УДК 517.927.21

Л. И. КАРАНДЖУЛОВ, канд. физ.-мат. наук (Болгария)

Ветвление периодических решений квазилинейных автономных систем в резонансном случае

На основании теории ветвления решений нелинейных уравнений получены достаточные условия существования периодических решений квазилинейных автономных систем.

На основі теорії розгалуження розв'язків нелінійних рівнянь одержані достатні умови існування періодичних розв'язків квазілінійних автономних систем.

1. Рассмотрим квазилинейную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} = Cx + \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon), \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, $C = \| c_{ij} \|$ — матрица с действительными элементами n-го порядка. Для характеристического уравнения системы (1) $\det \| c_{se} - \delta_{se} K^2 \| = 0$ предполагаем, что собственные числа этой матрицы $(-1) k_s^2$, $s = \overline{1, n}$, разные, и существует внутренний резонанс вида

$$k_i = k(i) k_p, \quad k(i) \in \mathbb{Z}, \quad k(i) \geqslant 2, \quad i = \overline{1, p-1}, \quad 2 \leqslant p < n, \tag{2}$$
$$k_i : k_p \bar{\in} \mathbb{Z}, \quad i = \overline{p+1, n}.$$

Обозначим через $x(t)$ решение (1), (2) при начальных условиях

$$\begin{gathered} x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = \lambda^{(p)} + \sum_{i=1}^{p-1} (N_i + \beta_i(\varepsilon)) \lambda^{(i)}, \quad p < n, \end{gathered} \tag{3}$$

где N_i, $i = \overline{1, p-1}$, — параметры, подлежащие определению, а $\lambda^{(s)} = (\lambda_{s1}, \ldots, \lambda_{sn})^T$ — ненулевой собственный вектор матрицы C, отвечающий собственному числу $(-1) k_s^2$; $\beta_i(\varepsilon)$ — коррекции такие, что $\beta_i(0) = 0$. Тогда при $\varepsilon = 0$ порождающая система $\ddot{x} = Cx$ при условии (2) и начальных условиях, полученных из (3), имеет периодическое решение $x_0(t) = (x_{01}(t), \ldots, x_{0n}(t))$ с периодом $2\pi / k_p$.

Предположим, что векторная функция $f(x, \dot{x}, \varepsilon)$ имеет координатное представление

$$f_j(x, \dot{x}, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu g_{j\nu}(x, \dot{x}), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Функции $g_{j\nu}(x, \dot{x})$ являются аналитическими в некоторой области изменения своих аргументов и удовлетворяют условиям ($j = \overline{1, n}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$)

$$g_{j\nu}(-x_1, \ldots, -x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = -g_{j\nu}(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n). \tag{5}$$

Так как $x(t)$ — решение (1), то и $-x(2T - t)$ также будет решением (1). Тогда при $x(0) = 0$ решение $x(t)$ будет периодическим с периодом $2T$, если выполняется условие

$$x(T) = 0. \tag{6}$$

Условие периодичности (6) первоначально использовано в [1] для изучения периодических колебаний системы последовательно связанных маятников, а впоследствии и другими авторами [2, 3].

В настоящей работе приведены условия, при которых получаются разветвленные периодические решения (1), (3) с периодом

$$2T = \frac{2(\pi + \delta(\varepsilon))}{k_p}, \quad \delta(0) = 0, \tag{7}$$

которые при $\varepsilon = 0$ представляют собой периодическое решение $x_0(t)$ с периодом $2\pi / k_p$ порождающей системы $\ddot{x} = Cx$, если выполнены условия (2), (4), (5).

В условии (7) $\delta(\varepsilon)$, $\delta(0) = 0$ называется коррекцией периода. Условия, при которых определяются коррекции $\beta_i(\varepsilon)$ и $\delta(\varepsilon)$, являются одновременно и условиями для существования периодических решений (1), (3). Используя выражения (6), (7) для определения коррекций $\beta_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, p-1}$, и

$\delta(\varepsilon)$, получаем систему

$$\Phi_q(\beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \delta, \varepsilon) \equiv \left[\frac{(-1)}{k_p}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\delta^{2j}}{(2j+1)!}\right]\left[\sum_{s=0}^{\infty}\beta_{qs}(\beta_1, \dots\right.$$

$$\left.\dots, \beta_{p-1}, \varepsilon)\,\delta^s\right] - \left[\frac{(-1)^{k(q)}}{k_p}(N_q+\beta_q)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(k(q)\,\delta)^{2j}}{(2j+1)!}\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{s=0}^{\infty}B_{ps}(\beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \varepsilon)\,\delta^s\right] = 0, \quad q = \overline{1, p-1}, \tag{8}$$

$$\Phi_p(\beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \delta, \varepsilon) \equiv \frac{(-1)}{k_p}\sin\delta + \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon B_{ps}(\beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \varepsilon)\,\delta^s = 0,$$

$$\Phi_q(\beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \delta, \varepsilon) \equiv \sum_{s=0}^{\infty}B_{qs}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}, \varepsilon)\,\delta^s = 0, \quad q = \overline{p+1, n}.$$

Очевидно, система (8) состоит из n уравнений с p неизвестными и для нее выполняется утверждение из [4] о том, что между множеством действительных малых решений системы (8) и множеством всех периодических решений (1), (3) с определенным периодом существует взаимно однозначное соответствие.

Известно, под малым решением системы (8) подразумевается такое непрерывное решение $\beta_i(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon)$, для которого выполняется условие $\beta_i(0) = \delta(0) = 0$. Если система (8) имеет единственное малое решение по отношению к коррекции, то говорим, что соответствующее решение (1), (3) является продолжением порождающего решения. Если (8) имеет больше одного малого решения, то говорим о ветвлении порождающего решения. В том случае, когда (8) не имеет малых решений, не существует периодического решения, которое переходит в порождающее решение (1), (3).

Ниже получены достаточные условия для ветвления периодического решения $x_0(t)$, когда матрица Якоби системы (8) при $\beta_1 = \dots = \beta_{p-1} = \delta = \varepsilon = 0$ имеет ранг меньше $p-1$. Случай, когда ранг равен p и $p-1$, рассмотрен в [5, 6]. Различные аспекты вопросов, связанных с ветвлением периодических решений автономных и неавтономных систем, изложены в [4, 7].

2. Укажем способ получения системы (8). С ее помощью можно найти параметры $N_1, \dots, N_{p-1}$, которые фигурируют в (3).

Компоненты $x_\mu(t)$, $\mu = \overline{1, n}$, решения $x(t)$ разлагаются по степеням ε и β_i, $i = \overline{1, p-1}$, следующим образом:

$$x_\mu(t, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \varepsilon) = a_{0\mu}^{(0)}(t) + \sum_{\nu=0}^{2} e^{\nu}\left[a_{0\mu}^{\nu+1}(t)\,\varepsilon + \sum_{i=1}^{p-1} a_{i,\mu}^{\nu+1}(t)\,\beta_i\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{p-1} a_{i,j,\mu}^{(3)}(t)\,\beta_i\beta_j + \varepsilon o_\mu(\beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \varepsilon), \tag{9}$$

где $o_\mu(\beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \varepsilon)$ включают в себя β_i и ε в степени выше трех. Коэффициенты $a_{i,\mu}^{(p)}(t)$, $a_{i,j,\mu}^{(s)}(t)$ решения системы дифференциальных уравнений, получаемой после подстановки (9) в (1):

$$g_{\mu\nu}(t, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \varepsilon) = g_{\mu\nu}(x_1(t, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \varepsilon), \dots, x_n(t, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \varepsilon),$$

$$\dot{x}_1(t, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \varepsilon), \dots, \dot{x}_n(t, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \varepsilon)),$$

разлагаются в окрестности точки $\beta_1 = \dots = \beta_{p-1} = \varepsilon = 0$ в ряд Тейлора.

Используя (6), принимая во внимание вид коэффициентов $a_{i,\mu}^{(p)}(t)$, $a_{i,j,\mu}^{(s)}(t)$ и подставляя в (9) значение $t = \frac{\pi + \delta(\varepsilon)}{k_p}$, на основании формулы Тейлора получаем

$$\sum_{i=1}^{p-1} L_i(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \delta, \varepsilon)\lambda_{i\mu} + L_p(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \delta, \varepsilon)\lambda_{p\mu} + \\ + \sum_{i=p+1}^{n} L_i(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \delta, \varepsilon)\lambda_{i\mu} = 0, \tag{10}$$

где

$$L_i(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \delta, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\delta^s}{s!\,k_p^s} \frac{d^s}{dt^s}\left[(N_i + \beta_i)\frac{\sin k(i)\,k_p t}{k(i)\,k_p t} + T_i\right|_{t=\pi/k_p},$$
$$i = \overline{1, p-1},$$

$$L_p(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \delta, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\delta^s}{s!\,k_p^s} \frac{d^s}{dt^s}\left[\frac{\sin k_p t}{k_p} + T_p\right]\Bigg|_{t=\pi/k_p}, \tag{11}$$

$$L_i(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \delta, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\delta^s}{s!\,k_p^s} \frac{d^s}{dt^s} T_i\big|_{t=\pi/k_p}, \quad i = \overline{p+1, n},$$

и

$$T_q = \varepsilon\widetilde{T}_q(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \varepsilon), \quad q = \overline{1, n},$$

$$\widetilde{T}_q(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \varepsilon) = A_{0q}^{(1)}(t) + \varepsilon A_{0q}^{(2)}(t) + \sum_{i=1}^{p-1} A_{iq}^{(2)}(t)\beta_i + \varepsilon^2 A_{0q}^{(3)}(t) + \\ + \sum_{i=1}^{p-1} A_{iq}^{(3)}(t)\,\varepsilon\beta_i + \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{p-1} D_{i,j,q}^{(3)}(t)\,\beta_i\beta_j + \ldots\big|_{t=\pi/k_p}, \tag{12}$$

где

$$A_{iq}^{(k)}(t) = -\frac{1}{k_q\Delta}\int_0^t G_{iq}^{(k)}(u)\sin k_q(u - t)\,du, \quad k = 1, 2, 3;\ q = \overline{1, n};\ i = \overline{0, p-1},$$

$$D_{i,j,\mu}^{(3)}(t) = -\frac{1}{k_q\Delta}\int_0^t G_{i,j,q}^{(3)}(u)\sin k_q(u - t)\,du, \quad i, j = \overline{1, p-1}; \quad q = \overline{1, n}, \tag{13}$$

$$\Delta = \det\|\lambda_{ij}\|, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \Delta \neq 0.$$

Если обозначить

$$M_0 = (x_{01}(u), \ldots, x_{0n}(u), \dot{x}_{01}(u), \ldots, \dot{x}_{0n}(u)),$$

где $x_{0j}(u)$ — компоненты порождающего решения $x_0(u)$, то функции $G_{i,q}^{(k)}(u)$, $G_{i,j,q}^{(3)}(u)$ получаются из Δ после замены g-го столбца соответственно $g_{i\mu}^{(k)}(M_0)$ и $g_{i,j,\mu}^{(3)}(M_0)$, которые имеют вид

$$g_{0\mu}^{(1)}(M_0) = g_{\mu 0}(t, 0), \quad g_{0\mu}^{(2)}(M_0) = \frac{\partial g_{\mu 0}(t, 0)}{\partial\varepsilon} + g_{\mu 1}(t, 0),$$

$$g_{0\mu}^{(3)}(M_0) = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 g_{\mu 0}(t, 0)}{\partial\varepsilon^2} + \frac{\partial g_{\mu 1}(t, 0)}{\partial\varepsilon} + g_{\mu 2}(t, 0), \tag{14}$$

$$g_{i\mu}^{(2)}(M_0) = \frac{\partial g_{\mu 0}(t, 0)}{\partial\beta_i}, \quad g_{i\mu}^{(3)}(M_0) = 2\frac{\partial^2 g_{\mu 0}(t, 0)}{\partial\varepsilon\partial\beta_i} + \frac{\partial g_{\mu 1}(t, 0)}{\partial\beta_i},$$

$$g_{i,j,\mu}^{(3)}(M_0) = \frac{\partial^2 g_{\mu 0}(t, 0)}{\partial\beta_i\partial\beta_j}, \quad i \leqslant j.$$

Отметим, что в (14) под $g_{\mu\nu}(t, 0)$ понимаем

$$g_{\mu\nu}(t, 0) = g_{\mu\nu}(t, 0, \ldots, 0).$$

Система (10) может быть рассмотрена как линейная однородная система $ML = 0$ с матрицей $M = \| \lambda_{ij} \|$ такой, что $\det M = \Delta \neq 0$. Это значит, что она эквивалентна системе

$$L_i(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \delta, \varepsilon) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{15}$$

из которой определяем $\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \delta$.

Рассмотрим вместо системы (15) систему (8), которая эквивалентна (15) (доказательство этого можно найти в [5]). Целью этой замены является выбор системы для определения параметров N_i. При этом в (8) используем соотношение

$$B_{qs}(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \varepsilon) = \frac{1}{s!\, k_p^s} \frac{d^s}{dt^s} \widetilde{T}_q(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \varepsilon), \quad q = \overline{1, n}; \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

3. Пусть J — матрица Якоби для системы (8) в точке $\beta_1 = \ldots = \beta_{p-1} = \delta = \varepsilon = 0$:

$$J = \left\| \frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{D(\beta_1, \ldots, \beta_n)} \right\|_{\varepsilon=0}.$$

Найдем малые решения системы (8) по отношению к $\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \delta$. В этом случае выполняется соотношение

$$\Phi_q(0, \ldots, 0) = 0, \quad q = \overline{1, n},$$

откуда следует

$$A_{0q}^{(1)}\left(\frac{\pi}{k_p}\right) + (-1)^{k(q)} N_q A_{0p}^{(1)}\left(\frac{\pi}{k_p}\right) = 0, \quad q = \overline{1, p-1},$$

$$A_{0q}^{(1)}\left(\frac{\pi}{k_p}\right) = 0, \quad q = \overline{p+1, n}.$$

Пусть $\operatorname{rank} J = p - 2$. Тогда существует определитель порядка $p - 2$, отличный от нуля. Допустим, что этот определитель имеет вид

$$\det J_{p-2} = \frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_{p-3}, \Phi_p)}{D(\beta_1, \ldots, \beta_{p-3}, \beta_p)} \neq 0. \tag{17}$$

Для удобства обозначим $\delta = \beta_p$.

Систему (8) представим в виде

$$-\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \Phi_q(0)}{\partial \beta_1} \beta_i = \frac{\partial \Phi_q(0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \Phi_q(0)}{\partial \beta_i^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_q(0)}{\partial \varepsilon^2} \varepsilon^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 \Phi_q(0)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \beta_i \beta_j + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \Phi_q(0)}{\partial \beta_i \partial \varepsilon} \beta_i \varepsilon + lq(\beta_1, \ldots, \beta_p, \varepsilon) = 0, \tag{18}$$

где $lq(\beta_1, \ldots, \beta_p, \varepsilon)$ содержит β_i и ε в степени больше двух. Условие (17) показывает, что существует J_{p-2}^{-1} и из (18) можно выразить $\beta_1, \ldots, \beta_{p-3}, \beta_p$ через $\beta_{p-2}, \beta_{p-1}, \varepsilon$. Обозначим

$$\xi_1 = \beta_{p-2}, \quad \xi_2 = \beta_{p-1} \tag{19}$$

и

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{p-3}, \beta_p)^T, \quad \alpha_1 = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^{p-3}, \alpha_1^p)^T, \tag{20}$$

$$\alpha_2 = (\alpha_2^1, \ldots, \alpha_2^{p-3}, \alpha_2^p)^T, \quad \alpha_3 = (\alpha_3^1, \ldots, \alpha_3^{p-3}, \alpha_3^p)^T.$$

Тогда вектор β имеет вид

$$\beta = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\varepsilon + \dots . \tag{21}$$

Для коэффициентов α_i, $i = 1, 2, 3$, из (18) получаем

$$\alpha_1 = J_{p-2}^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_1(0)}{\partial\xi_1}, \dots, \frac{\partial\Phi_{p-3}(0)}{\partial\xi_1}, 0\right)^T, \tag{22}$$

$$\alpha_2 = J_{p-2}^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_1(0)}{\partial\xi_2}, \dots, \frac{\partial\Phi_{p-3}(0)}{\partial\xi_2}, 0\right)^T, \quad \alpha_3 = J_{p-2}^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_1(0)}{\partial\varepsilon}, \dots \right.$$

$$\left. \dots, \frac{\partial\Phi_{p-3}(0)}{\partial\varepsilon}, \frac{\partial\Phi_p(0)}{\partial\varepsilon}\right)^T.$$

Определенные таким образом $\beta_1, \dots, \beta_{p-3}, \beta_p$ из (21) подставляем в те уравнения из (18), которые не участвуют в нахождении $\beta_1, \dots, \beta_{p-3}, \beta_p$. Так получаем систему из $n - p + 2$ уравнений с неизвестными ξ_1 и ξ_2:

$$\Pi_i(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) = 0, \quad i = \overline{p-2, n}, \quad i \neq p. \tag{23}$$

Введем обозначения

$$\Pi_{01}^{(i)} = \varepsilon n_0^{(i)}, \quad \Pi_{02}^{(i)} = l_2^{(i)}\xi_2^2 + l_3^{(i)}\xi_2\varepsilon + l_4^{(i)}\varepsilon^2,$$
$$\Pi_{11}^{(i)} = q_2^{(i)}\xi_2 + q_3^{(i)}\varepsilon, \quad \Pi_{20}^{(i)} = m_0^{(i)}, \quad \Pi_{30}^{(i)} = p_0^{(i)}, \tag{24}$$

где

$$n_0^{(i)} = \frac{\partial\Phi_i(0)}{\partial\beta_1}\alpha_3^1 + \dots + \frac{\partial\Phi_i(0)}{\partial\beta_{p-3}}\alpha_3^{p-3} + \frac{\partial\Phi_i(0)}{\partial\varepsilon},$$

$$l_2^{(i)} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k\partial\beta_j}\alpha_2^k\alpha_2^j,$$

$$l_3^{(i)} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k\partial\beta_j}(\alpha_3^k\cdot\alpha_2^j + \alpha_2^k\cdot\alpha_3^j) + \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k\partial\varepsilon}\alpha_2^k,$$

$$l_4^{(i)} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\varepsilon^2} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k\partial\beta_j}\alpha_3^k\alpha_3^j + \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k\partial\varepsilon}\alpha_3^k,$$

$$q_2^{(i)} = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k^2}\alpha_1^k\alpha_2^k + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k\partial\beta_j}(\alpha_2^k\alpha_1^j + \alpha_1^k\alpha_2^j), \tag{25}$$

$$q_3^{(i)} = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k^2}\alpha_1^k\alpha_3^k + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k\partial\beta_j}(\alpha_3^k\alpha_1^j + \alpha_1^k\alpha_3^j) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k\partial\varepsilon}\alpha_1^k,$$

$$m_0^{(i)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k^2}(\alpha_1^k)^2 + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k\partial\beta_j}\alpha_1^k\alpha_1^j,$$

$$p_0^{(i)} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial^2\Phi_i(0)}{\partial\beta_k^3}(\alpha_1^k)^3.$$

Лемма 1. *Если* $\Pi_{20}^{(i)} \neq 0$, $i = \overline{p-2, n}$, $i \neq p$, *то система* (23) *эквивалентна системе вида*

$$G_i(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) = 0, \quad i = \overline{p-2, n}, \quad i \neq p, \tag{26}$$

где G_i — *многочлены второй степени по отношению к* ξ_1.

Доказательство. Так как rank $J = p-2$, то отсюда следует ord $T_i \times \times (\xi_1, \xi_2, 0) \geqslant 2$, $i = \overline{p-2, n}$, $i \neq p$, т. е. в (23) не фигурирует самостоятельно первая степень ξ_1 и ξ_2. Перепишем (23) по степеням ξ_1 с коэффициентами, зависящими от ξ_2 и ε, принимая во внимание (18) и (24)

$$\Pi_i(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) = [\Pi_{01}^{(i)} + \Pi_{02}^{(i)} + \ldots] + [\Pi_{11}^{(i)} + \ldots]\xi_1 + [\Pi_{20}^{(i)} + \ldots]\xi_1^2 + \\ + [\Pi_{30}^{(i)} + \ldots]\xi_1^3 + \ldots . \tag{27}$$

Из условия леммы следует, что Π_i $(0, 0, 0) = 0$ и Π_i $(\xi_1, 0, 0) \neq 0$. На основании теоремы Вейерштрасса [4] аналитическая в начальной точке функция Π_i $(\xi_1, \xi_2, \varepsilon)$ может быть представлена при ord Π_i $(\xi_1, 0, 0) = 2$ в виде

$$\Pi_i(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) \equiv (\xi_1^2 + H_1^{(i)}\xi_1 + H_0^{(i)})\,\Omega^{(i)}(\xi_1, \xi_2, \varepsilon), \quad i = \overline{p-2, n}; \quad i \neq p, \tag{28}$$

где $\Omega^{(i)}(\xi_1, \xi_2, \varepsilon)$ — аналитическая в начальной точке функция и $\Omega^{(i)}(0, 0, 0) = T_{20}^{(i)} \neq 0$, а $G_i(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) \equiv \xi_1^2 + H_1^{(i)}\xi_1 + H_0^{(i)}$ — многочлены второй степени, т. е. $H_k^{(i)} = H_k^{(i)}(\xi_2, \varepsilon)$ такие, что $H_k^{(i)}(0, 0) = 0$, $k = 0, 1$. Функции $\Omega^{(i)}$, $H_1^{(i)}$, $H_0^{(i)}$ определяются однозначно из (27) с помощью рекуррентных формул [4]. Из (28) следует, что (23) эквивалентна системе

$$G_i(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) \equiv \xi_1^2 + H_1^{(i)}\xi_1 + H_0^{(i)} = 0, \quad i = \overline{p-2, n}, \quad i \neq p, \tag{29}$$

где

$$\begin{gathered} H_0^{(i)}(\xi_2, \varepsilon) = \Pi_{01}^{(i)}\Pi_{02}^{(i)} + o_0^{(i)}(\xi_2, \varepsilon), \\ H_1^{(i)}(\xi_2, \varepsilon) = \Pi_{11}^{(i)}\Pi_{20}^{(i)} + \Pi_{01}^{(i)}\Pi_{20}^{(i)}\Pi_{30}^{(i)} + o_1^{(i)}(\xi_2, \varepsilon). \end{gathered} \tag{30}$$

С учетом (24), (25) соотношение (30) будет иметь вид

$$\begin{gathered} H_0^{(i)}(\xi_2, \varepsilon) = n_1^{(i)}\varepsilon + o_0^{(i)}(\xi_2, \varepsilon), \\ H_1^{(i)}(\xi_2, \varepsilon) = m_2^{(i)}m_0^{(i)}\xi_2 + m_0^{(i)}m_1^{(i)}\varepsilon + o_1^{(i)}(\xi_2, \varepsilon), \end{gathered} \tag{31}$$

где

$$n_1^{(i)} = n_0^{(i)}p_0^{(i)}, \quad m_2^{(i)} = q_2^{(i)}, \quad m_3^{(i)} = q_3^{(i)} + n_1^{(i)}. \tag{32}$$

Из записи (31) следует, что $H_k^{(i)}(0, 0) = 0$, $k = 0, 1$. Лемма доказана.

4. Рассмотрим некоторые случаи существования малых решений систем (29), поскольку они являются и малыми решениями систем (23).

Используем метод исключения Кронекера [4]. Для этого образуем линейную комбинацию из многочленов

$$G_\nu = \sum_{\substack{i=p-2 \\ i \neq p, \mu}}^{n} v_i G_i(\xi_1, \xi_2, \varepsilon), \tag{33}$$

где v_i — произвольные константы, а $p-2 \leqslant \mu \leqslant n$. Введем знак (′) в выражении $\sum\limits_{i=p-2}^{n}{}'$ для случая $i \neq p, \mu$.

Подставив G_i из (29) в (33), получим

$$G_v = \Big(\sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i\Big)\xi_1^2 + \Big(\sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i H_1^{(i)}\Big)\xi_1 + \Big(\sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i H_0^{(i)}\Big). \tag{34}$$

Образуем результант и субрезультант многочленов G_ν и G_μ:

$$\mathcal{R}(G_\mu, G_\nu) = \begin{vmatrix} 1 & H_1^{(\mu)}(\xi_2, \varepsilon) & H_0^{(\mu)}(\xi_2, \varepsilon) & 0 \\ 0 & 1 & H_1^{(\mu)}(\xi_2, \varepsilon) & H_0^{(\mu)}(\xi_2, \varepsilon) \\ 0 & \sum\limits_{i=p-2}^{n}{}' v_i & \sum\limits_{i=p-2}^{n}{}' v_i H_1^{(i)}(\xi_2, \varepsilon) & \sum\limits_{i=p-2}^{n}{}' v_i H_0^{(i)}(\xi_2, \varepsilon) \\ \sum\limits_{i=p-2}^{n}{}' v_i & \sum\limits_{i=p-2}^{n}{}' v_i H_1^{(i)} & \sum\limits_{i=p-2}^{n}{}' v_i H_0^{(i)}(\xi_2, \varepsilon) & 0 \end{vmatrix}, \quad (35)$$

$$R_1 = \begin{vmatrix} 1 & H_1^{(\mu)}(\xi_2, \varepsilon) \\ \sum\limits_{i=p-2}^{n}{}' v_i & \sum\limits_{i=p-2}^{n}{}' v_i H_1^{(i)}(\xi_2, \varepsilon) \end{vmatrix} = \sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i \left[H_1^{(i)}(\xi_2, \varepsilon) - H_1^{(\mu)}(\xi_2, \varepsilon)\right]. \quad (36)$$

Наибольший общий делитель (НОД) многочленов G_i, $i = \overline{p-2, n}$, $i \neq p$, есть и НОД многочленов G_μ и G_ν. Степень примитивного НОД G_μ и G_ν равна первому нетождественно равному нулю субрезультанту (35).

Принимая во внимание (32), введем обозначения

$$L_{01} = \sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i n_0^{(i)} - n_0^{(\mu)} \sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i,$$

$$L_{11} = \sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i m_0^{(i)} m_2^{(i)} - m_0^{(\mu)} m_2^{(\mu)} \sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i, \quad (37)$$

$$L_{12} = \sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i m_0^{(i)} m_3^{(i)} - m_0^{(\mu)} m_3^{(\mu)} \sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i.$$

Лемма 2. *Пусть* $R(G_\mu, G_\nu) \equiv 0$ *и* $R_1(G_\mu, G_\nu) \not\equiv 0$. *Тогда если* $L_{01} = 0$, $L_{11} \neq 0$, *то уравнение* (29) *имеет малое решение, зависящее от одного параметра, и оно разлагается по целым степеням* ε.

Доказательство. Из условия $R \equiv 0$ следует, что d_1 имеет положительную степень по отношению к ξ_1. Условие $R_1 \neq 0$ показывает, что степень d_1 равна единице. Тогда выполнено и равенство

$$D(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) = R_1(\xi_1, \varepsilon)\, d_1(\xi_1, \xi_2, \varepsilon), \quad (38)$$

где

$$D(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) = \begin{vmatrix} 1 & G_\mu(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) \\ \sum\limits_{i=p-2}^{n}{}' v_i & G_\nu(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) \end{vmatrix}. \quad (39)$$

С другой стороны, d_1 — НОД G_i, $i = \overline{p-2, n}$, $i \neq p$, и тогда G_i может быть представлен в виде

$$G_i(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) = d_1(\xi_1, \xi_2, \varepsilon)\, \widetilde{G}_i(\xi_1, \xi_2, \varepsilon), \quad i = \overline{p-2, n}, \quad i \neq p. \quad (40)$$

Поэтому выполняется равенство

$$d_1(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) = 0, \quad (41)$$

или, что то же самое,

$$D(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) = 0 \quad (42)$$

и

$$\widetilde{G}_i(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) = 0, \quad (43)$$

откуда следует, что результат $R(\widetilde{G}_\nu, \widetilde{G}_\mu) \not\equiv 0$.

Рассмотрим уравнение (42). Подставляя в него G_μ и G_ν соответственно из (29) и (34), получаем

$$\Big[\sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i H_1^{(i)} - H_1^{(\mu)} \sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i\Big] \xi_1 + \Big[\sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i H_0^{(i)} + H_0^{(\mu)} \sum_{i=p-2}^{n}{}' v_i\Big] = 0. \qquad (44)$$

Используя (24), (25), (31), (32), уравнение (44) запишем в виде

$$[L_{11}\xi_2 + L_{12}\varepsilon + O(\xi_2, \varepsilon)]\,\xi_1 + L_{01}\varepsilon + \overline{O}(\xi_2, \varepsilon) = 0, \qquad (45)$$

где L_{01}, L_{11}, L_{12} — выражения из (37), а $O(\xi_2, \varepsilon)$ и $\overline{O}(\xi_2, \varepsilon)$ содержат члены с ξ_2 и ε в степени больше единицы.

Положим $\xi_2 = \eta\varepsilon$, где параметр η может быть выбран различными способами. Например, η может быть функцией $\varepsilon\eta = \psi(\varepsilon)$. Разложим $\psi(\varepsilon)$ по степеням ε. Подставив $\xi_2\eta\varepsilon$ в (45) и разделив на ε, получим

$$[L_{11}\eta + L_{12}\varepsilon + o(\eta, \varepsilon)]\,\xi_1 + L_{01} + \overline{o}(\eta, \varepsilon) = 0. \qquad (46)$$

Но по условию $L_{01} = 0$, $L_{11} \neq 0$. Применяя для уравнения (46) диаграмму Ньютона, зависящую от параметра η, получаем семейство малых решений $\xi_1 = \varphi(\varepsilon, \eta)$, которое представлено сходящимися рядами по целым степеням ε. Тогда существуют малые решения (29) $\xi_1 = \varphi(\varepsilon, \eta)$, $\xi_2 = \eta\varepsilon$. Лемма доказана.

Отметим, что когда $L_{01} \neq 0$, то уравнение (46), а следовательно, и (29), не имеют малых решений. Тогда малые решения будем искать из уравнения $\tilde{G}_i(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) = 0$.

Подставляя в (21) выражения $\xi_1 = \varphi(\varepsilon, \eta)$ и $\xi_2 = \eta\varepsilon$, принимая во внимание (19), получаем, что все коррекции $\beta_i = \beta_i(\varepsilon, \eta)$ зависят от параметра η, а следовательно, представлены сходящимися рядами по степеням ε.

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1. $N_1, N_2, \ldots, N_{p-1}$ — *решение системы*

$$A_{0q}^{(1)}\left(\frac{\pi}{k_p}\right) + (-1)^{k(q)} N_q A_{0p}^{(1)}\left(\frac{\pi}{k_p}\right) = 0, \quad q = \overline{1, p-1};$$

2. $A_{0q}^{(1)}\left(\dfrac{\pi}{k_p}\right) = 0, \quad q = \overline{p+1, n};$

3. $\operatorname{rank} J = p-2$

$$\left.\frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_{p-3}, \Phi_p)}{D(\beta_1, \ldots, \beta_{p-3}, \beta_p)}\right|_{\varepsilon=0} \neq 0;$$

4. $R \equiv 0$, $R_1 \not\equiv 0$;

5. $L_{01} = 0$, $L_{11} \neq 0$.

Тогда система (8) *определяет семейство непрерывных векторов*

$$\beta(\varepsilon, \eta) = (\beta_1(\varepsilon, \eta), \ldots, \beta_p(\varepsilon, \eta)),$$

зависящих от параметра η *и* $\beta(0, \eta) = 0$.

Пусть при $\xi_2 = \eta\varepsilon$ $R_1 \equiv 0$. Тогда степень d_1 по отношению к ξ_1 равна двум. Вместо (41) используем $G_\mu(\xi_1, \eta\varepsilon, \varepsilon) = 0$, и рассуждения аналогичны.

Рассмотрим случай, когда результат не равен нулю

$$R(G_\mu, G_\nu) \not\equiv 0. \qquad (47)$$

Тогда НОД G_μ и G_ν является константой, и поэтому рассматриваем уравнение $R = 0$ и ищем его малые решения. Принимая во внимание вид R из (35), а также (31), (32), получаем

$$R = (\xi_2, \varepsilon) = \sum_{\substack{i,j=p-2 \\ i \leqslant j}}^{n} v_i v_j \sum_{k=1}^{8} F_k(\xi_2, \varepsilon), \qquad (48)$$

где $l=2$ при $i \neq j$ и $l=1$ при $i=j$, и

$$F_1(\xi_2, \varepsilon) = lH_0^{(i)}H_0^{(j)}, \quad F_2(\xi_2, \varepsilon) = -lH_0^{(\mu)}H_0^{(j)},$$
$$F_3(\xi_2, \varepsilon) = -lH_0^{(i)}H_0^{(\mu)}, \quad F_4(\xi_2, \varepsilon) = l(H_0^{(\mu)})^2, \tag{49}$$
$$F_5(\xi_2, \varepsilon) = H_1^{(i)}H_1^{(j)}H_0^{\mu}, \quad F_6(\xi_2, \varepsilon) = -H_1^{(\mu)}H_1^{(j)}H_0^{(\mu)},$$
$$F_7(\xi_2, \varepsilon) = -H_1^{(i)}H_1^{(\mu)}H_0^{(j)}, \quad F_8(\xi_2, \varepsilon) = (H_1^{(\mu)})^2 H_0^{i}.$$

Подставляя (30) в (48), из (24) и (25) получаем

$$F_k(\xi_2, \varepsilon) = \begin{cases} d_{k21}\xi_2^2\varepsilon + d_{k12}\xi_2\varepsilon^2 + d_{k03}\varepsilon^3 + o_{k4}(\xi_2, \varepsilon) \text{ при } k = 1, 3, 5, 8, \\ d_{k02}\varepsilon^2 + o_{k3}(\xi_2, \varepsilon) \text{ при } k = 2, 4, 6, 7. \end{cases} \tag{50}$$

Коэффициенты d_{kij} из (50) легко определяются, если принять во внимание (49), (24), (25). Многочлены $o_{k4}(\xi_2, \varepsilon)$ и $o_{k3}(\xi_2, \varepsilon)$ содержат ξ_2 и ε в степени соответственно выше третьей и второй.

Из $R=0$ при произвольных v_i получаем

$$F_k(\xi_2, \varepsilon) = 0, \quad k = \overline{1, 8}. \tag{51}$$

Из (50) видно, что $F_k(0, 0) = 0$. Пусть существует индекс k, например $k = p_1$, такой, что из уравнения $F_{p_1}(\xi_2, \varepsilon) = 0$ можно определить малое решение $\xi_2 = \varphi_2(\varepsilon)$, $\varphi(0) = 0$, разложенное по степеням ε. Подставив решение $\xi_2 = \varphi_2(\varepsilon)$ в уравнение (51):

$$\widetilde{F}_k((\varphi_2(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad k = \overline{1, 8}, \quad k \neq p_1, \tag{52}$$

и в (29), получим систему

$$\widetilde{G}_i \equiv G_i(\xi_1, \varphi_2(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad i = \overline{p-2, n}, \quad i \neq p, \tag{53}$$

Для нее результант $R(\widetilde{G}_\mu, \widetilde{G}_\nu) \equiv 0$, потому что $\varphi(\varepsilon)$ удовлетворяет системе (51) при выполнении условия (52). Следовательно, многочлены $\widetilde{G}_\mu$ и $\widetilde{G}_\nu$, а также и многочлены $\widetilde{G}_i$, $i = \overline{p-2, n}$; $i \neq p$, имеют НОД $d_2(\xi_1, \varepsilon)$, который не является константой. Так как $\widetilde{G}_i = d_2(\xi_1, \varepsilon) g_i(\xi_1, \varepsilon)$, то из уравнения

$$d_2(\xi_1, \varepsilon) = 0 \tag{54}$$

получаем решение $\xi_1 = \varphi_1(\varepsilon)$, $\varphi_1(0) = 0$, сходящееся по степеням ε. А это означает, что функции $\xi_i = \varphi_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют системе (29). Подставив их в (21), видим, что все корекции сходятся по степеням ε.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются первые три условия теоремы* 1. *Тогда если выполнены условия* (52), *то система* (8), *уравнения* (51) *при* $k = p_1$ *и* (54) *определяют вектор из непрерывных функций*

$$\beta(\varepsilon) = (\beta_1(\varepsilon), \ldots, \beta_p(\varepsilon))$$

таких, что $\beta_i(0) = 0$ *и* $\beta_i(\varepsilon)$ *сходятся по степеням* ε.

Отметим, что если в (51) нет малого решения, то в (8) его также нет.

1. *Bradistilov G.* Uber periodishe und asymptotisce Losungen bein n-fachen Pendel in der Ebene // Math. Ann.— 1938.— **116**.— P. 181—203.
2. *Bradistilov G., Boyadjiev G.* On the periodic solutions of quasilinear autonomous system of differential aquations of second order in a critical case // Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences.— 1970.— **23**, N 3.— P. 251—252.
3. *Манолов С.* Периодични решения при една класа от автономни системи и някои приложения // Год. на Висшите учебни заведения. Математика.— 1965.— **2**, № 2.— С. 69—104.
4. *Вайнберг М., Треногин В.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1969.— 527 с.

5. *Каранджулов Л. И.* Периодические решения классов автономных систем с единой характеристикой в резонансах и начальных условиях // Proceedincs of the eleventh international conference on nonlinear oscillations.— Budapest, 1987.— P. 293—296.
6. *Karandjulov L. I.* Periodic Solution for a Class of Autonomous Systems and thier branching // Mathematics and Education in mathematics, Proceedings of the Eighteenth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians.— Albena, 1989.— P. 168—174.

Получено 03,10,90