УДК 517.944:519.56

А. Ф. БАРАННИК, канд. физ.-мат. наук,
Л. Ф. БАРАННИК, д-р физ.-мат. наук (Полтав. пед. ин-т),
В. И. ФУЩИЧ, чл.-корр. АН УССР (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Связные подгруппы конформной группы C(1,4)

Предложен метод описания максимальных подалгебр ранга r, $1 \leqslant r \leqslant 4$, конформной алгебры $AC(1, 4)$, являющейся максимальной алгеброй инвариантности уравнения эйконала. С помощью этого метода проведена классификация с точностью до $C(1, 4)$-эквивалентности всех максимальных подалгебр L ранга 1, 2, 3 и 4 алгебры $AC(1, 4)$, удовлетворяющих условию $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, где V — пространство трансляций.

Запропоновано метод опису максимальних підалгебр рангу r, $1 \leqslant r \leqslant 4$, конформної алгебри $AC(1, 4)$, яка є максимальною алгеброю інваріантності рівняння ейконала. За допомогою цього методу проведена класифікація з точністю до $C(1, 4)$-еквівалентності всіх максимальних підалгебр L рангу 1, 2, 3 і 4 алгебри $AC(1, 4)$, які задовольняють умові $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, де V — простір трансляцій.

1. Введение. Уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1 \tag{1}$$

инвариантно относительно конформной группы $C(1, 4)$ пространства Минковского $R_{1,4}$ с метрикой $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, где $x_4 = u$ [1]. Применение методов группового анализа для построения точных решений уравнения (1) связано с задачей выделения в группе $C(1, 4)$ связных подгрупп, удовлетворяющих заданным требованиям. Изучение связных подгрупп группы $C(1, 4)$ сводится к изучению подалгебр соответствующей алгебры Ли $AC(1, 4)$. Систематическое изучение подалгебр алгебр преобразований квантовой механики начато в основополагающей работе Патеры, Винтернитца и Цассенхауза [2], в которой предложен метод для описания относительно определенной сопряженности классов подалгебр конечномерной алгебры Ли с нетривиальным разрешимым идеалом и, в частности, с нетривиальным абелевым идеалом.

Этим методом проведена классификация подалгебр произвольных вещественных трех- и четырехмерных алгебр Ли [3] и таких алгебр: $AP(1, 3)$ [2], $A\tilde{P}(1, 3)$ [4], $A\tilde{P}(1, 2)$ [5], $AE(3)$ [6], $AO(1, 4)$ [7], $AO(2, 3)$ [8], $A\,\mathrm{Opt}(1, 2)$ [8], $A\,\mathrm{Opt}(1, 3)$ [9], $AP(1, 4)$ [10—13]. Подалгебры конформной алгебры $AC(1, 4)$ изучены с точностью до $C(1, 4)$-сопряженности в работе [14].

В настоящей работе предложен новый метод для классификации подалгебр алгебры инвариантности $AC(1, 4)$ уравнения (1). Он основан на том, что подалгебры алгебры $AC(1, 4)$ изучаются с точностью до $C(1, 4)$-эквивалентности. Две подалгебры $L_1, L_2 \subset AC(1, 4)$ называются эквивалентными, если для некоторого $g \in C(1, 4)$ подалгебры gL_1g^{-1} и L_2 обладают одними и теми же инвариантами. Классификацию всех подалгебр конформной алгебры проводим по рангам. Две максимальные подалгебры L_1, L_2 данного ранга r эквивалентны тогда и только тогда, когда L_1 и L_2 $C(1, 4)$-сопряжены. Таким образом, в классе всех подалгебр алгебры $AC(1, 4)$, эквивалентных между собой, существует с точностью до $C(1, 4)$-сопряженности только одна максимальная подалгебра. В работе предложен метод, с помощью которого подалгебры данного рода можно полностью описать. Указанный метод основан на разложении пространства трансляций в ортогональную сумму подпространств и на разбиении множества всех подалгебр алгебры AC (1, 4) на классы, каждый из которых характеризуется изотропным рангом. В ходе решения задачи получено также описание максимальных подалгебр расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}$ (1, 4) и решена задача о конформной сопряженности подалгебр алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4).

2. Конформная группа $C(1,4)$ и ее алгебра Ли. Пусть $R_{1,4}$ — пространство Минковского с метрикой $g_{\alpha\beta}$, где $g_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 4$, $g_{00} = -g_{11} = \dots - g_{44} = 1$. Отображение $x_i = x_i(y_0, y_1, \dots, y_4)$, $i = 0, 1, \dots, 4$, области $U \subset R_{1,4}$ в U называется конформным, если

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} g^{kl} \frac{\partial x_l}{\partial y_\beta} = \lambda(x)\, g_{\alpha\beta},$$

где $\lambda(x) \neq 0$, $x = (x_1, \dots, x_4)$. Множество всех конформных преобразований пространства $R_{1,4}$ образует группу C (1, 4).

Пусть $O(2,5)$ — группа изометрий псевдоевклидова пространства $R_{2,5}$ с метрикой ρ_{ab}, где $\rho_{ab}=0$ при $a\neq b$, $a, b = 1, 2, \dots, 7$, $\rho_{11} = \rho_{22} = -\rho_{33} = \dots = -\rho_{77} = 1$. Известно (см., например [14]), что существует гомоморфизм $\varphi: O(2,5) \to C(1,4)$, сопоставляющий матрице $C \in O(2,5)$ конформное преобразование φ_C пространства $R_{1,4}$. Ядро гомоморфизма φ состоит из $\pm E_7$, где E_7 — единичная матрица порядка 7. Поэтому часто отождествляют $C(1,4)$ с $O(2,5)$.

Гомоморфизм $\varphi: O$ (2, 5) $\to C$ (1, 4) индуцирует изоморфизм f алгебры AO (2, 5) на алгебру AC (1, 4). Если отождествить алгебры AO (2, 5) и AC (1, 4), то группа O (2, 5)-автоморфизмов алгебры AO (2, 5) совпадает с группой C (1, 4)-автоморфизмов алгебры AC (1, 4). Выпишем изоморфизм f в явном виде. Пусть I_{ab} — матрица порядка 7, имеющая единицу на пересечении a-й строки и b-го столбца и нули на всех остальных местах ($a, b=1, \dots, 7$). Базис алгебры AO (2, 5) образуют матрицы $\Omega_{12} = I_{12} - I_{21}$, $\Omega_{ab} = -I_{ab} + I_{ba}$, $a<b$; $a, b = 3, \dots, 7$, $\Omega_{ia} = -I_{ia} - I_{ai}$, $i = 1, 2$; $a = 3, \dots, 7$. Они связаны такими коммутационными соотношениями:

$$[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = \rho_{ad}\Omega_{bc} + \rho_{bc}\Omega_{ad} - \rho_{ac}\Omega_{bd} - \rho_{bd}\Omega_{ac},$$
$$a, b, c, d = 1, \dots, 7.$$

Базис алгебры $AC(1,4)$ составляют генераторы псевдовращений $J_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 4$, трансляций (сдвигов) P_α, нелинейных конформных преобразований K_α, $\alpha = 0, 1, \dots, 4$, и дилатации D. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям [14]

$$\begin{gathered}[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma},\\ [P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \quad [P_\alpha, P_\beta] = 0,\\ [K_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}K_\gamma - g_{\alpha\gamma}K_\beta, \quad [K_\alpha, K_\beta] = 0,\\ [D, P_\alpha] = P_\alpha, \quad [D, K_\alpha] = -K_\alpha, \quad [D, J_{\alpha\beta}] = 0,\\ [K_\alpha, P_\beta] = 2(g_{\alpha\beta}D - J_{\alpha\beta}),\end{gathered} \tag{2}$$

где $g_{00} = -g_{11} = \dots = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha\neq\beta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \dots, 4$.

Изоморфизм $f: AO(2,5) \to AC(1,4)$ задается таким образом:

$$f(\Omega_{\alpha+2,\beta+2}) = J_{\alpha\beta}, \quad f(\Omega_{1,\alpha+2} - \Omega_{\alpha+2,7}) = P_\alpha,$$
$$f(\Omega_{1,\alpha+2} + \Omega_{\alpha+2,7}) = K_\alpha, \quad f(\Omega_{17}) = -D, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \dots, 4.$$

В дальнейшем будем отождествлять прообраз с образом при изоморфизме f. В связи с этим получаем два набора обозначений для одного и того же базиса, а именно:

$$\Omega_{\alpha+2,\beta+2} = J_{\alpha\beta}, \quad \Omega_{1,\alpha+2} = \frac{1}{2}(P_\alpha + K_\alpha),$$

$$\Omega_{\alpha+2,n+3} = \frac{1}{2}(K_\alpha - P_\alpha), \quad \Omega_{17} = -D, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 7; \qquad \alpha < \beta. \tag{3}$$

Пусть $Q_1, \ldots, Q_7$ — ортонормированный базис псевдоевклидова пространства $R_{2,5}$ с метрикой

$$\rho(X, X) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_5^2, \quad X = x_i Q^i.$$

Нормализатор одномерного вполне изотропного пространства $\langle Q_1 + Q_7 \rangle$ в алгебре $AO(2, 5)$ совпадает с расширенной алгеброй Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4) = \langle P_0, P_1, \ldots, P_4 \rangle \supsetplus (AO(1, 4) \oplus \langle D \rangle)$, а нормализатор двумерного изотропного пространства $\langle Q_1 + Q_7, Q_2 + Q_6 \rangle$ совпадает с алгеброй

$$AOpt(1, 4) = \langle M, P_1, P_2, P_3, G_1, G_2, G_3 \rangle \supsetplus (AO(3) \oplus \langle C, S, T, Z \rangle),$$

где

$$AO(1, 4) = \langle J_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 4 \rangle, \quad AO(3) = \langle J_{\alpha\beta} \mid a, b = 1, 2, 3 \rangle,$$

$$M = P_0 + P_4, \quad G_a = J_{0a} - J_{a4}, \quad a = 1, 2, 3, \quad C = -(J_{04} + D),$$

$$Z = J_{04} - D, \quad S = \frac{1}{2}(K_0 + K_4), \quad T = \frac{1}{2}(P_0 - P_4).$$

Алгебра $A\,\mathrm{Opt}(1, 4)$ называется оптической алгеброй пространства $R_{1,4}$.

Базисные элементы алгебры $A\tilde{P}(1, 4)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (2). Генераторы алгебры $A\,\mathrm{Opt}(1, 4)$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[G_a, J_{bc}] = g_{ab}G_c - g_{ac}G_b, \quad [G_a, G_b] = 0,$$

$$[P_a, G_b] = \delta_{ab}M, \quad [G_a, M] = [P_a, M] = [J_{ab}, M] = 0,$$

$$[C, S] = 2S, \quad [C, T] = -2T, \quad [T, S] = C,$$

$$[Z, M] = -2M, \quad [Z, G_a] = -G_a, \quad [Z, P_a] = -P_a,$$

$$[Z, C] = [Z, S] = [Z, T] = 0, \quad [C, G_a] = G_a, \quad [C, P_a] = -P_a,$$

$$[C, M] = 0, \quad [S, G_a] = 0, \quad [S, P_a] = -G_a, \quad [S, M] = 0,$$

$$[T, G_a] = P_a, \quad [T, P_a] = 0, \quad [T, M] = 0, \quad a, b, c = 1, 2, 3.$$

3. Алгебра инвариантности уравнения эйконала. В работе [1] доказано, что максимальной алгеброй инвариантности уравнений эйконала (1) является алгебра Ли $AC(1, 4)$ конформной группы $C(1, 4)$ пространства Минковского $R_{1,4}$ с метрикой $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, где $x_4 = u$. Базис алгебры $AC(1, 4)$ составляют такие векторные поля:

$$P_\alpha = \partial_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}x_\gamma\partial_\beta - g^{\beta\gamma}x_\gamma\partial_\alpha, \quad D = -x^\alpha\partial_\alpha,$$

$$K_\alpha = -2(g^{\alpha\beta}x_\beta)D - (g^{\beta\gamma}x_\beta x_\gamma)\partial_\alpha,$$

где $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3, 4$.

Пусть G — подгруппа Ли группы $C(1, 4)$. Вещественная функция $f(x) = f(x_0, x_1, \ldots, x_4)$, определенная на некоторой области U пространства $R_{1,4}$ и не являющаяся тождественно постоянной, называется инвариантом группы G, если $f(x)$ постоянна на G-орбите каждой точки $x \in U$. Функцию $f(x)$ называют также инвариантом алгебры Ли AG группы G. Пусть $r_* = r_*(\xi)$ — общий ранг касательного отображения ξ группы G [15]. Число $r_*(AG) = r_*$ называется рангом алгебры AG. Пусть L_1 и L_2 — подалгебры

алгебры $AC(1, 4)$. Если для некоторого $g \in C(1, 4)$ подалгебры gL_1g^{-1} и L_2 обладают одними и теми же инвариантами, то L_1 и L_2 будем называть $C(1, 4)$-эквивалентными.

Множество подалгебр алгебры $AC(1, 4) = AO(2, 5)$ разобьем на три класса: 1) подалгебры, не имеющие в $R_{2,5}$ инвариантных вполне изотропных подпространств; 2) подалгебры, имеющие в $R_{2,5}$ инвариантное вполне изотропное подпространство размерности 1; 3) подалгебры, имеющие в $R_{2,5}$ инвариантное вполне изотропное подпространство размерности 2 и не имеющее в $R_{2,5}$ инвариантных вполне изотропных подпространств размерности один. Подалгебры второго класса являются подалгебрами расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1, 4)$. Подалгебры третьего класса являются подалгебрами оптической алгебры $A\,\mathrm{Opt}(1, 4)$ и не сопряжены с подалгебрами алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Основная трудность — в задаче классификации подалгебр расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$. Решение такой задачи опирается на следующий алгоритм построения максимальных подалгебр ранга r алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, не содержащихся в $AP(1, 4)$ [16].

1. Для максимальной подалгебры $K \subset AP(1,4)$ ранга $r-1$ находим ее нормализатор в алгебре $A\tilde{P}(1, 4)$. Пусть, например, $\mathrm{Nor}_{A\tilde{P}(1,4)} K = K + \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — подалгебра.

2. Проводим классификацию с точностью до группы внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{N}$ всех одномерных подалгебр алгебры $\mathfrak{N}$ с ненулевой проекцией на $\langle D\rangle$.

3. Если $\langle D_1 + X_1\rangle, \ldots, \langle D_t + X_t\rangle$ — все одномерные подалгебры алгебры $\mathfrak{N}$, то $K \uplus \langle D_1 + X_1\rangle, \ldots, K \uplus \langle D_t + X_t\rangle$ — все расширения ранга r подалгебры K алгебры $A\tilde{P}(1, 4)$, содержащие подалгебру K.

В настоящей работе используются следующие обозначения: $V = \langle P_0, P_1, \ldots, P_4\rangle$ — пространство трансляций расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1, 4)$; $\hat{\pi}_0, \hat{\pi}, \hat{\omega}$ — проектирования $A\tilde{P}(1, 4)$ на $\langle J_{04}\rangle$, $\langle D\rangle$, $AO(3)$, $AO(1, 4)$ соответственно; $\hat{\psi}$, $\hat{\tau}$ — проектирования $A\,\mathrm{Opt}(1, 4)$ на $AO(3)$ и $\langle D, S, T, Z\rangle$ соответственно.

Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $AC(1, 4)$. Если $P_0 \in L$ или $P_0 + P_4 \in L$, то уравнение (1) не имеет вещественных решений, инвариантных относительно L. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые подалгебры $L \subset AC(1, 4)$ удовлетворяют условию $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$.

4. Подалгебры класса 0 алгебры $AC(1, 4)$. Подалгебру $F \subset AO(2, 5)$ отнесем к классу 0, если она не имеет в $R_{2,5}$ инвариантных вполне изотропных подпространств. Используя описание неприводимых подалгебр алгебр $AO(2, 1)$, $AO(2, 3)$ и $AO(2,2)$, а также соотношения (3), доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть F — подалгебра класса 0 алгебры $AC(1,4)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *если F — максимальная подалгебра ранга 1, то она сопряжена с одной из таких алгебр:*

$$1)\ F_1 = \langle P_0 + K_0, + \alpha J_{12}\rangle,\quad \alpha > 0, \alpha \neq 2;\qquad 2)\ F_2 = \langle P_0 + K_0\rangle;$$
$$3)\ F_3 = \langle P_0 + K_0 + \alpha J_{12} + \beta J_{34}\rangle,\quad 0 < \alpha \leqslant \beta;\qquad \alpha, \beta \neq 2;$$

b) *если F — максимальная подалгебра ранга 2, то она сопряжена с одной из таких алгебр:*

$$1)\ F_1 = \langle P_0 + K_0, J_{12}\rangle;\qquad 2)\ F_2 = \langle P_0 + K_0, J_{12} + \alpha J_{34}\rangle,\quad 0 < \alpha \leqslant 1;$$
$$3)\ F_3 = \langle J_{12} + \alpha (P_0 + K_0), J_{34} + \beta (P_0 + K_0)\rangle,\ \alpha > 0,\quad \beta \geqslant 0,\quad 2\alpha \neq 1$$
$$\textit{при}\ \beta = 0;$$

c) *если F — максимальная подалгебра ранга 3, то она сопряжена с од-*

ной из таких алгебр:

1) $F_1 = \langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + 2J_{04}, J_{12} + J_{34}\rangle$; 2) $F_2 = AO(3) \oplus \oplus \langle P_0 + K_0\rangle$; 3) $F_3 = \langle P_0 + K_0, J_{12}, J_{34}\rangle$; 4) $F_4 = \langle P_0 - K_0 - - \alpha(K_4 - P_4), J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$;

d) *если F — максимальная подалгебра ранга 4, то она сопряжена с одной из таких алгебр:*

1) $F_1 = \langle P_0 + K_0 - 2J_{12} - 2J_{34}, P_1 + K_1 + 2J_{02}, P_3 + K_3 + 2J_{04}, J_{13} + J_{24}\rangle$;

2) $F_2 = \langle P_0 + K_0 - 4J_{23}, P_2 + K_2 + \sqrt{3}(P_1 + K_1) + 2J_{03}, -P_3 - K_3 + + 2J_{02} - 2\sqrt{3}J_{01}, K_4 - P_4\rangle$; 3) $F_3 = \langle J_{12} - J_{34} + \alpha(P_0 + K_0)\rangle \oplus \oplus \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}\rangle$, $\alpha > 0$; 4) $F_4 = \langle P_0 + K_0\rangle \oplus AO(3) \oplus \oplus \langle K_4 - P_4\rangle$; 5) $F_5 = \langle P_0 + K_0\rangle \oplus \langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \frac{\sqrt{3}}{2}(K_4 - P_4), J_{23} - J_{14} + \frac{\sqrt{3}}{2}(K_3 - P_3)\rangle$; 6) $\langle P_0 + K_0\rangle \oplus AO(4)$; 7) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, K_1 - P_1, K_2 - P_2, K_3 - P_3, K_4 - P_4\rangle$; 8) $\langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12}\rangle \oplus \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$; 9) $\langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12}\rangle \oplus \langle K_3 - P_3, K_4 - P_4, J_{34}\rangle$.

5. Одномерные подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1, 4)$. Пусть $V = \langle P_0, P_1, \ldots, P_4\rangle$ — пространство трансляций алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1, 4)$. Подалгебра $L \subset AO(1, 4)$ называется подалгеброй класса 0, если V не содержит вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L. Будем говорить, что подалгебра $L \subset AO(1, 4)$ относится к классу 1 или имеет изотропный ранг 1, если ранг максимального вполне изотропного подпространства V, инвариантного относительно L, равен 1. Для подалгебры класса 0 изотропный ранг полагаем равным нулю. Очевидно, любая подалгебра алгебры $AO(1, 4)$ имеет изотропный ранг 0 или 1. Аналогично определяются эти понятия и для подалгебры алгебры $AP(1, 4)$.

Пусть L — подалгебра класса 0 алгебры $AO(1, 4)$. Тогда пространство V является прямой ортогональной суммой неприводимых L-подпространств $V_0, V_1, \ldots, V_s$, каждое из которых невырождено. По теореме Витта можно предполагать, что $V_0 = \langle P_0, P_1, \ldots, P_{k_0}\rangle$, $V_1 = \langle P_{k_0+1}, \ldots, P_{k_0+k_1}\rangle, \ldots, V_s = = \langle P_{\sigma+1}, \ldots, P_{\sigma+k_s}\rangle$, где $\sigma = k_0 + k_1 + \ldots + k_{s-1}$, $\sigma + k_s = 4$, $k_0 \geqslant 0$, $k_i \geqslant \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, s$. Здесь V_0 — псевдоевклидово пространство типа $(1, k_0)$, если $k_0 \neq 0$, V_i — евклидово пространство размерности k_i, $i = 1, \ldots, s$. Естественно возникает задача определения подобного разложения для подалгебры L класса 1 алгебры $AO(1, 4)$. Всегда можно предполагать, что такая подалгебра L оставляет инвариантным подпространство $V_{(1)} = = \langle P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$. Пространство $V_{(1)}$ с точностью до $O(1, 4)$-сопряженности является прямой ортогональной суммой L-инвариантных подпространств U и W, удовлетворяющих двум условиям [16]:

а) пространство U изотропно и является ортогональной суммой $U = = U_1 + \ldots + U_s$ L-инвариантных подпространств $U_1 = \langle P_0 + P_4\rangle \oplus V_1, \ldots \ldots, U_s = \langle P_0 + P_4\rangle \oplus V_s$, где $V_1 = \langle P_1, \ldots, P_{k_1}\rangle, \ldots, V_s = \langle P_{\sigma+1}, \ldots, P_{\sigma+k_s}\rangle$, $\sigma = = k_1 + \ldots + k_{s-1}$; каждое из подпространств U_i содержит только следующие L-инвариантные подпространства: $0, \langle P_0 + P_4\rangle, U_i$;

в) пространство W невырождено и является прямой ортогональной суммой подпространств $W_1 = \langle P_{l_0+1}, \ldots, P_{l_0+l_1}\rangle, \ldots, W_t = \langle P_{\delta+1}, \ldots, P_{\delta+l_t}\rangle$, $t \geqslant 0$, $l_0 = \sigma + k_s$, $\delta = l_0 + \ldots + l_{t-1}$, $\delta + l_t = 3$; каждое из подпространств W_i неприводимо и инвариантно относительно L.

Отметим, что максимальная подалгебра класса 1 алгебры $AO(1, 4)$, оставляющая $V_{(1)}$ инвариантным, совпадает с алгеброй $\langle G_1, G_2, G_3\rangle \subset\!\!\!\!+ (AO(3) \oplus \langle J\Omega_{04}\rangle)$, где $G_a = J_{0a} - J_{a4}$, $AO(3) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $a = = 1, 2, 3$.

Применим эти результаты к задаче классификации максимальных подалгебр данного ранга алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4). В настоящем пункте рассматривается классификация одномерных подалгебр алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4).

Теорема 2. *С точностью до $\tilde{P}$ (1, 4)-сопряженности одномерные подалгебры алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4) исчерпываются следующими алгебрами:*

1) $L_1 = \langle J_{12} \rangle$; 2) $L_2 = \langle J_{12} + P_0 \rangle$; 3) $L_3 = \langle J_{12} + P_0 + P_4 \rangle$; 4) $L_4 = \langle J_{12} + P_3 \rangle$; 5) $L_5 = \langle J_{12} + \alpha J_{34} \rangle$, $0 < \alpha \leqslant 1$; 6) $L_6 = \langle J_{12} + \alpha J_{34} + P_0 \rangle$; 7) $L_7 = \langle G_1 \rangle$; 8) $L_8 = \langle G_1 + P_2 \rangle$; 9) $L_9 = \langle G_1 + P_0 - P_4 \rangle$; 10) $L_{10} = \langle J_{12} + G_3 \rangle$; 11) $L_{11} = \langle J_{12} + G_3 + P_0 - P_4 \rangle$; 12) $L_{12} = \langle J_{04} \rangle$; 13) $L_{13} = \langle J_{04} + P_1 \rangle$; 14) $L_{14} = \langle J_{12} + cJ_{04} \rangle$, $c > 0$; 15) $L_{15} = \langle J_{12} + cJ_{04} + P_3 \rangle$, $c > 0$; 16) $L_{16} = \langle J_{12} + \alpha D \rangle$, $\alpha > 0$; 17) $L_{17} = \langle J_{12} + J_{34} + \alpha D \rangle$, $\alpha > 0$; 18) $L_{18} = \langle J_{12} + cJ_{34} + \alpha D \rangle$, $c > 0$, $\alpha > 0$; 19) $L_{19} = \langle J_{04} + \alpha D \rangle$, $\alpha > 0$; 20) $L_{20} = \langle J_{12} + cJ_{04} + \alpha D \rangle$, $c > 0$, $\alpha > 0$; 21) $L_{21} = \langle G_3 + D \rangle$; 22) $L_{22} = \langle J_{12} + G_3 + \alpha D \rangle$, $\alpha > 0$; 23) $L_{23} = \langle J_{04} + D + M \rangle$; 24) $L_{24} = \langle J_{12} + \alpha (J_{04} + D + M) \rangle$, $\alpha > 0$; 25) $= \langle D \rangle$; 26) $L_{26} = \langle P_1 \rangle$.

Доказательство. Пусть одномерная подалгебра L содержится в AP (1, 4) и относится к классу 0. Тогда пространство V является прямой суммой неприводимых L-подпространств. С точностью до O (1, 4)-сопряженности $V = \langle P_0 \rangle \oplus \langle P_1, P_2 \rangle \oplus \langle P_3, P_4 \rangle$. Следовательно, $L = \langle J_{12} + \alpha J_{34} + \beta P_0 \rangle$. Если $\beta \neq 0$, то автоморфизм вида exp (adt D) отображает L на $\langle J_{12} + \alpha J_{34} + \varepsilon P_0 \rangle$, $\varepsilon = \pm 1$. Так как автоморфизм, соответствующий матрице diag [—1, 1, 1, 1, 1], отображает алгебру $\langle J_{12} + \alpha J_{34} - P_0 \rangle$ на алгебру $\langle J_{12} + \alpha J_{34} + P_0 \rangle$, то в рассматриваемом случае L сопряжена либо с L_5, либо с L_6.

Пусть далее одномерная подалгебра L, являющаяся подалгеброй алгебры AP (1, 4), относится к классу 1 и $\hat{\pi}_0 (L) = 0$. Если $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4 \rangle \oplus \langle P_1, P_2 \rangle \oplus \langle P_3 \rangle$, то $\hat{\omega} (L) = \langle J_{12} \rangle$. Поэтому $L = \langle J_{12} + X \rangle$, где $X \in \langle P_0, P_3, P_4 \rangle$. В силу теоремы Витта существует такая изометрия пространства $\langle P_0, P_3, P_4 \rangle$, которая отображает X в один из генераторов αP_0, αP_3, $\alpha (P_0 + P_4)$. Рассмотрим, например, алгебру $\langle J_{12} + \alpha P_0 \rangle$, $\alpha \neq 0$. Автоморфизм вида exp (ad tD) отображает ее на алгебру $\langle J_{12} + \varepsilon P_0 \rangle$, $\varepsilon = \pm 1$. Если $\varepsilon = -1$, то автоморфизм, соответствующий матрице diag [—1, 1, 1,1 1], отображает алгебру $\langle J_{12} - P_0 \rangle$ на алгебру $\langle J_{12} + P_0 \rangle$. В двух других случаях показываем, что L $\tilde{P}$ (1, 4)-сопряжена с алгебрами $\langle J_{12} + P_3 \rangle$ и $\langle J_{12} + P_0 + P_4 \rangle$ соответственно. Аналогично, если пространство $V_{(1)}$ допускает разложение $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1 \rangle \oplus \langle P_2 \rangle \oplus \langle P_3 \rangle$, то получаем алгебры $\langle G_1 \rangle$, $\langle G_1 + P_2 \rangle$ и $\langle G_1 + P_0 - P_4 \rangle$, а если $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_3 \rangle \oplus \langle P_1, P_2 \rangle$,— то алгебры $\langle J_{12} + G_3 \rangle$, $\langle J_{12} + G_3 + P_0 - P_4 \rangle$.

Пусть L является подалгеброй алгебры $AP (1, 4)$ и $\hat{\pi}_0 (L) = \langle J_{04} \rangle$. Допустим, например, что $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4 \rangle \oplus \langle P_1, P_2 \rangle \oplus \langle P_3 \rangle$. Тогда с точностью до $\tilde{P}$ (1,4)-сопряженности $L = \langle J_{12} + cJ_{04} + X \rangle$, $X = \alpha P_3$, $c \neq 0$. Автоморфизм, соответствующий, матрице diag $[1, T, 1, 1]$,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

отображает L на $\langle J_{12} - cJ_{04} + \alpha P_3 \rangle$. Следовательно, можно предполагать, что $c > 0$. Как и выше, нетрудно убедиться, что $\alpha = 1$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда проекция L на $\langle D \rangle$ совпадает с $\langle D \rangle$. Тогда $L = \langle D + x \rangle$, где $X \in AP$ (1, 4). Поэтому задача сводится к исследованию всех случаев, изложенных выше. Если $X = J_{12} + cJ_{34} + \beta P_0$, то, очевидно, алгебра L сопряжена с алгеброй $\langle J_{12} + cJ_{34} + \alpha D \rangle$, $\alpha > 0$. Аналогично рассматриваются остальные случаи. Теорема доказана.

Так как каждая одномерная подалгебра является максимальной подалгеброй ранга 1, то доказанная теорема дает полную классификацию максимальных подалгебр ранга 1 алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4) с точностью до $\tilde{P}$ (1, 4)-сопряженности.

6. Подалгебры ранга 2 алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4). В настоящем пункте проводим классификацию максимальных подалгебр ранга 2 алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4) с точностью до $\tilde{P}$ (1, 4)-сопряженности, используя одномерные подалгебры алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4), классификация которых изложена в п. 5. Указанная задача решается в три этапа.

а). Подалгебры класса 0 алгебры AP (1, 4). Все максимальные подалгебры ранга 2, относящиеся к классу 0, описываются следующим предложением.

Предложение 1. *Пусть F — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры AP (1, 4), относящаяся к классу 0, и $F \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$. Тогда она $\tilde{P}$ (1, 4)-сопряжена с одной из следующих алгебр*:

$$1)\ F_1 = \langle J_{12}, J_{34} \rangle; \qquad 2)\ F_2 = \langle J_{12} + P_0, J_{34} + \delta P_0 \rangle, \quad \delta \geqslant 0;$$

$$3)\ F_3 = \langle J_{03}, J_{04}, J_{34} \rangle.$$

Доказательство. Пусть F — максимальная подалгебра ранга 2, относящаяся к классу 0, и $F \cap V = 0$. Тогда пространство V является прямой ортогональной суммой неприводимых F-подпространств. Допустим, например, что $V = \langle P_0 \rangle \oplus \langle P_1, P_2 \rangle \oplus \langle P_3, P_4 \rangle$. Из условия $F \cap V = 0$ вытекает, что $F = \langle J_{12} + \alpha P_0, J_{34} + \beta P_0 \rangle$. Если $\alpha = \beta = 0$, то получаем алгебру $F = \langle J_{12}, J_{34} \rangle$. В случае $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ можно предполагать, что $\alpha \neq 0$. С помощью автоморфизма вида exp (ad$t\, D$) алгебру F отображаем на алгебру $F' = \langle J_{12} + \varepsilon P_0, J_{34} + \beta' P_0 \rangle$, где $\varepsilon = \pm 1$. Автоморфизм, соответствующий матрице diag [—1, 1, 1, 1, 1], отображает F' на $F'' = \langle J_{12} + P_0, J_{34} + \beta'' P_0 \rangle$. Всегда можно считать, что $\beta^2 \geqslant 0$. Разложению $V = \langle P_1 \rangle \oplus \langle P_2 \rangle \oplus \langle P_0, P_3, P_4 \rangle$ пространства V соответствует подалгебра F_3 предложения 1. Предложение доказано.

b). Подалгебры класса 1 алгебры AP (1, 4). Вначале проведем классификацию подалгебр алгебры AP (1, 4), проекция которых на $\langle J_{04} \rangle$ равна 0. Описывает такие подалгебры следующее предложение.

Предложение 2. *Пусть K — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры AP (1, 4), относящаяся к классу 1, $\hat{\pi}_0 (K) = 0$ и $K \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$. Тогда K $\tilde{P}$ (1, 4)-сопряжена с одной из следующих алгебр*:

$$1)\ K_1 = \langle G_1 + P_3, G_2 + \alpha P_2 + \beta P_3 \rangle, \quad \alpha > 0 \vee \alpha = 0,\ \beta \geqslant 0;$$

$$2)\ K_2 = \langle G_1, G_2 + P_2 \rangle; \qquad 3)\ K_3 = \langle G_1 + P_0 - P_4, P_2 \rangle;$$

$$4)\ K_4 = \langle G_1 + P_2, P_3 \rangle; \qquad 5)\ K_5 = \langle G_1, P_3 \rangle; \qquad 6)\ K_6 = \langle G_3, J_{12} \rangle;$$

$$7)\ K_7 = \langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12} \rangle; \qquad 8)\ K_8 = \langle P_2, P_3, J_{23} \rangle;$$

$$9)\ K_9 = \langle G_1, G_2, J_{12} \rangle; \quad 10)\ K_{10} = \langle J_{12} + P_0 + P_4, G_3 + \alpha (P_0 - P_4) \rangle, \quad \alpha \geqslant 0;$$

$$11)\ K_{11} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle; \qquad 12)\ K_{12} = \langle J_{12}, P_3 \rangle;$$

$$13)\ K_{13} = \langle J_{12} + P_0 + P_4, P_3 \rangle; \qquad 14)\ K_{14} = \langle J_{12} + P_3, P_4 \rangle;$$

$$15)\ K_{15} = \langle J_{12} + P_0, P_3 \rangle.$$

Доказательство. Пусть K — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры AP (1, 4), $K \cap V = 0$ и $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3 \rangle$ — разложение пространства $V_{(1)}$, удовлетворяющее условиям п. 5. Тогда $K = \langle G_1, G_2, G_3 \rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} AO$ (3), где AO (3) $= \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle$. Однако ранг алгебры K равен 3, что противоречит условию предложения. Пусть $V_{(1)} = \langle P_0 + P_1, P_1, P_2 \rangle \oplus \langle P_3 \rangle$. В этом случае $G_1, G_2 \in K$. В силу максимальности K имеем

$J_{12} \in K$, а потому $K = \langle G_1, G_2, J_{12}\rangle$ и алгебра K относится к типу 9 предложения 2.

Пусть $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1\rangle + \langle P_0 + P_4, P_2\rangle + \langle P_3\rangle$. Если проекция K на $\langle P_3\rangle$ равна 0, то с точностью до $\tilde{P}$ (1, 4)-сопряженности K обладает базисом G_1, $G_2 + P_2$ и потому относится к типу 2 предложения 2. Пусть проекция K на $\langle P_3\rangle$ отлична от нуля. Тогда K относится к типу 1 предложения 2.

Пусть $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_3\rangle \oplus \langle P_1, P_2\rangle$. Алгебра K содержит генераторы $G_3 + \beta(P_0 - P_4)$ и $J_{12} + \delta(P_0 + P_4)$. В результате алгебра K относится к типам 6, 7, 10 предложения 2.

Случай $K \cap V = \langle P_3\rangle$ рассматривается аналогично. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры AP (1, 4), $\hat{\pi}_0(L) = \langle J_{04}\rangle$ и $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда $L\tilde{P}$ (1, 4)-сопряжена с одной из следующих алгебр*:

$$1)\ L_1 = \langle J_{04}, P_1\rangle; \qquad 2)\ L_2 = \langle J_{12} + cJ_{04}, P_3\rangle,\quad c > 0;$$

$$3)\ L_3 = \langle J_{04}, J_{12}\rangle; \qquad 4)\ L_4 = \langle G_3, J_{12} + cJ_{04}\rangle,\quad c > 0;$$

$$5)\ L_5 = \langle J_{04} + P_2, P_1\rangle; \qquad 6)\ L_6 = \langle J_{04} + P_3, J_{12} + \delta P_3\rangle,\quad \delta \geqslant 0;$$

$$7)\ L_7 = \langle J_{04}, J_{12} + P_3\rangle; \qquad 8)\ L_8 = \langle G_3, J_{04} + P_1\rangle.$$

Доказательство. Согласно алгоритму, изложенному в п. 2, классификация всех максимальных подалгебр ранга 2 алгебры AP (1, 4), удовлетворяющих предложению 3, сводится к нахождению всех неэквивалентных расширений одномерных подалгебр F ранга 1, для которых $\hat{\pi}_0(F) = 0$, с помощью одномерных подалгебр вида $\langle J_{04} + X\rangle$, $X \in AP$ (1, 4).

1°. Алгебра $F_1 = \langle J_{12}\rangle$. Нормализатор $\mathrm{Nor}_{AP(1,4)} F_1$ алгебры F_1 в AP (1, 4) совпадает с алгеброй $F_1 \oplus AP$ (1,2), где AP (1, 2) $= \langle P_0, P_3, P_4, J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$. Поэтому задача свелась к нахождению всех одномерных подалгебр алгебры AP (1, 2) с точностью до P (1, 2)-сопряженности. Алгебра AP (1, 2) содержит только такие одномерные подалгебры с ненулевой проекцией на $\langle J_{04}\rangle : \langle J_{04}\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha P_3\rangle$, $\alpha > 0$. Таким образом, получаем следующие расширения ранга 2 алгебры F_1: $\langle J_{12}, J_{04}\rangle$, $\langle J_{12}, J_{04} + \alpha P_3\rangle$, $\alpha > 0$.

2°. Алгебра $F_2 = \langle J_{12} + P_3\rangle$. Очевидно, $\mathrm{Nor}_{AP(1,4)} F_2 = F_2 \oplus \langle P_0, P_3, P_4, J_{04}\rangle$. Алгебра $\langle P_0, P_3, P_4, J_{04}\rangle$ содержит следующие одномерные подалгебры с ненулевой проекцией на $\langle J_{04}\rangle : \langle J_{04}\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha P_3\rangle$, $\alpha \geqslant 0$. В результате получаем такие максимальные подалгебры ранга $2 : \langle J_{12} + P_3, J_{04}\rangle$, $\langle J_{12} + P_3, J_{04} + \alpha P_3\rangle$. Последняя подалгебра сопряжена с алгеброй $\langle J_{04} + P_3, J_{12} + \delta P_3\rangle$, $\delta \geqslant 0$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Предложение доказано.

с). Максимальные подалгебры ранга 2 алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4). Используя классификацию подалгебр, изложенную в пп. 6а) и 6в), получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4) и $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда $L\ \tilde{P}$ (1, 4)-сопряжена с одной из следующих алгебр*:

1) $F_1 - F_3$ *предложения* 1; 2) $K_1 - K_{15}$ *предложения*; 2; 3) $L_1 - L_8$ *предложения* 3; 4) $\langle J_{12}, J_{34} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 5) $\langle J_{12}, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 6) $\langle J_{12}, G_3 + D\rangle$; 7) $\langle J_{12}, D\rangle$; 8) $\langle J_{12} + \alpha J_{34}, D\rangle$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$; 9) $\langle J_{12} + \alpha J_{34}, J_{12} + \beta D\rangle$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta \geqslant 0$; 10) $\langle G_3, D\rangle$; 11) $\langle G_3, J_{04} + D + M\rangle$; 12) $\langle G_3, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 13) $\langle G_3, J_{12} + \beta D\rangle$, $\beta > 0$; 14) $\langle G_3, J_{12} + cJ_{04} + \alpha D\rangle$, $c > 0$, $\alpha > 0$; 15) $\langle J_{12} + M, J_{04} + D\rangle$; 16) $\langle J_{12} + \alpha M, J_{04} + D + M\rangle$, $\alpha \geqslant 0$;

17) $\langle G_1+P_2,\ J_{04}-D\rangle$; 18) $\langle G_1+P_0-P_4,\ J_{04}-2D\rangle$; 19) $\langle J_{04},\ D\rangle$; 20) $\langle J_{04},\ J_{12}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$; 21) $\langle J_{12}+cJ_{04},\ D\rangle$, $c>0$; 22) $\langle J_{12}+cJ_{04},\ J_{04}+\alpha D\rangle$, $c>0$, $\alpha>0$; 23) $\langle P_3,\ D\rangle$; 24) $\langle P_3,\ J_{12}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$; 25) $\langle P_3,\ J_{04}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$; 26) $\langle P_3,\ J_{12}+cJ_{04}+\alpha D\rangle$, $c>0$, $\alpha>0$; 27) $\langle P_3,\ G_1+D\rangle$; 28) $\langle P_3,\ J_{04}+D+M\rangle$; 29) $\langle P_3,\ J_{12}+c(J_{04}+D+M)\rangle$; 30) $\langle G_3+P_0-P_4,\ J_{12}+c(J_{04}-2D)\rangle$, $e>0$.

Теорема доказывается с использованием алгоритма, изложенного в п. 3.

7. Подалгебры ранга 3 алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4). Классификацию максимальных подалгебр ранга 3 алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4) проводим по схеме, изложенной в п. 3. Вначале находим максимальные подалгебры ранга 3, относящиеся к классу 0.

а). Подалгебры класса 0 алгебры AP (1, 4). Описывает все максимальные подалгебры класса 0 следующее предложение.

Предложение 4. *Пусть F — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры AP (1, 4) и $F \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда F $\tilde{P}$ (1, 4)-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $F_1=\langle J_{12}, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 2) $F_2=\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle$; 3) $F_3=\langle J_{12}+P_0, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 4) $F_4=\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 5) $F_5=\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$.

Предложение 4 доказывается аналогично предложению 1.

b). Подалгебры класса 1 алгебры AP (1, 4). Докажем следующее предложение.

Предложение 5. *Пусть K — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры AP (1, 4), относящаяся к классу 1, $\hat{\pi}_0(K)=0$ и $K \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда K $\tilde{P}$ (1, 4)-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $K_1=\langle G_1, G_2, J_{12}, P_3\rangle$; 2) $K_2=\langle G_3, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 3) $K_3=\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 4) $K_4=\langle G_3+2T, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 5) $K_5=\langle G_1, G_2+P_2, P_3\rangle$; 6) $K_6=\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 7) $K_7=\langle G_1, G_2+P_2, G_3+\lambda P_3\rangle$, $\lambda>0$; 8) $K_8=\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4\rangle$.

Доказательство. Пусть $K \cap V=0$ и $V_{(1)}=\langle P_0+P_4, P_1, P_2\rangle \oplus \langle P_3\rangle$ — разложение пространства $V_{(1)}$, удовлетворяющее условиям п. 3. Тогда $G_1, G_2 \in K$ и в силу максимальности K имеем $J_{12}\in K$. Следовательно, $K_1=\langle G_1, G_2, J_{12}\rangle \subset K$ и потому $K=K_1\oplus K'$. С учетом $K\cap V=0$ отсюда получаем, что $K'=0$. Однако, ранг алгебры K_1 равен 2, что противоречит условию. Если $V_{(1)}=\langle P_0+P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$, то получаем $K=\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$. Если $V_{(1)}=\langle P_0+P_4, P_1\rangle+\langle P_0+P_4, P_2\rangle+\langle P_0+P_4, P_3\rangle$, то $K=\langle G_1, G_2+P_2, G_3+\lambda P_3\rangle$.

Случаи $K\cap V=\langle P_3\rangle$, $K\cap V=\langle P_1, P_2\rangle$ рассматриваются аналогично. Предложение доказано.

Предложение 6. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры AP (1, 4), относящаяся к классу 1, $\hat{\pi}_0(L)=\langle J_{04}\rangle$ и $L\cap V\subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда L $\tilde{P}$ (1, 4)-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1=\langle J_{04}, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 2) $L_2=\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$; 3) $L_3=\langle J_{04}+P_3, P_1, P_2, J_{12}\rangle$ 4) $L_4=\langle J_{04}+P_2, G_1, P_3\rangle$; 5) $L_5=\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04}+P_3\rangle$; 6) $L_6=\langle J_{04}, J_{12}, P_3\rangle$.

Предложение 6 доказывается аналогично предложению 3.

c). Максимальные подалгебры ранга 3 алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4). Используя классификацию подалгебр, изложенную в пп. 7а) и 7b), а также классификацию максимальных подалгебр ранга 2 алгебры AP (1, 4), изложенную в п. 6, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4) и $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда L $\tilde{P}$ (1,4)-сопряжена с одной из следующих алгебр*:

1) $F_1 - F_5$ *предложения* 4; 2) $K_1 - K_8$ *предложения* 5; 3) $L_1 - L_6$ *предложения* 6; 4) $\langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$; 5) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D\rangle$; 6) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 7) $\langle G_1 + P_3, G_2 + \alpha P_2 + \beta P_3, J_{04} - 2D\rangle$, $\alpha > 0 \vee \alpha = 0$, $\beta > 0$; 8) $\langle G_1, G_2 + P_2, J_{04} - D\rangle$; 9) $\langle G_1 + P_0 - P_4, P_2, J_{04} - 2D\rangle$; 10) $\langle G_1 + P_2, P_3, J_{04} - D\rangle$; 11) $\langle G_1, P_3, D\rangle$; 12) $\langle G_1, P_3, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 13) $\langle G_1, P_3, J_{04} + D + M\rangle$; 14) $\langle G_3, J_{12}, D\rangle$; 15) $\langle G_3, J_{12}, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 16) $\langle G_3, J_{12}, J_{04} + D + M\rangle$; 17) $\langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12}, J_{04} - 2D\rangle$; 18) $\langle P_2, P_3, J_{23}, D\rangle$; 19) $\langle P_2, P_3, J_{23}, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 20) $\langle P_2, P_3, J_{23}, J_{04} + D + M\rangle$; 21) $\langle G_1, G_2, J_{12}, D\rangle$; 22) $\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha \neq 0$; 23) $\langle G_1, G_2, J_{04} + D + M\rangle$; 24) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{33}, D\rangle$; 25) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 26) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + D + M\rangle$; 27) $\langle J_{12}, P_3, D\rangle$; 28) $\langle J_{12}, P_3, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 29) $\langle J_{12}, P_3, J_{04} + D + M\rangle$; 30) $\langle J_{12} + M, P_3, J_{04} + D\rangle$; 31) $\langle J_{12} + \alpha M, P_3, J_{04} + D + M\rangle$, $\alpha > 0$; 32) $\langle J_{04}, P_1, D\rangle$; 33) $\langle J_{12} + cJ_{04}, P_3, D\rangle$, $c > 0$; 34) $\langle J_{12} + cJ_{04}, P_3, J_{04} + \alpha D\rangle$, $c > 0$, $\alpha > 0$; 35) $\langle J_{04}, J_{12}, D\rangle$; 36) $\langle G_3, J_{12} + cJ_{04}, D\rangle$, $c > 0$; 37) $\langle G_3, J_{12} + cJ_{04}, J_{04} + \alpha D\rangle$, $c > 0$, $\alpha \neq 0$.

Доказательство. Если $L \subset AP$ (1, 4), то справедливость теоремы вытекает из предложений 4—6. Проведем классификацию максимальных подалгебр ранга 3 алгебры $A\tilde{P}$ (1,4), проекция которых на $\langle D\rangle$ совпадает с $\langle D\rangle$. Согласно алгоритму, изложенному в п. 3, для каждой максимальной подалгебры ранга 2 алгебры AP (1, 4) необходимо найти все ее неэквивалентные расширения ранга 3 в алгебре $A\tilde{P}$ (1, 4). Все вычисления приведены в таблице. Теорема доказана.

8. Подалгебры ранга 4 алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4). Классификацию максимальных подалгебр ранга 4 алгебры $A\tilde{P}$ (1,4) проводим по схеме, изложенной в п. 3. В результате получим следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 4 алгебры $A\tilde{P}$ (1,4) и $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда L $\tilde{P}$ (1,4)-сопряжена с одной из следующих алгебр*:

1) AO (1, 4); 2) AO' (1, 3) $\oplus \langle P_3\rangle$, *где* AO' (1, 3) $= \langle J_{\alpha\beta} | \alpha, \beta = 0, 1, 2, 4)$; 3) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 4) $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$; 5) $\langle J_{12}, P_3, P_4, J_{34}, D\rangle$; 6) $\langle J_{01}, J_{03}, J_{13}, P_4, D\rangle$; 7) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}, D\rangle$; 8) $\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}, D\rangle$; 9) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, D\rangle$; 10) $\langle G_1, G_2, J_{12}, P_3, D\rangle$; 11) $\langle G_3, P_1, P_2, J_{12}, D\rangle$; 12) $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, D\rangle$; 13) $\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, D\rangle$; 14) $\langle J_{04}, P_1, P_2, J_{12}, D\rangle$; 15) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, D\rangle$; 16) $\langle J_{04}, J_{12}, P_3, D\rangle$; 17) $\langle G_1, G_2, J_{12}, P_3, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 18) $\langle G_1, G_2, J_{12}, P_3, J_{04} + D + M\rangle$; 19) $\langle G_3, P_1, P_2, J_{12}, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 20) $\langle G_3, P_1, P_2, J_{12}, J_{04} + D + M\rangle$; 21) $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha \neq 0$; 22) $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + D + M\rangle$; 23) $\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 24) $\langle G_3 + P_0 - P_4, P_1, P_2, J_{12}, J_{04} - 2D\rangle$; 25) $\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + D + M\rangle$; 26) $\langle G_1, G_2 + P_2, P_3, J_{04} - D\rangle$; 27) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4, D\rangle$; 28) $\langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \lambda P_3, J_{04} - D\rangle$, $\lambda > 0$; 29) $\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{33}, J_{04}\rangle$.

9. Конформная сопряженность подалгебр алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4). В пп. 5—8 проведена классификация максимальных подалгебр ранга 1, 2, 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4) с точностью до группы G_1 $\tilde{P}$ (1, 4)-автоморфизмов. Все эти автоморфизмы оставляют инвариантным вполне изотропное подпространство $\bar{V}_{(1)} = \langle Q_1 + Q_7\rangle$. Полученное множество подалгебр алгебры $A\tilde{P}$ (1, 4) обозначим через $\mathfrak{A}$. Две подалгебры $L_1, L_2 \in \mathfrak{A}$ могут быть сопряжены с помощью некоторого C (1,4)-автоморфизма, не

$\varphi \in \{\varphi_1, \varphi_2\}$, f — $\widetilde{P}$ (1, 4)-автоморфизм. В результате получаем следующие теоремы.

Теорема 6. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 1 алгебры $A\widetilde{P}$ (1, 4). Тогда она C (1, 4)-сопряжена с одной из следующих алгебр*:
1) $\langle P_1\rangle$; 2) $\langle J_{12}\rangle$; 3) $\langle J_{12} + cJ_{34}\rangle$, $0 < c \leqslant 1$; 4) $\langle J_{04}\rangle$; 5) $\langle J_{12} + cJ_{04}\rangle$, $c > 0$; 6) $\langle J_{12} + P_0\rangle$; 7) $\langle J_{12} + P_3\rangle$; 8) $\langle J_{12} + M\rangle$; 9) $\langle J_{12} + J_{34} + P_0\rangle$; 10) $\langle J_{12} + cJ_{34} + P_0\rangle$, $0 < c < 1$; 11) $\langle J_{04} + P_1\rangle$; 12) $\langle J_{12} + cJ_{04} + P_3\rangle$, $c > 0$; 13) $\langle G_3 + P_1\rangle$; 14) $\langle G_3 + 2T\rangle$; 15) $\langle G_3 - J_{12} + 2T\rangle$; 16) $\langle J_{12} + cJ_{34} + \alpha D\rangle$, $0 < c \leqslant 1, \alpha > 0$; 17) $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $0 < \alpha \leqslant 1$; 18) $\langle J_{12} + cJ_{04} + \alpha D\rangle$, $0 < c \leqslant \alpha$; 19) $\langle J_{04} - D + 2T\rangle$; 20) $\langle J_{12} + c(J_{04} - D + 2T)\rangle$.

Теорема 7. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $A\widetilde{P}$ (1, 4), удовлетворяющая условию $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда она C (1, 4)-сопряжена с одной из следующих алгебр*:

1) $\langle P_2, P_3, J_{23}\rangle$; 2) $\langle J_{12}, P_3\rangle$; 3) $\langle J_{04}, P_1\rangle$; 4) $\langle J_{12} + cJ_{04}, P_3\rangle$, $c > 0$; 5) $\langle G_3, P_1\rangle$; 6) $\langle J_{12}, J_{34}\rangle$; 7) $\langle J_{04}, J_{12}\rangle$; 8) $\langle G_3, J_{12} + cJ_{04}\rangle$, $c > 0$; 9) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 10) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$; 11) $\langle J_{12} + P_0, P_3\rangle$; 12) $\langle J_{14} + P_3, P_2\rangle$; 13) $\langle J_{12} + M, P_3\rangle$; 14) $\langle J_{04} + P_2, P_1\rangle$; 15) $\langle G_3 + P_2, P_1\rangle$; 16) $\langle G_3 + 2T, P_1\rangle$; 17) $\langle J_{12} + P_0, J_{34} + \delta_0 P_0\rangle$, $\delta \geqslant 0$; 18) $\langle J_{04} + P_3, J_{12} + \delta P_3\rangle$, $\delta \geqslant 0$; 19) $\langle J_{04}, J_{12} + P_3\rangle$; 20) $\langle J_{12} + M, G_3 + \delta T\rangle$, $\delta = 0$; 2; 21) $\langle J_{12}, G_3 + 2T\rangle$; 22) $\langle G_1 + P_3, G_2 + \mu P_2 + \delta P_3\rangle$, $\mu > 0$, $\delta \geqslant 0$; 23) $\langle G_3, J_{04} + P_1\rangle$; 24) $\langle J_{12} + J_{34}, D\rangle$; 25) $\langle J_{12} + cJ_{34}, D\rangle$, $0 < c < 1$; 26) $\langle J_{04}, D\rangle$, 27) $\langle J_{12} + cJ_{04}, D\rangle$, $c > 0$; 28) $\langle J_{04} + \alpha D, P_1\rangle$, $\alpha > 0$; 29) $\langle J_{12} + cJ_{04} + \beta D, P_3\rangle$, $c > 0$, $\beta > 0$; 30) $\langle J_{12} + \alpha D, J_{34} + \beta D\rangle$, $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$; 31) $\langle J_{04} + \alpha D; J_{12} + \beta D\rangle$, $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$; 32) $\langle J_{04}, J_{12} + \alpha D\rangle$; 33) $\langle P_1, J_{04} - D + 2T\rangle$, 34) $\langle J_{12} + c(J_{04} - D + 2T), P_3\rangle$, $c > 0$; 35) $\langle J_{04} + D + M, J_{12} + \alpha M\rangle$, $\alpha \geqslant 0$; 36) $\langle J_{04} + D, J_{12} + M\rangle$; 37) $\langle J_{04} - 2D, G_3 + 2T\rangle$; 38) $\langle J_{04} - D, G_3 + P_1\rangle$; 39) $\langle J_{12} + c(J_{04} - 2D), G_3 + 2T\rangle$, $c > 0$.

Теорема 8. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $A\widetilde{P}$(1,4). Тогда она C(1,4)-сопряжена с одной из следующих алгебр*:

1) $\langle J_{04}, P_1, P_2, I_{12}\rangle$; 2) $\langle J_{04}, J_{12}, P_3\rangle$; 3) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$; 4) $\langle J_{04} + P_3, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 5) $\langle J_{04} + \alpha D, P_1, P_2, J_{12}\rangle$, $\alpha \neq 0$; 6) $\langle J_{04}, D, P_1\rangle$; 7) $\langle J_{12} + cJ_{04}, D, P_3\rangle$, $c > 0$; 8) $\langle J_{04}, J_{12}, D\rangle$; 9) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \alpha D\rangle$; 10) $\langle J_{04} + D + M, J_{12} + \alpha M, P_3\rangle$, $\alpha \geqslant 0$; 11) $\langle J_{04} + D, J_{12} + M, P_3\rangle$; 12) $\langle P_1, P_2, P_4, J_{12}, J_{14}, J_{24}\rangle$; 13) $\langle J_{12}, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 14) $\langle G_3, J_{04}, P_1\rangle$; 15) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4\rangle$; 16) $\langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle$; 17) $\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04}\rangle$; 18) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle$; 19) $\langle J_{12} + P_0, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 20) $\langle J_{12} + \alpha D, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 21) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D\rangle$; 22) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 23) $\langle J_{04} - D + 2T, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 24) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} - D + 2T\rangle$; 25) $\langle G_3, P_1,$

$P_2, J_{12}\rangle$; 26) $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 27) $\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 28) $\langle G_3 + 2T, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 29) $\langle G_1, G_2 - P_2, P_3\rangle$; 30) $\langle G_3, J_{04} + P_2, P_1\rangle$; 31) $\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04} + P_3\rangle$; 32) $\langle J_{04} + \alpha D, J_{12} + \beta D, P_3\rangle$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; 33) $\langle G_3, J_{04} + \alpha D, P_1\rangle$; 34) $\langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$; 35) $\langle J_{04} - 2D, G_3 + 2T, P_1\rangle$; 36) $\langle J_{04} + D + M, G_3, P_1\rangle$; 37) $\langle J_{12}, J_{04} - 2D, G_3 + 2T\rangle$; 38) $AO(4)$.

Теорема 9. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 4 алгебры $A\tilde{P}(1, 4)$. Тогда она $C(1, 4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$; 2) $\langle J_{04}, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 3) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 4) $AO'(1, 3) \oplus \langle P_3\rangle$, *где* $AO'(1, 3) = \langle J_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta = 0, 1, 2, 4\rangle$; 5) $AO(1, 4)$; 6) $\langle J_{12}, D, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 7) $\langle D, P_1, P_2 P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 8) $\langle J_{04}, D, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 9) $\langle J_{04} + \alpha D, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 10) $\langle J_{04}, J_{12}, D, P_3\rangle$; 11) $\langle G_3 + \alpha D, J_{04} + \beta D, P_1, P_2, J_{12}\rangle$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; 12) $\langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, D, P_3\rangle$; 13) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, P, D\rangle$; 14) $AO(4) \oplus \langle D\rangle$; 15) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}, D\rangle$; 16) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, D\rangle$; 17) $AO'(1, 3) \oplus \langle D\rangle$; 18) $\langle J_{04} - D + 2T, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 19) $\langle J_{04} - 2D, G_3 + 2T, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 20) $\langle J_{04} + D + M, G_3, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 21) $\langle J_{04} - D, G_1, G_2 + P_2, P_3\rangle$.

10. Подалгебры оптической алгебры $A\,\mathrm{Opt}(1, 4)$. Целью настоящего пункта является описание подалгебр алгебры $A\,\mathrm{Opt}(1, 4)$, не имеющих в $R_{2,5}$ инвариантных вполне изотропных подпространств размерности 1. Подалгебры алгебры $A\,\mathrm{Opt}(1, 4)$, имеющие в $R_{2,5}$ инвариантное вполне изотропное подпространство размерности 1, сопряжены с подалгебрами расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1, 4)$ и их классификация по рангам изложена в пп. 5—9.

Пусть L — подалгебра алгебры $A\,\mathrm{Opt}(1, 4)$. Если $\hat{\tau}(L) \subset \langle C, T, Z\rangle$, то L $C(1, 4)$-сопряжена с подалгеброй алгебры $A\tilde{P}(1, 4)$ [14]. Учитывая это, доказываем следующие теоремы.

Теорема 10. *Одномерные подалгебры алгебры $A\,\mathrm{Opt}(1, 4)$, не сопряженные с подалгебрами алгебры $A\tilde{P}(1, 4)$, исчерпываются с точностью до $C(1, 4)$-сопряженности такими алгебрами:*

1) $\langle S + T\rangle$; 2) $\langle S + T \pm M\rangle$; 3) $\langle J_{12} + \alpha(S + T)\rangle$, $\alpha > 0$; 4) $\langle S + T + \alpha Z\rangle$, $\alpha > 0$; 5) $\langle J_{12} + \alpha(S + T) \pm M$; 6) $\langle J_{12} + S + T + G_1 + P_2\rangle$; 7) $\langle J_{12} + \alpha(S + T) + \beta Z\rangle$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Теорема 11. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $A\,\mathrm{Opt}(1, 4)$, не сопряженная с подалгеброй алгебры $A\tilde{P}(1, 4)$. Тогда она $C(1, 4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $\langle S + T + J_{12}, G_1 + P_2\rangle$; 2) $\langle J_{12}, S + T\rangle$; 3) $\langle S + T + J_{12} + M, G_1 > P_2\rangle$; 4) $\langle S + T, Z\rangle$; 5) $\langle S + T + \alpha J_{12}, Z\rangle$, $\alpha > 0$; 6) $\langle S + T + J_{12} + \lambda Z, G_1 + P_2\rangle$, $\lambda > 0$; 7) $J_{12} + \alpha Z, S + T + \beta Z\rangle$, $\alpha > 0$; 8) $\langle J_{12}, S + T + \alpha Z\rangle$, $\alpha > 0$; 9) $\langle J_{12} + M, S + T + \gamma M\rangle$; 10) $\langle J_{12}, S + T + M\rangle$.

Теорема 12. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 или 4 алгебры $A\,\mathrm{Opt}(1, 4)$, не сопряженная с подалгеброй алгебры $A\tilde{P}(1, 4)$. Тогда она $C(1, 4)$-сопряжена с одной из таких алгебр:*

1) $AO(3) \oplus \langle S + T + \gamma M\rangle$, $\gamma < 0$; 2) $\langle S + T, J_{12}, Z\rangle$;

$$3)\ AO(3) \oplus \langle S+T+\alpha Z\rangle; \qquad 4)\ \langle S+T+J_{12}, Z, H_1+P_2\rangle;$$

$$5)\ \langle S+T+2J_{12}+\gamma M, \quad H_1+P_2+\sqrt{2}P_3,\ H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle, \quad \gamma<0;$$

$$6)\ \langle \alpha Z+S+T+2J_{12},\ H_1+P_2+\sqrt{2}P_3,\ H_2-P_1+\sqrt{2}H_3\rangle, \quad \alpha\in R;$$

$$7)\ \langle Z,\ S+T+2J_{12},\ G_1+P_2+\sqrt{2}P_3,\ G_2-P_1-\sqrt{2}G_3\rangle;$$

$$8)\ AO(3)\oplus\langle S+T, Z\rangle.$$

1. *Fushchich W. I., Shtelen W. M.* The symmetry and some exact solutions of the eikonal equation // Lett. nuovo cim.— 1982.— **34**.— P. 498—502 .
2. *Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H.* Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. 1. General method and the Poincare group // J. Math. Phys.— 1975.— **16**, N 8.— P. 1597—1624.
3. *Patera J., Winternitz P.* Subalgebras of real three — and four—dimensional Lie algebras // Ibid.— 1977.— **18**, N 7.— P. 1449—1456.
4. *Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H.* Continuous Subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group // Ibid.— 1975.— **16**, N 8.— P. 1615—1624.
5. *Patera J., Winternitz P., Sharp R. T., Zassenhaus H.* Subgroups of the similitudre Group of three — dimensional Minkowski space // Gan. J. Phys.— 1976.— **54**, N 9.— P. 950—961.
6. *Beckers J., Patera J., Perroud M., Winternitz P.* Subgroups of the Euclidean Group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics // J. Math. Phys.— 1977.— **18**, N 1.— P. 72—93.
7. *Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H.* Quantum numbers for particles in de Sitter Space // Ibid.— 1976.— **17**, N 5.— P. 717—728.
8. *Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H.* Continuous groups of the fundamental groups of phusics. III. The de Sitter groups // Ibid.— 1977.— **18**, N 12.— P. 2259 — 2288.
9. *Burdet G., Patera J., Perrin H., Winternitz P.* The optical group and its subgroups // Ibid.— 1978.— **19**, N 8.— P. 1758—1780.
10. *Федорчук В. М.* Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре P (1,4) // Укр. мат. журн.— 1979.— **31**, № 6.— С. 717—722.
11. *Федорчук В. М.* Нерасщепляющиеся подалгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре // Там же.— 1981.— **33**, № 5.— С. 696—700.
12. *Федорчук В. М., Фущич В. И.* О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре // Теоретико-групповые методы в физике: Тр. Междунар. сем. (Звенигород, 1979).— М. : Наука, 1980.— Т. 1. —С. 61—66.
13. *Fushchich W. I., Barannik L. F., Fedorchuk V. M.* Continuous subgroups of the Poincare group P (1,4) // J. Phus. A: Math. and Gen.— 1985.— **18**.— P. 2893—2899.
14. *Баранник Л. Ф., Фущич В. И.* О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$.— Киев, 1988.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.34).
15. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
16. *Фущич В. И., Баранник А. Ф.* Максимальные подалгебры ранга n — 1 алгебры AP $(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 11.— С. 1552—1559.

Получено 22.01.91