_1$. Имеем $x = v_1t$, $y = t^{-1}w_1v_1t$. Сопрягая, получаем $x' = tv_1$, $y' = w_1v_1$. Если $w_1 \neq 1$, $v_1 \neq 1$, то x' и y' циклически редуцированы и после переноса общего начала t и w_1 в конец x' и y' получим СП:



Если $w_1 = 1$, то мы просто перейдем в 1), причем $|x'| = |x|$ и $|y'| \leqslant \leqslant |y|$. Если $v_1 = 1$, то $|x'| = |x|$, $|y'| = |y| - 2|x|$, т. е. получим ПП:

$$2a) \rightarrow \begin{cases} 1) \\ 2) \\ 3) \\ 4) \end{cases}.$$

Для 2б) и 2с) схема перехода такова:

$$2б) \rightarrow \begin{cases} 1) \\ 2) \\ 4) \end{cases} -ПП \quad и \qquad 2c) \rightarrow \begin{cases} 1) \\ 2б) \\ 2c) \\ 4) \end{cases} -ПСП,$$

причем, если на входе в 2б) y циклически редуцировано, то на выходе y' тоже циклически редуцировано.

Разбор случая 4) также несложен, его схема имеет вид

$$4) \rightarrow \begin{cases} 3) \\ 1) \end{cases},$$

причем $|x'| = |x|$, $|y'| \leqslant |y|$.

3. Случай $v = 1$. Если сокращение в uw, или в wu, то легко видеть, что x и y оба будут циклически редуцированными, так как у них нет ни общего начала, ни общего конца. В частности, если на «входе» в 3) x или y было циклически не редуцировано, то сокращений нет.

Пусть $u = u_1 t$, $w = t^{-1} w_1$, $|t| > 0$. Если $w_1 = 1$, то $x' = xy = u_1$ и $y' = y = t^{-1}$ попадут опять в 3), причем переход правильный. Если $u_1 = = 1$, то $x = t$ и $y = t^{-1} w_1$ сначала сопрягаются: $x' = t$, $y' = w_1 t^{-1}$, а затем $x'' = x' = t$ и $y'' = y'x' = w_1$ и переход в 3) тоже правильный. Наконец, случай $u_1 \neq 1$ и $w_1 \neq 1$ приводится так: $x' = xy = u_1 w_1$ и $y' = y = t^{-1} w_1$; если x' циклически редуцировано, то на этом процесс закончится, иначе $w_1 = w_2 s$, $u_1 = s^{-1} u_2$, $|s| > 0$.

Если $w_2 = 1$, или $u_2 \neq 1$, $w_2 \neq 1$, то после сопряжения мы в первом случае совершим правильный переход в 3) к $x'' = u_2$, $y'' = st^{-1}$, а во втором — $x'' = u_2 w_2$, $y'' = st^{-1} w_2$ оба циклически редуцированы и редукционный процесс остановится. Если $u_2 = 1$, то сначала от $x = s^{-1} t$ и $y = t^{-1} w_2 s$ переходим к $x' = x$ и $y' = yx = t^{-1} w_2 t$, а затем сопрягаем. Получим $x'' = = ts^{-1}$, $y'' = w_2$, т. е. произошел ПП в 3).

Аналогично разбирается случай с сокращением в wu. В итоге 3) $\rightarrow \rightarrow$ 3) —ПП.

Лемма 4. *Редукционный процесс, состоящий из правильных преобразований, заканчивается за конечное число шагов.*

Доказательство. Начальные значения x и y обозначим через x_0 и y_0. ПП, при котором $|x'| = |x|$ и $|y'| \leqslant |y| - |x|$, обозначим ПП1, если наоборот, то ПП2. Ясно, что если $|x| \leqslant |y|$, то можно применять только ПП1, пока знак неравенства не сменится на противоположный. Если теперь нумеровать только те промежуточные значения x и y, где происходит смена ПП1 на ПП2 (или наоборот), то редукционный процесс будет выглядеть так: $|y_0| > |x_0| = |x_1| > |y_1| = |y_2| > |x_2| = \ldots$, или так: $|x_0| > |y_0| = |y_1| > |x_1| = |x_2| > |y_2| = \ldots$.

По определению ПП коммутатор $[x_i, y_i]$ сопряжен с $[x_0, y_0] = [x, y]$. Поэтому $2(|x_i| + |y_i|) \geqslant l$, где l — длина циклически редуцированного «ядра» $[x, y]$ (см. доказательство леммы 3). Из изложенного ясно, что $\lim\limits_{i\to\infty} |x_i| = \lim\limits_{i\to\infty} |y_i| = \alpha \geqslant l/2 > 0$. Выберем i настолько большим, что $\alpha \leqslant \leqslant |x_i|$, $|y_i| \leqslant \alpha + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll \alpha$. Тогда, либо $\alpha \leqslant |x_{i+1}| = |x_i| - |y_i| \leqslant \leqslant \varepsilon$, либо $\alpha \leqslant |y_{i+1}| = |y_i| - |x_i| \leqslant \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы 3. Ясно, что если мы имеем случай 3), то редукционный процесс закончится за конечное число шагов согласно лемме 4. Предположим, что ни разу не встретился случай 3). Если теперь хоть раз встретился случай 4), то после него мы будем иметь случай 1), а затем начнется серия ПП между 1), 2б), 2с) и 4). Опять процесс заканчивается за конечное число шагов. Значит нужно исключить и 4). Попав в 2с), получим серию ПП между 2б) и 2с), т. е. 2с) тоже исключается. Теперь схема переходов выглядит так:

$$\begin{tikzcd}
2а) \arrow[loop left, "ПП"] \arrow[rr, "ПП"] \arrow[rr, bend left, "СП"] & & 2б) \arrow[loop right, "ПП"] \arrow[ll, bend left, "ПП"]
\end{tikzcd} .$$

Если мы хоть раз применим СП, то процесс зациклится в 2б), и за конечное число шагов остановится. Без СП по лемме 4 все доказано.

Теорема 4. *Пусть* $[x, y]_0 \neq 1$. *Тогда для подходящего* $t \in G$, либо $[x, y]_0^t = [x^t, y^t]_0 = uvwvuw^{-1}$ *циклически редуцировано, либо* $[x^t, y^t]_0 = u^2wv^2w^{-1}$ *циклически редуцировано. В обоих случаях* гр. $\langle x^t, y^t \rangle \leqslant$ гр. $\langle u, v, w \rangle$.

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и теоремы 3. При этом СП здесь вообще нет, а ПП только типа ПП1. Поэтому не нужна и лемма 4. Рассмотрим, например, случаи 1)—3). Если $w = 1$, то $[x, y]_0 = uv^2u$ и сокращения могут быть лишь в v^2, или в u^2. В первом случае $v = t^{-1}v_1t$, где $|t| > 0$ и v_1 циклически редуцировано. Тогда $x = ut^{-1}v_1t$, $y = t^{-1}v_1t$ и после сопряжения $x' = tut^{-1}v_1$, $y' = v_1$ оба циклически редуцированы. Поэтому $y = v$ можно было сразу считать таким. Если $u = tu_1t^{-1}$, где $|t| > 0$ и u_1 циклически редуцировано, то сопрягая элементом u_1t^{-1} получаем $x' = u_1^2t^{-1}vtu_1$, $y' = u_1t^{-1}vtu_1^{-1}$, $[x', y']_0 = u_1^2t^{-1}v^2t$ циклически редуцировано. Значит на 1) процесс останавливается.

Если $u = 1$, то замена $x' = x$ и $y' = yx^{-1}$ не изменяет $[x, y]_0$, а $|y'| = |y| - |x|$. После приведения к каноническому виду может уменьшиться только длина $|y'|$. Значит,

$$\begin{tikzcd}
 & 2) \\
2) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 3) \ -ПП1 \\
 & 4)
\end{tikzcd}$$

Пусть $v = 1$, $[x, y]_0 = uwuw^{-1}$ и сокращение либо в uw, либо в wu. В первом случае $u = u_1t$, $w = t^{-1}w_1$, и при $u_1 = 1$, сопрягая, получаем $x' = t$, $y' = w_1t^{-1}$. Далее, $x'' = x'$, $y'' = y'x' = w_1$ — ПП1 в 3). Если же $w_1 = 1$, то после того же сопряжения получим $x' = tu_1$, $y' = t^{-1}$, а затем положим $x'' = x'$, $y'' = y'x' = u_1$, т. е. попадем в 1). Наконец при $u_1 \neq 1$ и $v_1 \neq 1$ аналогично имеем $x' = tu_1$, $y' = w_1t^{-1}$, $[x', y']_0 = tu_1w_1u_1tw^{-1}$. Единственное сокращение — в w_1u_1, т. е. $w_1 = w_2s$, $u_1 = s^{-1}u_2$. Когда $w_2 = 1$, либо $u_2 = 1$, при замене $x'' = x'$, $y'' = y'x'$ будем иметь случай 1), либо ПП1 в 3). Если же $w_2 \neq 1$ и $u_2 \neq 1$, то на x'', y'' редукция заканчивается. В итоге 3) $\to$ 3) —ПП1. Для 4) единственный нетривиальный переход в 3).

Лемма 5. *Если* $ux = xu^{-1}$ *редуцированы, то* $u = 1$.

Доказательство ввиду его простоты опустим.

Лемма 6. *Если* $xuy = yxu^{-1}$ *редуцированы, то* $u = 1$.

Доказательство. Если $|x| = |y|$, $x = 1$ или $y = 1$, то все очевидно. Пусть $0 < |y| < |x|$. Тогда $x = y^t x_1$ с максимальным t и $x_1uy_1 = yx_1u^{-1}$, причем $0 < |x_1| < |y|$. Далее, $y = x_1y_1$ и $ux_1y_1 = y_1x_1u^{-1}$. Если $|u| > |y_1|$, то $u = y_1u_1$ и $u_1x_1y_1^{-1} = x_1u_1^{-1}y_1^{-1}$, откуда $y_1 = y^{-1}$. Противоречие. Следовательно, $|u| < |y_1|$, $y_1 = uy_2$ и $x_1uy_2 = y_2x_1u^{-1}$, т. е. имеем новый цикл с $|x_1| \leqslant |x|$, $|y_2| \leqslant |y| - |u|$.

Лемма 7. *Если* $xuy = yu^{-1}x$ *редуцированы, то* $u = 1$.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $|x| \neq |y|$, $x \neq 1$, и $y \neq 1$. Пусть для определенности $0 < |x| < |y|$ и $u \neq 1$.

а) $2|x| \leqslant |y|$ и, значит, $y = xy_1x$. После подстановки и сокращения имеем $uxy_1 = y_1xu^{-1}$. Если $|y_1| \leqslant |u|$, то $u = y_1u_1$ и, значит, $u_1xy_1 =$

$= xu_1^{-1}y_1^{-1}$. Поэтому $y_1 = y_1^{-1}$, т. е. $y_1 = 1$ и по лемме 5 $u_1 = 1$. Если $|u| < |y_1| \leqslant 2|u|$, то $y_1 = uy_2 = y_3u^{-1}$ и $0 < |y_2| = |y_3| < |u|$. Это невозможно потому, что тогда конец u будет совпадать с началом u^{-1}. Наконец, если $2|u| < |y_1|$, то $y_1 = uy_2u^{-1}$ и $xuy_2 = y_2u^{-1}x$. Таким образом, начнется новый цикл с $|y_2| = |y| - 2|x| - 2|u|$.

б) $2|x| > |y| > |x|$. Тогда $y = y_1x$, $xuy_1 = y_1xu^{-1}$. Остается сослаться на лемму 6.

Теорема 5. *Пусть $a^2b^2 \neq 1$. Тогда для подходящего $t \in G$, $(a^t)^2(b^t)^2 = x^2uy^2u^{-1}$ или равно $xyu \cdot yxu^{-1}$, оба произведения справа циклически редуцированы и $a^t, b^t \in$ гр. $\langle x, y, u\rangle$.*

Доказательство. Естественно можно считать, что $a = x$ циклически редуцировано, а $b = uyu^{-1}$, где y тоже циклически редуцировано. Возможные следующие случаи: 1) сокращение в xu; 2) сокращение в $u^{-1}x$; 3) $u = 1$. Если $x = x_1t$, $u = t^{-1}u_1$, то $w = x^2uy^2u^{-1} = x_1tx_1u_1y^2u_1^{-1}t$ и после сопряжения имеем $a^t = tx_1$, $b^t = u_1yu_1^{-1}$, $w^t = (tx_1)^2u_1y^2u_1^{-1}$. При $x_1 = 1$ длина $|u_1| = |u| - |x|$, $|x^t| = |x|$ и произойдет переход либо в 1), либо в 3). При $u_1 = 1$ будем иметь случай 3). Если $x_1 \neq 1$ и $u_1 \neq 1$, — то в 2). В 2) $x = tx_1$, $u = tu_1$ и аналогично $a^{t^{-1}} = x_1^t$, $b^{t^{-1}} = u_1yu_1^{-1}$, $w^{t^{-1}} = (x_1t)^2(y^2)^{u_1}$. При $x_1 = 1$ — переход в 2), либо в 3) с $|u_1| = |u| - |x|$, $|x^{t^{-1}}| = |x|$. При $u_1 = 1$ мы опять имеем 3).

3) $w = x^2y^2$ и сокращение в xy, т. е. $x = x_1t$, $y = t^{-1}y_1$. Теперь $w = x_1tx_1y_1t^{-1}y_1$. После сопряжения, $w^{y_1} = y_1x_1tx_1y_1t^{-1} = [y_1x_1, tx_1]_0$ и очевидно a^{y_1} и b^{y_1} лежат в гр. $\langle y_1x_1, tx_1\rangle$. Остается сослаться на теорему 4. Если сокращение в yx, то $w^{y^2} = y^2x^2$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Если $a, b, c \in G$ таковы, что $a^2b^2 = c^2$, то* гр. $\langle a, b, c\rangle$ *абелева.*

Доказательство. Учитывая теорему 5, можно предполагать, что a^2b^2 равно циклически редуцированному элементу вида $x^2uy^2u^{-1}$, либо $xyuyxu^{-1}$, а c тоже циклически редуцировано. Так как $a, b \in$ гр. $\langle x, y, u\rangle$, то достаточно показать, что $u = 1$ и $c = xy = yx$.

Пусть $xyuyxu^{-1} = c^2$. По лемме 1 $xyu = yxu^{-1} = c$ и, следовательно, $u = u^{-1}$, $xy = yx = c$. Если $x^2uy^2u^{-1} = c^2$, то по той же лемме $c = xyu^{-1}$, так как $|c| = |x| + |y| + |u|$. После подстановки и сокращения будем иметь $xuy = yu^{-1}x$ и по лемме 7 $u = 1$, $xy = yx = c$. Теорема доказана.

Заключительные замечания. Как следует из результатов работы [5], любую группу с архимедовой функцией длины можно вложить в PIG-группу тоже с архимедовой функцией длины. Свойство PIG влечет регулярность. Поэтому из теоремы 3 в качестве следствия получаем теорему Харрисон о том, что любые два элемента группы с архимедовой функцией длины порождают либо абелеву, либо свободную подгруппу. Действительно, если $[x, y] \neq 1$, то несложно проверить, что любое приведенное слово от uv и wv не сокращается. Аналогично из теоремы 6 следует, что фундаментальная группа компактной неориентируемой поверхности рода 3, имеющая представление $G = \langle a, b, c \mid a^2b^2 = c^2\rangle$, не может быть снабжена архимедовой функцией длины. Известно, что фундаментальная группа компактной ориентируемой поверхности рода 2 вложима в нее. Таким образом, аналог теоремы Столлингза о том, что если подгруппа конечного индекса в группе без кручения свободна, то и вся группа свободна, неверен в более широкой категории групп с действительной архимедовой функцией длины. Действительно, Морган и Шален доказали, что фундаментальную группу компактной ориентируемой поверхности можно снабдить архимедовой функцией длины [5].

1. *Lyndon R. C.* Length functions in groups // Math. scand.— 1963.— 12.— P. 209—234.
2. *Harrison N.* Real length functions in groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1972.— 174.— P. 77—106.
3. *Promislov D.* Equivalence classes of length functions on groups // Proc. London Math. Soc.— 1985.— 51, № 3.— P. 449—477.
4. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп.— М. : Мир, 1980. — 447 с.

5. *Alperin R. C., Moss K. N.* Complete trees for groups with a resl-valued length function // J. London Math. Soc.— 1985.— 31, N 103.— P. 55—68.
6. *Lyndon R. C.* The equation $a^2b^2 = c^2$ in free groups // Mich. Math. J. — 1959.— **6**.— P. 155—164.
7. *Wicks M. J.* Commutators in free products // J. London Math. Soc.— 1962.— **37**.— P. 433—444.
8. *Ремесленников В. Н.* ∃-свободные группы // Сиб. мат. журн.— 1989.— **30**, № 6.— С. 193— 197.

Получено 14.02.91